وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الموصل

مسائل القيم الحدودية

الطبعة الثالثة

تأليف ديفيدل . ياورز

ترجمة

الدكتور نزار حمدون شكر

استاذ مساعد ـ كلية التربية

جامعة الموصل

مقدمة المترجم

يؤكد تاريخ العلم ان الحضارات الحديثة تدين بتقدمها وازدهارها وتواصلها للحضارة العربية بما قدمتهُ من اسهامات فاعلة وحققتهُ من اضافات مؤثرة . كانت لها نتائجها في مجمل المسيرة العلمية على الانسانية كافة . والقاريء العربي اليوم بامس الحاجة للاطلاع على النظريات والاكتشافات الجديدة ومسيرة التطور العلمي السريع . وهذا يتطلب تطويع اللغة لتشمل وتستوعب كل هذه الاكتشافات لتقدمها الى ابناء الضاد لينهلوا منها ويواكبوا مسارها .

لذا فقد وقع اختياري على هذا الكتاب فقمتُ بترجمته نظراً لثراء مضامينهِ العلمية وشموله على موضوعات تغطي مفردات مادة مهمة هي مادة مسائل القيم الحدودية والتي تحقق لطلبة المرحلة الرابعة في كليات التربية الكثير من المعادلات التفاضلية الجزئية التي يدرسها طلبة المرحلة الثالثة، وتطبيقات فيزياوية وهندسية مهمة في الجانبين التطبيقي والنظري .

وهذا الكتاب يتألف من سبعة فصول ، وقد ضم في آخره اجوبة التمارين الفردية ، كما ضم ملحقاً وجدولاً بالمصطلحات العلمية التي تسهم في تقريب الصورة ... عساي وفقت في مقصدي ومرماي .

وفي الختام اتقدم بجزيل شكري وتقديري الى المقوم العلمي الدكتور علي عزيز علي ـ كلية العلوم ـ جامعة الموصل لقيامه بمراجعة مسودات الترجمة وابدائهِ ملاحظات قيمة ومفيدة . واتقدم بالشكر ايضاً الى المقوم اللغوي الدكتور نايف محمد سليمان ـ كلية التربية ـ جامعة الموصل لما بذلهُ من جهد على طريق سلامة الكتاب اللغوية .

وأخيراً اتقدم بشكري الى العاملين في مؤسسة دار الكتب بجامعة الموصل للجهد الذي بذلوهُ لكي يظهر هذا الكتاب بشكله الحالي .

وختاماً ارجو ان يسد هذا الجهد المتواضع فراغاً في مكتبتنا العلمية العربية وان ينال قبولاً من لدن جميع المعنين بحقلي الرياضيات والفيزياء .

ومن الله العون والتوفيق

المترجم

١٩٨٩

مقدمة المؤلف

هذا المقرر مصمم لفصل دراسي واحد في المعادلات التفاضلية الجزئية لطلبة المرحلة الثالثة والرابعة في كليات الهندسة والعلوم . ويمكن استخدام هذا المقرر ايضاً كمقدمة لطلبة الدراسات العليا .

المتطلبات الرياضية استخدمت بأقل ما يمكن كحسبان التفاضل والتكامل والمعادلات التفاضلية . ولم يتضمن المقرر المتجهات او الجبر الخطي (عدا المحددات ذات السعة 2 × 2) . ومن الضروري ان يكون للقاريء خلفية في الفيزياء لكي يتابع اشتقاقات معادلتي الحرارة والموجة .

ان الهدف الرئيس من هذا الكتاب هو حل مسائل القيم الحدودية التي تشمل معادلات تفاضلية . تم تركيز الانتباه على طريقة فصل المتغيرات وذلك لاستخداماتها في التطبيقات ، ولكونها تزودنا بطرق منتظمة لحل حالات مهمة في الحرارة والموجة ومعادلات الجهد . ان حل دالمبرت لمعادلة الموجه طُور في الوقت نفسهِ مع حل السلاسل ، وكذلك حل توزيع المصادر بُنيّ لمعادلة الحرارة . بالاضافة الى ذلك ، توجد فصول حول تحويلات لابلاس وكذلك الطرق العددية .

والهدف الثانوي من تاليف هذا الكتاب هو ايجاد الروابط بين التطورات الرياضية وبين الطلبة ذوي الميول الفيزياوية وهذا لا يتم الا باشتقاق نموذج رياضي لعدد من القضايا ، باستخدام مسببات فيزياوية في الرياضيات من وقت لآخر ، وذلكَ بترجمة النتائج الرياضية في صيغ فيزياوية ، وكذلك دراسة معادلات الحرارة والموجة والجهد بشكل منفصل .

ولخدمة كلا الهدفين ، توجد عدة امثلة واكثر من 750 تمريناً . تشمل تمارين متنوعة في نهاية كل فصل . كما ان اجوبة التمارين الفردية موجودة في نهاية الكتاب .

ان عدة طرق توجد لاختيار وترتيب مفردات الكتاب كأعطاء فصل مفيد وممتع . والبنود الاتية من متن الكتاب ، تتطلب 14 ساعة من التدريس على الاقل بالفصل (1) ، البنود (1 ـ 3) فـ الفصل (2) البنود (1 ـ 5) فـ الفصل (3) ، (البنود (1 ـ 3) الفصل (4) ، البنود (1 و 2) و (4) .

هذه كلها تغطي القواعد الاساسية لسلاسل فوريه وكذلك حلول معادلات الحرارة والموجة والجهد في مناطق منتهية . واختياري للمادة المهمة الاخرى هي تكامل فوريه ، وكذلك حل المسائل في مناطق غير مقيدة : الفصل (1) ، البند (9) والفصل (2) والبندان (10) و (11) الفصل 3 ، البند ، الفصل 4 ، البند 3 . وهذه كلها تتطلب ست محاظرات اخرى على الاقل .

وقد تناول هذا الكتاب ايضاً نتائج ذات نكهة نظرية : الفصل (1) البنود (4 ـ 7) حول سلاسل فوريه الفصل (2) البنود (9 ـ 7) حول مسائل سترم ـ ليوفيلي ، فصل (3) ، بند (4) ، وكذلك الاجزاء الاكثر تعقيداً من فصل (5) ، البنود (9 ـ 5) حول دوال بيسل وحدوديات ليجندر . ومن الناحية الاخرى ، كان الفصل (7) يتناول ، الطرق العددية ، والتي تعطي نكهة تطبيقية ، خصوصاً عندما يكتب الطلبة برامج على الحاسبة الالكترونية .

الفصل الصفر يغطي تكنيك الحلول ونظريات المعادلات التفاضلية الاعتيادية ومسائل القيم الحدودية . ويتناول هذا الفصل ايضاً اشتقاقات لصيغ التوازن لمعادلتي الحرارة والموجة .

وفي الطبعة الثالثة ، تم اعادة كتابة عدة بنود . منها البند (5) من الفصل الصفر حول دوال كرين وكذلك البند (7) من الفصل الاول ، لإثبات تقارب سلاسل فوريه . وكذلك تم اعادة ترتيب الفصلين الصفر والسابع . كما تم اعطاء ثلاثة قطع من برامج بيسك لمعاملات فوريه ، وحذف كاوس ـ جوردان وكذلك تكرار كاوس ـ سيدل . واخيراً تم اضافة (200) تمرين جديد ، وعدد من الصيغ الرياضية تم توحيدها في ملحق الكتاب .

المؤلف

1987

المحتويات

الفصل الصفر

المعادلات التفاضلية الاعتيادية

ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

1 ـ المعادلات الخطية المتجانسة .

HOMOGENEOUS LINEAR EQUATIONS

معظم مواضع هذا الكتاب تتناول المعادلات التفاضلية الجزئية ، معناها الفيزياوي والمسائل التي تظهر فيها ، وحل تلك المسائل . واسلوب الحل الاساسي يشمل فصل المعادلات التفاضلية الجزئية الى معادلات تفاضلية اعتيادية . لذلك سوف نبدأ باعطاء مراجعة لبعض الحقائق حول المعادلات التفاضلية الاعتيادية وطرق حلها .

وينصب اهتمامنا بشكل رئيسي على المعادلات التفاضلية الخطية ذات الرتبة الاولى الثانية ، كما في المعادلتين (1) و (2)

$$\frac{du}{dt} = k(t)u + f(t), \tag{1}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + k(t)\frac{du}{dt} + p(t)u = f(t). \tag{2}$$

في اي من المعادلتين ، اذا كان ، **f (t) = 0** ، فان المعادلة تكون متجانسة . (يوجد اختبار آخر ، اذا كانت الدالة الثانية $u(t) \equiv 0$ حلاً للمعادلة ، فان المعادلة

تكون متجانسة .) وفيما تبقى من هذا البند ، سوف نقدم مراجعة للمعادلات التفاضلية الخطية :

أ ـ معادلات الرتبة الاولى FIRST-ORDER EQUATIONS

المعادلة العامة المتجانسة ذات الرتبة الاولى تكون بالصيغة

$$\frac{du}{dt} = k(t)u. \tag{3}$$

وهذه المعادلة يمكن حلها بعزل u في جهة واحدة تم تكامل الطرفين :

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dt} = k(t)$$

$$\ln|u| = \int k(t)dt + C$$

$$u(t) = \pm\, e^C e^{\int k(t)dt} = ce^{\int k(t)dt} \tag{4}$$

ومن السهولة ان نتحقق بشكل مباشر ان التعبير الاخير هو حل للمعادلة التفاضلية لاية قيمة لـ c . اي ان ، c هو ثابت اختياري ويمكن استخدامه لتحقيق الشرط الابتدائي (initial condition) اذا توخينا الدقة .

فمثلاً ، اذا اردنا حل المعادلة التفاضلية المتجانسة .

$$\frac{du}{dt} = -tu.$$

فان الخطوات اعلاه تعطي الحل العام :

$$u(t) = ce^{-t^2/2}$$

لاي ثابت c . واذا كان الشرط الابتدائي هو $u(0) = 5$ ، فان c يجب اختياره لكي تحقق هذا الشرط $(c = 5)$

واكثر الحالات شيوعاً في المعادلات التفاضلية هي $k(t) = k$ ، حيث أن k ثابت . المعادلة التفاضلية وحلها العام هما :

$$\frac{du}{dt} = ku, \quad u(t) = ce^{kt}. \tag{5}$$

اذا كان $k<0$ ، فان $u(t)$ تقترب من 0 ، عندما تزداد t ، اذا كان $k>0$ ، فان $u(t)$ تزداد بسرعة مع تزايد قيمة t . هذا النوع من النمو الاسي يؤدي في احيان كثيرة الى كارثة في القضايا الفيزياوية ، لانه لا يمكن ان يبقى لفترة غير محددة

ب ـ معادلات الرتبة الثانية . SECOND-ORDER EQUATIONS

لانستطيع اعطاء طريقة عامة لحل معادلات عامة خطية متجانسة ذات الرتبة الثانية ،

$$\frac{d^2u}{dt^2} + k(t)\frac{du}{dt} + p(t)u = 0. \tag{6}$$

ومع ذلك ، يمكن حل بعض الحالات المهمة والتي سنأتي عليها لاحقاً . والمبدأ الاكثر اهمية في النظرية العامة هو الآتي :

مبدأ التطابق : Principle of Superposition.

اذا كان $u_1(t)$ و $u_2(t)$ حلين للمعادلة الخطية المتجانسة **(6)** ، فان اي تركيب خطي منهما

$$u(t) = c_1u_1(t) + c_2u_2(t).$$

يكون حلًا للمعادلة ايضاً .

هذه المبرهنة ، والتي يمكن اثباتها بسهولة ، اعطيت اسم « مبدأ » لانها قابلة التطبيق فقط للظواهر المتغيرة ، لعدد معين من المعادلات الخطية المتجانسة ، سوف نستخدم لاحقاً المبدأ نفسه للمعادلات التفاضلية الجزئية .

وحتى نكون قادرين على تحقيق الشرط الابتدائي غير المقيد ، نحتاج لحلين مستقلين خطياً لمعادلة من الرتبة الثانية . ويكون الحلان مستقلين خطياً اذا كان التركيب الخطي لهما (بمعاملات ثابتة) يساوي صفراً هو التركيب الذي تكون معاملاته اصفاراً فقط .

يوجد اختبار بديل . يكون الحلان للمعادلة الخطية المتجانسة **(6)** مستقلين خطياً ، واذا فقط كان محدد ورنسكن (*Wronskian*) لهما

$$W(u_1, u_2) = \begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{vmatrix} \tag{7}$$

لا يساوي صفراً .

1 . المعاملات الثابتة . Constant coefficients

اهم انواع المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية التي يمكن حلها بصيغة محددة هي التي تكون معاملاتها ثابتة

$$\frac{d^2u}{dt^2} + k\frac{du}{dt} + pu = 0 \quad \text{(p.k ثابتان)} \tag{8}$$

يوجد عادة في الاقل حل واحد بالصيغة $u(t) = e^{mt}$ لثابت مناسب m . ولا يجاد m ، نعوض الحل المفروض في المعادلة التفاضلية ، لنحصل على

$$m^2e^{mt} + kme^{mt} + pe^{mt} = 0,$$

او

$$m^2 + km + p = 0 \tag{9}$$

(لان e^{mt} لا يمكن ان تساوي صفراً) وتسمى هذه الحدودية المميزة (characteristic polynomial) للمعادلة التفاضلية (8) .

وتوجد ثلاث حالات لجذور المعادلة المميزة (9) ، والتي تحدد طبيعة الحل العام (general solution) للمعادلة (8) .

ويمكن تلخيص هذا بالجدول 1 ـ 0

جدول 1 ـ 0

حلول المعادلة $\frac{d^2u}{dt^2} + k\frac{du}{dt} + pu = 0$

جذور الحدودية المميزة	الحل العام للمعادلة التفاضلية
حقيقية ، مختلفة : $m_1 \neq m_2$	$u(t) = c_1e^{m_1t} + c_2e^{m_2t}$
حقيقية ، مضاعفة : $m_1 = m_2$	$u(t) = c_1e^{m_1t} + c_2te^{m_1t}$
معقدة مترافقة : $m_1 = \alpha + i\beta, m_2 = \alpha - i\beta$	$u(t) = c_1e^{\alpha t}\cos\beta t + c_2e^{\alpha t}\sin\beta t$

هذه الطريقة التي تفترض صيغة اسية (**exponential form**) للحل تلائم المعادلات الخطية المتجانسة لاية رتبة ، والتي لها معاملات ثابتة .

وفي جميع الاحوال ، فان اي زوج من الجذور المرافقة المعقدة (complex conjugate) $m = \alpha \pm i\beta$ تؤدي الى زوج من الحلول المعقدة .

$$e^{\alpha t}e^{i\beta t},\ e^{\alpha t}e^{-i\beta t} \tag{10}$$

والتي يمكن استبدالها بزوج من الحلول الحقيقية

$$e^{\alpha t}\cos\beta t,\ e^{\alpha t}\sin\beta t. \tag{11}$$

وسوف نعطي الان مثالين مهمين . اولاً ، نتأمل المعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \lambda^2 u = 0 \tag{12}$$

حيث أن λ ثابت ، والحدودية المميزة لهذه المعادلة $m^2 + \lambda^2 = 0$ والتي جذراها $m = \pm i\lambda$. وبتطبيق الحالة الثالثة ، الحل العام يكون ،

$$u(t) = c_1\cos\lambda t + c_2\sin\lambda t. \tag{13}$$

ثانياً ، تأمل المعادلة التفاضلية :

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \lambda^2 u = 0. \tag{14}$$

الحدودية المميزة لها هي $m^2-\lambda^2=0$ والتي جذراها $m = \pm\lambda$.
واذا كانت $\lambda > 0$ فان الحالة الاولى تتحقق ، وبهذا فان الحل العام هو

$$u(t) = c_1e^{\lambda t} + c_2e^{-\lambda t} \tag{15}$$

وفي بعض الاحيان يمكن كتابة الحل بصيغة اخرى . الدوال الزائدية **cosh, sinh** وتعرف بالاتي :

$$\sinh A = \frac{1}{2}(e^A - e^{-A}),\ \cosh A = \frac{1}{2}(e^A + e^{-A}). \tag{16}$$

لذلك ، $\sinh\lambda t$ و $\cosh\lambda t$ هما تركيب خطي من $e^{\lambda t}$ و $e^{-\lambda t}$ وباستخدام مبدأ التطابق ، فان كلاً منهما حل للمعادلة (14) . وان اختبار محددورنسكن يبين انهما مستقلان خطياً . لذلك ، يمكن كتابة

$$u(t) = c_1'\cosh\lambda t + c_2'\sinh\lambda t$$

كحل عام للمعادلة (14) ، حيث ان c_1' و c_2' ثابتان اختياريان .

2 ـ معادلة كوشي ـ اويلر Cauchy-Euler Equation

احدى المعادلات القليلة التي لها معاملات متغيرة ، والتي يمكن حلها بشكل عام هي معادلة كوشي ـ اويلر

$$t^2 \frac{d^2u}{dt^2} + kt\frac{du}{dt} + pu = 0. \tag{17}$$

والصيغة المميزة لهذه المعادلة هي ان معامل المشتقة من الرتبة n هو t^n ، مضروبا بثابت . وطريقة حل هذه المعادلات بشبه الى درجة كبيرة الطرق السابقة : نفرض ان الحل هو بالصيغة $u(t) = t^m$ ثم نجد m وبتعويض u في المعادلة (17) نحصل على .

$$t^2m(m-1)t^{m-2} + kt\, mt^{m-1} + pt^m = 0, \text{ or}$$

$$m(m-1) + km + p = 0 \quad (p,k \text{ ثابتان }) \quad \text{او} \tag{18}$$

هذه هي الحدودية المميزة للمعادلة (17) ، وطبيعة جذورها تحدد الحل كما مبين في الجدول (2 ـ 0) .

واحد الامثلة المهمة لمعادلة كوشي ـ اويلر هي المعادلة

$$t^2 \frac{d^2u}{dt^2} + t\frac{du}{dt} - \lambda^2 u = 0 \tag{19}$$

حيث ان $\lambda > 0$ والحدودية المميزة لها هي :

$$m(m-1) + m - \lambda^2 = m^2 - \lambda^2$$

وجذراها هما $m = \pm\lambda$ لذلك فان الحالة الاولى من الجدول 2 ـ 0 تتحقق ، وان :

$$u(t) = c_1t^{\lambda} + c_2t^{-\lambda} \tag{20}$$

هو الحل العام للمعادلة (19)

واذا اخذنا المعادلة الخطية العامة :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + k(t)\frac{du}{dt} + p(t)u = 0,$$

فان أياً من $k(t)$ او $p(t)$ والتي لاتكون فيها الدالة مستمرة تسمى نقطة شاذة (*singular point*) للمعادلة التفاضلية .

وفي مثل هذه النقطة ، فان الحلول قد تصنف بطرق مختلفة . ومن ناحية اخرى ، اذا كانت t_0 نقطة شاذة بحيث ان كلتا الدالتين

$$(t - t_0)k(t) \text{ and } (t - t_0)^2 p(t) \qquad (21)$$

لهما مفكوك سلسلة تايلر (Taylor series expansions) ، فان t_0 تسمى نقطة شاذة منتظمة (*regular singular point.*) وتعد معادلة كوشي ـ اويلر من الامثلة المهمة للمعادلة التفاضلية التي لها نقطة شاذة منتظمة (عند $t_0 = 0$) . وسلوك الحلول قرب هذه النقطة يزودنا بنموذج لمعادلة اكثر عمومية .

جدول (2 ـ 0)

حلول المعادلة $t^2 \frac{d^2u}{dt^2} + kt\frac{du}{dt} + pu = 0$

جذور الحدودية المميزة	الحل العام للمعادلة التفاضلية
جذران حقيقيان مختلفان $m_1 \neq m_2$	$u(t) = c_1t^{m_1} + c_2t^{m_2}$
جذران حقيقيان متساويان $m_1 = m_2$	$u(t) = c_1t^{m_1} + c_2(\ln t)t^{m_1}$
جذران معقدان مترافقان $m_1 = \alpha + i\beta, m_2 = \alpha - i\beta$	$u(t) = c_1t^{\alpha}\cos(\beta \ln t) + c_2t^{\alpha}\sin(\beta \ln t)$

3 ـ معادلات أخرى Other Equations

هناك معادلات اخرى من الرتبة الثانية يمكن حلها بواسطة سلاسل القوى (power series) . وذلك بتبديل المتغيران الى الانواع التي تم حلها سابقاً ، او عن طريق الصدفة المحضة . مثلاً ، المعادلة

$$t^4 \frac{d^2u}{dt^2} + \lambda^2 u = 0, \qquad (22)$$

والتي تظهر في نظرية القضبان (theory of beams)، يمكن حلها بطريقة تبديل المتغيرات :

$$t = \frac{1}{z},\ u(t) = \frac{1}{z}v(z).$$

وبدلالة المتغيرات الجديدة ، فان المعادلة التفاضلية (22) تصبح :

$$\frac{d^2v}{dz^2} + \lambda^2 v = 0.$$

وهذه المعادلة يمكن حلها بسهولة ، وان حل المعادلة الاصلية يمكن ايجادة بتبديل عكسي للمتغيرات :

$$u(t) = t\,(c_1 \cos(\lambda/t) + c_2 \sin(\lambda/t)). \qquad (23)$$

C.الحل المستقل الثاني . SECOND INDEPENDENT SOLUTION

بالرغم من انه لايمكن بشكل عام حل معادلة تفاضلية خطية متجانسة لها معاملات متغيرة ، لكن يمكن عادة ايجاد حل مستقل ثاني اذا علم احد حلول المعادلة .

نفرض ان $u_1(t)$ هو حل للمعادلة العامة

$$\frac{d^2u}{dt^2} + k(t)\frac{du}{dt} + p(t)u = 0. \qquad (24)$$

ونفرض ان $u_2(t) = v(t)u_1(t)$ حل للمعادلة . فيجب ان نجد $v(t)$ لكي يكون u_2 حلاً للمعادلة . من الناحية الاخرى ، $v(t)$ لا يمكن ان يكون ثابتاً لان هذا يؤدي الى عدم حصولنا على حل مستقل . وبالتعويض المباشر بـ $u_2 = vu_1$ في المعادلة التفاضلية نحصل على

$$\ldots + vu_1'' + k(t)\,(v'u_1 + vu_1') + p(t)vu_1 = 0.$$

وبترتيب الحدود في مشتقات v. فان المعادلة اعلاه تصبح

$$u_1 v'' + (2u_1' + k(t)u_1)v' + (u_1'' + k(t)u_1' + p(t)u_1)v = 0.$$

من الناحية الاخرى فإن u_1 هو حل للمعادلة (24) ، لذلك فان معاملات v تساوي صفراً . وهذا يؤدي الى

$$u_1 v'' + (2u_1' + k(t)u_1)v' = 0, \qquad (25)$$

هذه معادلة خطية من الرتبة الاولى في v' . وبالتالي ، فان المتغير v يمكن ايجادهُ ، على الاقل بدلالة بعض التكاملات . فمثلاً ، تأمل المعادلة :

$$(1 - t^2)u'' - 2tu' + 2u = 0,$$

والتي لها $u_1(t) = t$ كحل للمعادلة . وبفرض $u_2 = v \cdot t$ والتعويض نحصل على :

$$(1 - t^2)(v''t + 2v') - 2t(v't + v) + 2vt = 0.$$

وبعد ترتيب الحدود ، فان المعادلة تؤول الى :

$$(1 - t^2)tv'' + (2 - 4t^2)v' = 0.$$

وبسهولة ، يمكن ان نجد :

$$\frac{v''}{v'} = \frac{4t^2 - 2}{t(1 - t^2)} = \frac{-2}{t} + \frac{1}{1 - t} - \frac{1}{1 + t}$$

(باستخدام تجزئة الكسور) ، اذاً

$$\ln v' = -2\ln t - \ln(1 - t) - \ln(1 + t).$$

واخيراً ، اذا اخذنا عكس اللوغارتم لكل طرف نحصل على :

$$v' = \frac{1}{t^2(1 - t^2)} = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{1 - t^2}$$

$$v = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + t}{1 - t}\right|.$$

وهكذا نجد ان v ليس ثابتاً ، وبالتالي فهو يزودنا بحل مستقل ثاني :

$$u_2(t) = vt = -1 + \frac{1}{2}t \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|$$

Summary الخلاصة

ادناه بعض المعادلات المهمة مع حلولها .

$$\frac{du}{dt} = ku \text{ (} k \text{ is constant)}$$
$$u(t) = ce^{kt}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \lambda^2 u = 0$$
$$u(t) = a\cos\lambda t + b\sin\lambda t$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \lambda^2 u = 0$$
$$u(t) = a\cosh\lambda t + b\sinh\lambda t$$
$$u(t) = c_1e^{\lambda t} + c_2e^{-\lambda t}$$

$$t^2u'' + tu' - \lambda^2 u = 0$$
$$u(t) = c_1t^{\lambda} + c_2t^{-\lambda}$$

تمارين

في التمارين 1 ــ 6 ، جد الحل العام للمعادلة التفاضلية . مع الاخذ بنظر الاعتبار المتغيرات المرتبطة والمستقلة .

1. $\dfrac{d^2\phi}{dx^2} + \lambda^2\phi = 0$
2. $\dfrac{d^2\phi}{dx^2} - \mu^2\phi = 0$
3. $\dfrac{d^2u}{dt^2} = 0$
4. $\dfrac{dT}{dt} = -\lambda^2 kT$
5. $\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dw}{dr}\right) - \dfrac{\lambda^2}{r^2}w = 0$
6. $\rho^2\dfrac{d^2R}{d\rho^2} + 2\rho\dfrac{dR}{d\rho} - n(n+1)R = 0$

في التمارين 7 ــ 11 ، جد الحل العام . في بعض الحالات ، من المفيد أن ننجز الاشتقاق المذكور ، ولانقوم بذلك في حالات اخرى .

7. $\dfrac{d}{dx}\left((h + kx)\dfrac{dv}{dx}\right) = 0$ (h,k ثابتان)
8. $(e^x\phi')' + \lambda^2 e^x\phi = 0$
9. $\dfrac{d}{dx}\left(x^3\dfrac{du}{dx}\right) = 0$
10. $r^2\dfrac{d^2u}{dr^2} + r\dfrac{du}{dr} + \lambda^2 u = 0$
11. $\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{du}{dr}\right) = 0$

12. قارن ثم جد اوجه الاختلاف لصيغ حلول المعادلات التفاضلية الاتية ثم جد سلوكهما عندما $t \to \infty$

a. $\dfrac{d^2u}{dt^2} + u = 0$ b. $\dfrac{d^2u}{dt^2} = 0$ c. $\dfrac{d^2u}{dt^2} - u = 0$

في التمارين 13 ــ 15 ، استخدام طريقة « التخمين الاسية » لايجاد الحل العام للمعادلات التفاضلية (λ ثابت) .

$$\frac{d^4u}{dx^4} + \lambda^4 u = 0 \qquad 13$$

$$\frac{d^4u}{dx^4} - \lambda^4 u = 0 \qquad 14$$

$$\frac{d^4u}{dx^4} + 2\lambda^2 \frac{d^2u}{dx^2} + \lambda^4 u = 0 \qquad 15$$

في التمارين 16 ـ 18 ، لقد اعطى احد حلول المعادلة التفاضلية . فجد حلاً مستقلاً ثانياً :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2a\frac{du}{dt} + a^2u = 0,\ u_1(t) = e^{-at} \qquad 16$$

$$t^2\frac{d^2u}{dt^2} + (1-2b)t\frac{du}{dt} + b^2u = 0,\ u_1(t) = t^b \qquad 17$$

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right) + \frac{4x^2-1}{4x}u = 0,\ u_1(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \qquad 18$$

في التمارين 19 ـ 21 ، استخدم تبديل المتغيرات المذكورة لحل المعادلة التفاضلية

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{dR}{d\rho}\right) + \lambda^2\rho^2R = 0,\ R(\rho) = u(\rho)/\rho \qquad 19$$

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\phi}{d\rho}\right) + \frac{4\lambda^2\rho^2-1}{4\rho}\phi = 0,\ \phi(\rho) = v(\rho)/\sqrt{\rho} \qquad 20$$

$$t^2\frac{d^2u}{dt^2} + kt\frac{du}{dt} + pu = 0,\ x = \ln t,\ u(t) = v(x). \qquad 21$$

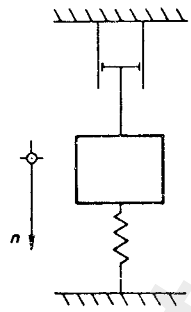
22. توصف الازاحة $u(t)$ للكتلة في منظومة النابض الحلزوني المثبط (mass-spring-damper **system**) شكل (1 ـ 0) بمسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{d^2u}{dt^2} + b\frac{du}{dt} + \omega^2u = 0,$$

$$u(0) = u_0,\ \frac{du}{dt}(0) = v_0.$$

(المعاملات b و ω^2 يتناسبان مع الثابتين المميزين (characteristic constants) للمثبط والحلزون على التوالي .) حل مسألة القيمة الابتدائية لكل وسيط (parameter) بالفترات المبينة ادناه ، وبين لماذا اختيرت هذه الفترات

$$\text{(i) } b = 0, \quad \text{(ii) } 0 < b < \frac{\omega}{2}, \quad \text{(iii) } b = \frac{\omega}{2}, \Delta \quad \text{(iv) } b > \frac{\omega}{2}.$$



شكل 1 ـ 0 منظومة النابض الحلزوني المثبط

23. اذا كانت $u(t)$ دالة لاتساوي صفراً ، وان

$$\frac{u''}{u} = \text{ثابت} > 0.$$

بين ان هذه العلاقة هي معادلة تفاضلية ثم حل هذه المعادلة . (سم الثابت p^2) .
برهن ان واحداً فقط من الاحتمالات الثلاثة الاتية يتحقق .

a. $u(t) = 0$ لاحد قيم t وان $u'(t) \neq 0,$

b. $u'(t) = 0$ لاحد قيم t وان $u(t) \neq 0,$

c. $u(t) \neq 0.$ $u'(t) \neq 0$

2 ـ المعادلات الخطية غير المتجانسة

NONHOMOGENEOUS LINEAR EQUATIONS

في هذا البند ، سوف نعطي طرقاً لحل معادلات خطية غير متجانسة من الرتبة الاولى والثانية ،

$$\frac{du}{dt} = k(t)u + f(t)$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + k(t)\frac{du}{dt} + p(t)u = f(t).$$

ومن الجدير بالملاحظة اننا فرضنا ان اللاتجانس (inhomogeneity) $f(t)$ لا يساوي صفراً . واسهل معادلة غير متجانسة هي

$$\frac{du}{dt} = f(t). \tag{1}$$

وهذه المعادلة يمكن حلها بعمومية كاملة وذلك بأجراء تكامل واحد

$$u(t) = \int f(t)dt + c \tag{2}$$

او

$$u(t) = \int_{t0}^{t} f(z)dz + c. \tag{3}$$

في الحالة الاولى استخدمنا تكاملاً غير محدد وكتبنا ثابت التكامل كباقي ينتمي له . وفي الحالة الثانية التكامل غير المحدد قد تم استبداله بتكامل محدد له قيد اعلى (upper limit.) متغير . والقيد الادنى للتكامل يمثل عادة الزمن الابتدائي . والمعادلة من الرتبة الثانية

$$\frac{d^2u}{dt^2} = f(t) \tag{4}$$

يمكن حلها باجراء التكامل مرتين .

المبرهنتان الاتيتان تلخصان بعض خواص المعادلات الخطية والتي لها فائدة في بناء الحلول .

مبرهنة 1. الحل العام لمعادلة خطية غير متجانسة يكون بالصيغة $u(t) = u_p(t) + u_c(t)$، حيث $u_p(t)$ هو اي حل خاص للمعادلة غير المتجانسة وان $u_c(t)$ هو الحل العام للمعادلة المتجانسة المقابلة لها .

مبرهنة 2 اذا كان $u_{p1}(t)$ و $u_{p2}(t)$ حلين خاصين لمعادلة تفاضلية باللاتجانسين $f_1(t)$ و $f_2(t)$ على التوالي ، فان $k_1u_{p1}(t) + k_2u_{p2}$ هو حل خاص للمعادلة التفاضلية باللاتجانس $k_1f_1(t)$ $k_2f_2(t)$ (k_1, k_2 ثابتان) .

فمثلاً ، تأمل المعادلة التفاضلية :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u = 1 - e^{-t}.$$

والمعادلة المتجانسة المقابلة لها هي :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u = 0$$

والتي لها حل عام $u_c(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t.$ الحل الخاص للمعادلة باللاتجانس $f_1(t) = 1,$ اي

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u = 1,$$

هو $u_{p1}(t) = 1$ والحل الخاص للمعادلة :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u = e^{-t}$$

هو $u_{p2}(t) = \frac{1}{2}e^{-t}$ وباستخدام المبرهنة 2 ، فان الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة المعطاة هو $u_p(t)=1-\frac{1}{2}e^{-t}$ اخيراً ، وباستخدام المبرهنة (1) يكون الحل العام للمعادلة المطلوبة هو :

$$u(t) = 1 - \frac{1}{2}e^{-t} + c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

واذا اعطي الشرط الابتدائي ، فان c_1 و c_2 تحققه وبالطبع فان الشرط الابتدائي يحقق الحل الكلي للمعادلة التفاضلية المعطاة ، وليس $u_c(t)$ فقط .

والان ، نحول انتباهنا للطرق التي نجد فيها الحلول الخاصة لمعادلة تفاضلية خطية غير متجانسة .

تعتمد هذه الطريقة على تخمين الحل التجريبي (trivals solution) تم ايجاد المعاملات المناسبة . من الطبيعي ان هذه الطريقة تنحصر في الحالات التي نخمن فيها الحل بنجاح :
عندما تكون للمعادلة معاملات ثابتة وان اللاتجانس يكون بسيطاً في الصيغة . والجدول (3 ـ 0) يقدم خلاصة في اللاتجانس المقبول واعطاء الصيغة المقابلة للحل الخاص . والجدول يركز على بعض الحالات . فمثلاً ، $f(t)$ في السطر 1 هو حدودية اذا كان $\alpha = 0$, او يكون دالة اسية اذا كان $n = 0$ و $\alpha \neq 0$. في السطر 2 ، فان كلًا من الجيب وجيب التمام يجب ان يكونا موجودين ضمن الحل التجريبي حتى ولو كان احدهما مفقوداً من الصيغة $f(t)$ ويمكن ان نفرض $\alpha = 0$ وكذلك $n = 0$.

جدول (3 ـ 0)
معاملات غير محددة

اللاتجانس $f(t)$	صيغة الحل التجريبي $u_p(t)$
$(a_0t^n + a_1t^{n-1} + \cdots + a_n)e^{\alpha t}$	$(A_0t^n + A_1t^{n-1} + \cdots + A_n)e^{\alpha t}$
$(a_0t^n + \cdots + a_n)e^{\alpha t}\cos\beta t +$ $(b_0t^n + \cdots + b_n)e^{\alpha t}\sin\beta t$	$(A_0t^n + \cdots + A_n)e^{\alpha t}\cos\beta t +$ $(B_0t^n + \cdots + B_n)e^{\alpha t}\sin\beta t$

مثال : جد الحل الخاص للمعادلة

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 5u = te^{-t},$$

سوف نستخدم السطر (1) من الجدول اي $\alpha = -1$ و $n = 1$ الصيغة المناسبة للحل التجريبي هي :

$$u_p(t) = (A_0t + A_1)e^{-t}.$$

وعندما نعوض هذه الصيغة في المعادلة التفاضلية ، نحصل على .

$$(A_0t + A_1 - 2A_0)e^{-t} + 5(A_0t + A_1)e^{-t} = te^{-t}.$$

والان ، وبمساواة المعاملات في الحدود المتشابهة تعطينا معادلتين للمعاملات

(معاملات te^{-t}) $\quad 6A_0 = 1$

(معاملات e^{-t})　　$6A_1 - 2A_0 = 0$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على $A_1 = 1/18., A_0 = 1/6$ واخيراً ، فان الحل الخاص هو :

$$u_p(t) = \left(\frac{1}{6}t + \frac{1}{18}\right)^{\,t}$$

من الواضح ان الحل التجريبي من الجدول لا يمكن تطبيقه اذا كان يحوي اي حد ، والذي هو حل للمعادلة التفاضلية المتجانسة . وفي هذه الحالة فان الحل التجريبي يجب تحويره بالقاعدة الاتية : نضرب باقل قوة لـ t بحيث لا يوجد اي حد في الحل التجريبي يحقق المعادلة المتجانسة المقابلة .

مثال : الجدول يقترح الحل التجريبي $u_p(t) = (A_0t + A_1)e^{-t}$ للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2u}{dt^2} - u = te^{-t}.$$

من الناحية الاخرى ، فأن حل المعادلة المتجانسة المقابلة $u'' - u = 0,$ هو

$$u_c(t) = c_1e^t + c_2e^{-t}.$$

ان الحل التجريبي يحتوي على الحد (A_1e^{-t}) وهو حل للمعادلة المتجانسة . نضرب الحل التجريبي بـ t لاختصار المسألة . وبالتالي فان الحل التجريبي هو :

$$u_p(t) = t(A_0t + A_1)e^{-t} = (A_0t^2 + A_1t)e^{-t}.$$

وبطريقة مشابهة ، فان الحل التجريبي للمعادلة التفاضلية :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\frac{du}{dt} + u = te^{-t}$$

يجب تحويره . وبهذا يكون حل المعادلة المتجانسة المقابلة هو :

$$u_c(t) = c_1e^{-t} + c_2te^{-t}.$$

الحل التجريبي من الجدول يجب ضربة بـ t^2 لاختصار حلول المعادلة المتجانسة .

B . تغيير الوسيطات VARIATION OF PARAMETERS

عموماً ، اذا كان بالامكان حل المعادلة التفاضلية المتجانسة ، فان المعادلة غير المتجانسة المقابلة لها يمكن حلها ايضاً ، وعلى الاقل بدلالة التكاملات .

1 . معادلات من الرتبة الاولى . First-Order Equations

نفرض ان $u_c(t)$ هو حل للمعادلة المتجانسة :

$$\frac{du}{dt} = k(t)u. \tag{5}$$

ولكي نجد الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة

$$\frac{du}{dt} = k(t)u + f(t) \tag{6}$$

نفرض ان $u_p(t) = v(t)u_c(t)$. ونعوض u_p بهذه الصيغة في المعادلة التفاضلية (6) لنحصل على :

$$\frac{dv}{dt}u_c + v\frac{du_c}{dt} = k(t)vu_c + f(t). \tag{7}$$

ولكن $u_c' = k(t)u_c$ ، لذلك فان احد الحدود من اليسار يحذف حداً من اليمين ، فنحصل على :

$$\frac{dv}{dt}u_c = f(t), \quad \text{or} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{f(t)}{u_c(t)}. \tag{8}$$

وهذه الاخيرة معادلة تفاضلية غير متجانسة ومن ابسط الانواع ، والتي يمكن حلها بدلالة $v(t)$ وذلك باخذ التكامل مرة واحدة .

مثال : باستخدام الطريقة السابقة ، سوف نحاول حل المعادلة المتجانسة :

$$\frac{du}{dt} = 5u + t$$

بالصيغة $u_p(t) = v(t) \cdot e^{5t}$ لان e^{5t} هو حل للمعادلة $u' = 5u$ وبتعويض الصيغة اعلاه لاجل u_p ، نجد ان :

$$\frac{dv}{dt} \cdot e^{5t} + v \cdot 5e^{5t} = 5ve^{5t} + t,$$

وبحذف $5ve^{5t}$ من الطرفين والتبسيط يكون ،

$$\frac{dv}{dt} = e^{-5t}t.$$

وباجراء التكامل لهذه المعادلة مرة واحدة (بطريقة التجزئة) ، نحصل على

$$v(t) = \left(-\frac{t}{5} - \frac{1}{25}\right)e^{-5t}$$

لذا يكون لدينا :

$$u_p(t) = v(t) \cdot e^{5t} = -\left(\frac{1}{5}t + \frac{1}{25}\right).$$

2 ـ معادلات من الرتبة الثانية Second-Order Equations

لكي نجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة من الرتبة الثانية

$$\frac{d^2u}{dt^2} + k(t)\frac{du}{dt} + p(t)u = f(t), \tag{9}$$

نحتاج لحلين مستقلين ، $u_1(t)$ و $u_2(t)$ ، للمعادلة المتجانسة لمقابلة لها :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + k(t)\frac{du}{dt} + p(t)u = 0. \tag{10}$$

ثم نفرض ان حلنا الخاص هو بالصيغة :

$$u_p(t) = v_1(t)u_1(t) + v_2(t)u_2(t) \qquad (11)$$

حيث ان v_1 و v_2 دالتين يجب ايجادهما . واذا عوضنا عن u_p بهذه الصيغة في المعادلة (9) فسوف نحصل على معادلة تفاضلية واحدة معقدة من الرتبة الثانية بدالتين مجهولتين . ومن الناحية الاخرى ، اذا فرضنا للطلب الاضافي

$$\frac{dv_1}{dt}u_1 + \frac{dv_2}{dt}u_2 = 0, \qquad (12)$$

نحصل على

$$u_p' = v_1'u_1 + v_2'u_2 + v_1u_1' + v_2u_2' = v_1u_1' + v_2u_2' \qquad (13)$$

$$u_p'' = v_1'u_1' + v_2'u_2' + v_1u_1'' + v_2u_2'', \qquad (14)$$

والمعادلة الناتجة من تعويض المعادلة (11) في المعادلة (9) تصبح

$$v_1'u_1' + v_2'u_2' + v_1(u_1'' + k(t)u_1' + p(t)u_1) + v_2(u_2'' + k(t)u_2' + p(t)u_2) = f(t).$$

وهذه يمكن تبسيطها اكثر : المضروبان v_1 و v_2 كلاهمايجب ان يساوي صفراً ، لان u_1 و u_2 يُحققان المعادلة المتجانسة (10) .

وبالتالي ، لم يبق لدينا سوى زوج من المعادلات الانية simultaneous

$$v_1'u_1 + v_2'u_2 = 0 \qquad (12)$$

$$v_1'u_1' + v_2'u_2' = f(t) \qquad (15)$$

وبالمجهولين v_1' و v_2' . فان محدد هذه المنظومة هو

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} = W(t), \qquad (16)$$

محدد ورنسكن لـ u_1 و u_2 . وبما ان هذه الحلول يجب ان تكون حلولاً مستقلة للمعادلة (10) ، فان محددورنسكن لا يساوي صفراً ، وبهذا يمكن ان نجد الحل لـ $v_1'(t)$ و $v_2'(t)$ ، وكذلك بالنسبة لـ v_1 و v_2 .

مثال : لكي نحل المعادلة غير المتجانسة

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u = \cos \omega t,$$

نفرض حلًا بالصيغة :

$$u_p(t) = v_1 \cos t + v_2 \sin t,$$

لان ، $\sin t$ و $\cos t$ حلان مستقلان للمعادلة المتجانسة المقابلة

$$u'' + u = 0 .$$

فرضية المعادلة (12) هي :

$$v_1' \cos t + v_2' \sin t = 0. \qquad (17)$$

هذه المعادلة ، مكافئة (equivalent) للمعادلة (15) ، وبهذا فان المعادلة التفاضلية تبسط الى

$$-v_1' \sin t + v_2' \cos t = \cos \omega t. \qquad (18)$$

الان ، نحل المعادلتين (17) و (18) آنياً لايجاد

$$v_1' = -\sin t \cos \omega t, \; v_2' = \cos t \cos \omega t. \qquad (19)$$

وبأخذ التكامل لهاتين المعادلتين نجد v_1 و v_2 وكذلك $u_p(t)$. واخيرا ، نلاحظ ان $v_1(t)$ و $v_2(t)$ يمكن ايجادهما من المعادلتين (12) و (15) بشكل عام :

$$v_1' = -\frac{u_2 f}{W}, \; v_2' = \frac{u_1 f}{W}. \qquad (20)$$

$$v_1(t) = \int_{t_0}^{t} -\frac{u_2(z)f(z)}{W(z)}dz, \quad v_2(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{u_1(z)f(z)}{W(z)}dz. \tag{21}$$

والحل الخاص يمكن كتابته بالشكل الاتي :

$$u_p(t) = u_1(t)\int_{t_0}^{t} -\frac{u_2(z)f(z)}{W(z)}dz + u_2(t)\int_{t_0}^{t} \frac{u_1(z)f(z)}{W(z)}dz.$$

وبالاضافة الى هذا ، فان العاملين $u_1(t)$ و $u_2(t)$ يمكن ان يكونا داخل تكاملات (والتي هي ليست بالنسبة لـ t) ، وهذه يمكن دمجها لكي نحصل على صيغة دقيقة ، وكما في ادناه .

مبرهنة 3 . ليكن $u_1(t)$ و $u_2(t)$ حلين مستقلين للمعادلة

$$\frac{d^2u}{dt^2} + k(t)\frac{du}{dt} + p(t)u = 0 \tag{H}$$

وباستخدام محدد ورنسكن $W(t) = u_1(t)u_2'(t) - u_2(t)u_1'(t).$
نجد ان :

$$u_p(t) = \int_{t_0}^{t} G(t,z)f(z)dz$$

هو حل خاص للمعادلة غير المتجانسة :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + k(t)\frac{du}{dt} + p(t)u = f(t), \tag{NH}$$

حيث ان G هي دالة كرين (*Green's function*) المعرفة بـ

$$G(t,z) = \frac{u_1(z)u_2(t) - u_2(z)u_1(t)}{W(t)}. \tag{22}$$

تمارين

في التمارين 1 ـ 10 ، جد الحل العام للمعادلات التفاضلية .

1. $\frac{du}{dt} + a(u - T) = 0$

2. $\frac{du}{dt} + au = e^{at}$

3. $\frac{du}{dt} + au = e^{-at}$

4. $\frac{d^2u}{dt^2} + u = \cos \omega t \quad (\omega \neq 1)$

5. $\frac{d^2u}{dt^2} + u = \cos t$

6. $\frac{d^2u}{dx^2} - \gamma^2(u - U) = 0$
(U, γ^2 are constants)

7. $\frac{d^2u}{dt^2} + 3\frac{du}{dt} + 2u = \cosh t$

8. $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{du}{dr}) = -1$

9. $\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}(\rho^2\frac{du}{d\rho}) = -1$

10. $\frac{d^2u}{dt^2} = -1$

11 . اذا كان $h(t)$ يمثل ارتفاع مظلي عن سطح الارض . واذا اعتبرنا القوى على جسمِهِ تؤدي الى مسألة قيمة الابتدائية لـ h .

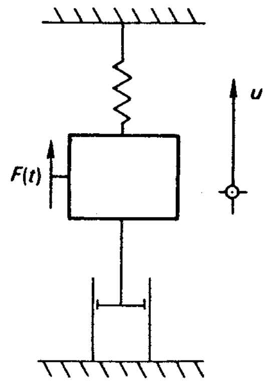
$$M\frac{d^2h}{dt^2} + K\frac{dh}{dt} = -Mg$$
$$h(0) = h_0, \frac{dh}{dt}(0) = 0.$$

(M = الكتلة ، ، g = التعجيل الارضي ، K = ثابت المظلة)
حل المسألة ، باخذ $g = 32$ قدم / ثا٢ و$K/M = 0.1$ ثانية

12 . توصف الازاحة $u(t)$ لكتلة في منظومة النابض الحلزوني المثبط بقوة خارجية (شكل 2 ـ 0) بمسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{d^2u}{dt^2} + b\frac{du}{dt} + \omega^2u = f_0 \cos \mu t,$$
$$u(0) = 0, \frac{du}{dt}(0) = 0.$$

(لاحظ التمرين 22 بند 1 . المعامل f_0 يتناسب مع سعة القوة الخارجية .)
حل المسألة لكل من الحالات الثلاث الآتية (i) $b = 0$ ، (ii) $b = 0$ ، $\mu = \omega$ ، (iii) $b > 0$.



شكل 2 ـ 0 : منظومة النابض الحلزوني المثبط مع القوة الخارجية

في التمارين 13 ـ 19 ، استخدم تغيير الوسيط لايجاد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية . تاكد من ان المعادلة التفاضلية هي بالصيغة الصحيحة :

13 . $\dfrac{du}{dt} + au = e^{-at};\ u_c(t) = e^{-at}$

14 . $t\dfrac{du}{dt} = -1;\ u_c(t) = 1$

15 . $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \tan x;\ y_1(x) = \cos x,\ y_2(x) = \sin x$

16 . $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \sin x;\ y_1(x) = \cos x,\ y_2(x) = \sin x$

17 . $\dfrac{d^2u}{dt^2} = -1;\ u_1(t) = 1,\ u_2(t) = t$

18 . $\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}(r\dfrac{du}{dr}) = -1;\ u_1(r) = 1,\ u_2(r) = \ln r$

19 . $t^2\dfrac{d^2u}{dt^2} + t\dfrac{du}{dt} - u = 1;\ u_1(t) = t,\ u_2(t) = 1/t$

في التمارين 20 ـ 22 ، استخدم المبرهنة (3) [illegible] الصيغة المبينة للحل الخاص للمعادلة التفاضلية .

20 .

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \gamma^2 u = f(t)$$

$$u_p(t) = \frac{1}{\gamma}\int_0^t \sin \gamma(t - z) f(z)dz$$

21 .

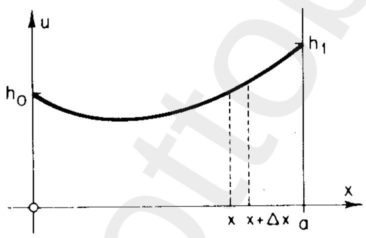
$$\frac{du}{dt} + au = f(t)$$

$$u_p(t) = \int_0^t e^{a(t-z)} f(z)dz$$

22 .

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \gamma^2 u = f(t)$$

$$u_p(t) = \frac{1}{\gamma}\int_0^t \sinh \gamma(t - z) f(z)dz$$



شكل (3 ـ 0) . السلك المعلق .

3 . مسائل القيم الحدودية (التخومية)

BOUNDARY VALUE PROBLEMS

مسألة القيم الحدودية ذات البعد الواحد هي معادلة تفاضلية اعتيادية مع الشروط التي تشمل قيم الحلول و (او) مشتقاتها في نقطتين او اكثر . ان عدد الشروط التي توضع تساوي رتبة المعادلة التفاضلية . عادة ، مسائل القيم الحدودية ذات العلاقة الفيزياوية لها هذه الميزات :

(1) الشروط المفروضة عند نقطتين مختلفتين و (2) الحل المطلوب هو الحل الذي يقع بين هاتين النقطتين فقط ؛ (3) المتغيرات المستقلة هي مسافة متغيرة والتي سوف نرمز لها بالرمز x . بالاضافة الى هذا ، سوف نركز على الحالات التي تكون فيها المعادلات التفاضلية خطية من الرتبة الثانية . ومن

الناحية الاخرى ، المسائل الخاصة بالمرونة (elasticity) تشمل معادلات من الرتبة الرابعة .

وعلى نقيض مسائل القيم الابتدائية ، وبنظرة ـ عامة فان ، مسائل القيم الحدودية يمكن ان يكون لها حل وحيد ، لا يوجد لها حل ، او ان لها عدد غير منتهِ من الحلول . وتمرين 1 يوضح هذه الحالات .

وعندما تكون المعادلة التفاضلية في مسألة القيم الحدودية لها حل عام معلوم ، نستخدم الشرطين الحدوديين لتجهيز المعادلتين اللتين يجب ان تتحققا بالثابتين في الحل العام . واذا كانت المعادلة التفاضلية خطية ، فان هاتين المعادلتين خطيتين ويمكن حلهما بسهولة ، اذا كان لهما حل .

وفيما تبقى من هذا البند فسوف نعالج بعض الامثلة الفيزياوية والتي تقترن بشكل طبيعي مع مسائل القيم الحدودية

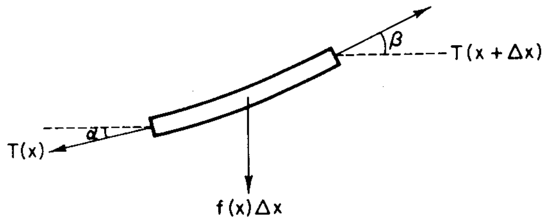
السلك المعلق : THE HANGING CABLE

سلك معلق بين عمودين ويحمل ثقلاً موزعاً ونريد ان نجد شكلهُ ، الذي يوصَفُ بواسطة ارتفاعه $u(x)$ فوق المستوي الافقي ، وكما موضح في الشكل (3ـ0) فإن المعادلة التفاضلية المطلوبة يمكن ايجادها باستخدام قانون نيوتن الثاني لقطعة في السلك بين x و$x + \Delta x$(شكل 4 ـ 0) . نفرض ان السلك مرن بشكل كامل ـ بحيث لا يدع مجالاً لمقاومة الانحناء . ونتائج هذه الفرضيات تبين ان قوى الشد المبذولة على القطعة في الشكل(4 ـ 0)تكون مماساً للسلك . ومجموع القوى في الاتجاهين العمودي والافقي تُعطى بهاتين المعادلتين

$$-T(x) \cos \alpha + T(x + \Delta x) \cos \beta = 0 \qquad (1)$$

$$-T(x) \sin \alpha + T(x + \Delta x) \sin \beta - f(x)\, \Delta x = 0. \qquad (2)$$

الطرف الايمن لكلتا المعادلتين يساوي صفراً لاننا فرضنا عدم وجود حركة ـ وبالتالي لا يوجد تعجيل ـ في اي اتجاه . وفي المعادلة الثانية ، نلاحظ ان $f(x)$ هو الثقل (قوة لكل وحدة طول) على قطعة السلك .



شكل (4 ـ 0) مقطع من السلك يبين القوة المؤثرة عليه .

و باعادة ترتيب المعادلة (1) نكتب :

$$T(x) \cos \alpha = T(x + \Delta x) \cos \beta$$

ثم نختار T للقيمة المشتركة لهذين التعبيرين . لذلك يمكن ايجاد قوى الشد :

$$T(x) = \frac{T}{\cos \alpha}, \quad T(x + \Delta x) = \frac{T}{\cos \beta}.$$

وبتعويض هذين التعبيرين في المعادلة (2) نحصل على

$$-T \tan \alpha + T \tan \beta = f(x) \Delta x.$$

الان ، $\tan \alpha$ هو ميل السلك في النقطة x ، اي ان $\tan \alpha = u'(x)$ ، وان $\tan \beta = u'(x + \Delta x)$ وبذلك يمكن اعادة كتابة المعادلة الاخيرة بالصيغة :

$$T(u'(x + \Delta x) - u'(x)) = f(x) \Delta x.$$

وبقسمة الطرفين على Δx نحصل على :

$$T \frac{u'(x + \Delta x) - u'(x)}{\Delta x} = f(x).$$

وباستخدام مفهوم الغايات (limit) ، عندما تقترب Δx من الصفر ، فإن حاصل قسمة الفرق في الطرف الايسر يصبح المشتقة الثانية لـ u . وتكون النتيجة المعادلة :

$$T \frac{d^2u}{dx^2} = f(x), \qquad (3)$$

والتي تتحقق لكل x ، في المدى $0 < x < a$ حيث يوجد السلك بالاضافة الى هذا "$u(x)$"

$$u(0) = h_0, \quad u(a) = h_1. \tag{4}$$

اما الثقل $f(x)$ ، فسوف نفرض اولاً ان السلك يعلق تحت تأثير وزنهِ وهو w من وحدات الوزن لكل وحدة طول من السلك .

عندئذ في المعادلة (2) نضع :

$$f(x)\,\Delta x = w\,\frac{\Delta s}{\Delta x}\,\Delta x$$

حيث s تمثل طول القوس حول السلك . وباستخدام مفهوم الغاية . عندما تقترب Δx من الصفر فان : $\Delta s/\Delta x$ لها غاية

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2}.$$

لذلك ، وباستخدام هذه الفرضيات ، فإن مسألة القيم الحدودية التي تحدد شكل السلك هي

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{w}{T}\sqrt{1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2}, \quad 0 < x < a \tag{5}$$

$$u(0) = h_0, \quad u(a) = h_1. \tag{6}$$

ومن الجدير بالملاحظة ان هذه المعادلة التفاضلية ليست خطية .

وهناك حالة اخرى تظهر عندما توزع دعائم السلك الثقل بانتظام في الاتجاه الافقي ، كما في الصيغة .

$$f(x)\,\Delta x = w\,\Delta x.$$

وهذا صحيح تقريباً في حالة الجسر المعلق . عندئذ تكون مسألة القيم الحدودية التي يجب حلها ، هي :

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{w}{T}, \quad 0 < x < a$$
$$u(0) = h_0, \quad u(a) = h_1. \tag{7}$$

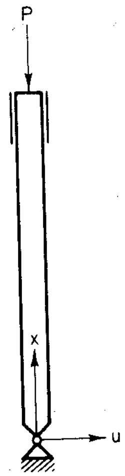
وخطوات الحل هي :

(1) نجد الحل العام للمعادلة التفاضلية ، والتي تحتوي على ثابتين اختياريين .
(2) تحقق شروط الحدودية وذلك باختيار الثابتين بشكل ملائم . ان حل المسألة اعلاه هو :

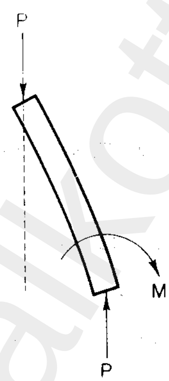
$$u(x) = \frac{w}{2T}(x^2 - ax) + \frac{h_1 - h_0}{a}x + h_0. \tag{8}$$

التواء العمود
BUCKLING OF A COLUMN

اذا كان لدينا عمود طويل ورفيع ويوجد عند قاعدتهُ مفصل يؤثر عليه ثقل عمودي كما مبين في الشكل (5 ـ 0) والنهاية العليا من العمود يمكن ان تتحرك للاعلى والاسفل وليس على الجوانب . نفرض ان ازاحة العمود في الاتجاه الشاقولي هي $u(x)$. واذا قطع العمود في اي نقطة مثل x ، القوة العليا P ، والعزم (moment) باتجاه حركة عقرب الساعة $Pu(x)$ ويؤثر على الجزء العلوي لكي يحافظ على التوازن ، لاحظ الشكل(6 ـ 0) . هذه القوة والعزم يجب ان نحصل عليها من الجزء السفلي من العمود .



شكل (5 ــ 0) . عمود يحمل ثقل .



شكل (6 ــ 0) . مقطع من العمود يبين القوى والعزوم .

من المعروف ان عزم الانحناء الداخلي **(internal bending moment)** (موجب عندما يكون عكس حركة عقرب الساعة) في العمود يعطى بالجداء :

$$EI \frac{d^2u}{dx^2}$$

حيث ان E هي معامل يونك (Young's modulus) و I هو عزم القصور الذاتي لمساحة المقطع العرضي . ($I = b^4/12$) للعمود الذي مقطعه العرضي هو مربع طوله ضلعه b.)

وبمساواة العزم الخارجي مع العزم الداخلي نحصل على المعادلة التفاضلية .

$$EI\frac{d^2u}{dx^2} = -Pu, \quad 0 < x < a \tag{9}$$

وهذه المعادلة مع الشروط الحدودية

$$u(0) = 0, \quad u(a) = 0, \tag{10}$$

تحدد الدالة $u(x)$.

ولكي ندرس هذه المسألة بشكل ملائم ، نضع :

$$\frac{P}{EI} = \lambda^2,$$

لذلك ، فان المعادلة التفاضلية تصبح :

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda^2 u = 0, \quad 0 < x < a. \tag{11}$$

الان ، الحل العام للمعادلة التفاضلية هو

$$u(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x.$$

ولكن $u(0) = 0$ ، لذلك يجب ان نختار $c_1 = 0$ وبهذا تصبح $u(x) = c_2 \sin \lambda x$. والشرط الحدودي الثاني يتطلب ان يكون

$$u(a) = c_2 \sin \lambda a = 0$$

واذا كان $\sin \lambda a \neq 0$ فالاحتمال الوحيد هو $c_2 = 0$. وفي هذه الحالة نجد ان الحل هو :

$$u(x) \equiv 0, \quad 0 < x < a.$$

فيزياوياً ، يعني هذا ان العمود يبقى مستقيماً ويحول الثقل على المسند ، كما كان متوقعاً ان يتم .

وفي بعض الاحيان تحدث اشياء مختلفة اذا كان $\sin \lambda a = 0$ ، لأن اي اختيار لـ c_2 يعطي الحل المطلوب . الظاهرة الفيزياوية لهذه الحالة هي ان العمود ياخذ شكلاً منحنياً ويمكن ان ينهار ، او يلتوي تحت الثقل المحوري (axial load) . ورياضياً ، فان الشرط $\sin \lambda a = 0$ يعني ان λa هو عدد صحيح مضروب في π ، لان $\sin \pi = 0$ و $\sin 2\pi = 0$ .. الخ . وان الاعداد الصحيحة المضروبة في π هي القيم الوحيدة التي تجعل الجيب يساوي صفراً . المعادلة $\lambda a = \pi$ بدلالة الوسيط الاصلي ، هي

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}\, a = \pi.$$

ومن المفيد ان نفكر في a و I و E على انها كميات معلومة ، لذلك فان القوة :

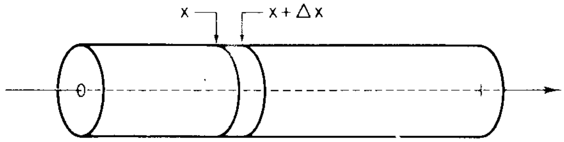
$$P = EI\left(\frac{\pi}{a}\right)^2,$$

وتسمى الثقل الحرج (critical load) أو ثقل اويلر (Euler load) والتي تسبب الالتواء وأعلى الاثقال الحرجة تقابل $\lambda a = 2\pi$ و $\lambda a = 3\pi$ ... الخ ، وهي غير مستقرة وليس لها قيمة من الناحية الفيزياوية لمثل تلك المسائل .

التوصيل الحراري : CONDUCTION OF HEAT

اذا كان لدينا قضيب طويل منتظم الشكل ومقطعه العرضي موصل للحرارة من خلال اتجاهه المحوري . (لاحظ الشكل 7 ـ 0) .

نفرض ان درجة حرارة القضيب ، $u(x)$ ، لا تتغير مع الزمن . والتوازن الحراري (« الحرارة المفقودة تساوي الحرارة المكتسبة ») على شريحة من القضيب

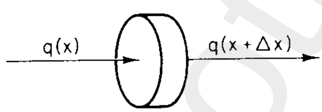


شكل (7 ـ 0) اسطوانة من مادة ذات توصيل حراري

بين x و$x + \Delta x$ (شكل 8 ـ 0) تبين ان معدل سريان الحرارة q ، يقاس بالوحدات الحرارية لكل وحدة زمن ولكل وحدة مساحة ، وتخضع للمعادلة :

$$q(x)A + g(x)A\,\Delta x = q(x + \Delta x)A \qquad (12)$$

حيث A هي مساحة المقطع العرضي وان g تمثل معدل الحرارة المكتسبة بوسائل اخرى عن التوصيل خلال السطحين .



شكل (8 ـ 0) مقطع من اسطوانة ذات توصيل حراري يبين سريان الحرارة

فمثلاً ، اذا كانت الحرارة المتولدة في الشريحة بواسطة تيار كهربائي I ، فسوف نحصل على

$$g(x)A\,\Delta x = \theta I^2 R\,\Delta x \qquad (13)$$

حيث R هي مقاومة (resistance) والقضيب لكل وحدة طول و θ هي عامل التحويل (factor of conversion) من وحدات الطاقة الكهربائية الى وحدات الحرارة فمثلاً $\theta = 860$ سعرة / واط ـ ساعة . واذا فقدت الحرارة من خلال السطح الاسطواني (cylindrical surface) للقضيب بالحمل الى الوسط المحيط بدرجة حرارة T ، فان $g(x)$ سوف تعطى بموجب « قانون نيوتن في التبريد » .

$$g(x)A\,\Delta x = -h(u(x) - T)C\,\Delta x, \tag{14}$$

حيث C تمثل محيط القضيب و h معامل التوصيل الحراري .

(ظهرت الاشارة السالبة هنا لانه ، اذا كان $u(x) > T$ فان القضيب يفقد الحرارة المعادلة (12) يمكن ان تُحور جبرياً لتصبح

$$\frac{q(x + \Delta x) - q(x)}{\Delta x} = g(x),$$

وباستخدام تطبيقات الغاية نحصل على :

$$\frac{dq}{dx} = g(x). \tag{15}$$

من الملاحظ ان الدالة المجهولة $u(x)$ لم تظهر في المعادلة (15) . من الناحية الاخرى ، فان القانون المعروف والذي يسمى بقانون التجربة (experimental law) او قانون فوريه (Fourier's law) ينص على ان معدل سريان الحرارة خلال وحدة مساحة من مادة يتناسب طردياً مع فرق الحرارة ؛ ويتناسب عكسياً مع السمك . وفي مفهوم الغاية ، فان هذا القانون يأخذ الصيغة :

$$q = -\kappa\frac{du}{dx}, \tag{16}$$

لاشارة السالبة توضح الحقيقة ان الحرارة تنتقل من المنطقة الحارة الى الباردة . ومن المعادلتين (15) و (16) نحصل على المعادلة التفاضلية

$$-\kappa\frac{d^2u}{dx^2} = g(x), \quad 0 < x < a, \tag{17}$$

حيث a تمثل طول القضيب ، وان التوصيلية (κ conductivity) فرضت انها ثابتة .

واذا كانت نهايتا القضيب لهما درجة حرارة ثابتة ، فان الشرط الحدودي على u سيكون :

$$u(0) = T_0, \quad u(a) = T_1. \tag{18}$$

من الناحية الاخرى ، اذا تم تزويد الحرارة عند $x = 0$ (بواسطة مِلف حراري "heating coil" ، مثلاً) ، فالشرط الحدودي سوف يكون

$$-\kappa A \frac{du}{dx}(0) = H, \qquad (19)$$

حيث H تقاس بوحدات الحرارة لكل وحدة زمن :
وكمثال على هذا ، نحل المسألة

$$-\kappa \frac{d^2u}{dx^2} = -hu(x)\frac{C}{A}, \quad 0 < x < a \qquad (20)$$

$$u(0) = T_0, \quad u(a) = T_0. \qquad (21)$$

(فيزياوياً ، القضيب يفقد حرارة للوسط المحيط بِهِ بدرجة حرارة صفر ، بينما تبقى نهايتاه بنفس درجة الحرارة T_0 .) اذا وضعنا $\mu^2 = hC/\kappa A$ ، فان المعادلة التفاضلية تصبح :

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \mu^2 u = 0, \quad 0 < x < a,$$

وحلها العام هو :

$$u(x) = c_1 \cosh \mu x + c_2 \sinh \mu x.$$

وكتطبيق على الشرط الحدودي عند $x = 0$ يُعطي $c_1 = T_0$ ، والشرط الحدودي الثاني يتطلب

$$u(a) = T_0 = T_0 \cosh \mu a + c_2 \sinh \mu a.$$

وبالتالي ، فان :

$$c_2 = T_0(1 - \cosh \mu a)/\sinh \mu a$$

و

$$u(x) = T_0\left(\cosh \mu x + \frac{1 - \cosh \mu a}{\sinh \mu a} \sinh \mu x\right).$$

تمارين

1 . في مسائل القيم الحدودية الثلاث الآتية ، احداهما ليس لهُا حل ، والاخرى لها حل وحيد ، والثالثة يوجد لها عدد غير منتهِ من الحلول . بين اي من الحالات الثلاث تتحقق لكل مما يأتي :

. a. $$\frac{d^2u}{dx^2} + u = 0, u(0) = 0, u(\pi) = 0$$

. b $$\frac{d^2u}{dx^2} + u = 1, u(0) = 0, u(1) = 0$$

. c $$\frac{d^2u}{dx^2} + u = 0, u(0) = 0, u(\pi) = 1$$

2 . جد ثقل التواء اويلر لعمود فولاذي لهُ مقطع عرضي مستطيل بعداهُ 2 انج × 3 انج . علماً ان $E = 30 \times 10^6$ باوند / انج^2 ، $I = 2$ انج^2 ، $a = 10$ قدم .

3 . جد جميع قيم الوسيط λ بحيث تكون مسألة القيم الحدودية المتجانسة لها حل غير الحل $u(x) \equiv 0$.

. a $$\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda^2 u = 0, u(0) = 0, \frac{du}{dx}(a) = 0$$

. b $$\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda^2 u = 0, \frac{du}{dx}(0) = 0, u(a) = 0$$

. c $$\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda^2 u = 0, \frac{du}{dx}(0) = 0, \frac{du}{dx}(a) = 0$$

4 . اثبت ، باستخدام المشتقات ؛ ثم التعويض ، ان :

$$u(x) = c' + \frac{1}{\mu} \cosh \mu(x + c)$$

هو الحل العام للمعادلة التفاضلية (5) . (هنا $\mu = w/T$.) . ان مخطط (بيان) $u(x)$ يسمى منحني السلسلة (‘ catenary ’) .

5 . جد قيم c و c' بحيث تكون الدالة $u(x)$ في تمرين 4 تحقق الشروط .

$$u(0) = h, \quad u(a) = h.$$

6 . عارضة مثبتة من نهايتها وتحمل ثقلاً جانبياً موزعاً بكثافة منتظمة w (قوة / طول) وثقل شد محوري T (قوة / طول^٢) . الازاحة $u(x)$ لمركز الخط تحقق مسألة القيم الحدودية ادناه . جد $u(x)$.

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{T}{EI}u = -\frac{w}{EI}\frac{Lx - x^2}{2}, \; 0 < x < L$$

$$u(0) = 0, \; u(L) = 0.$$

7 . اذا كانت درجة الحرارة $u(x)$ في انبوب (ذراع) تبريد (cooling fin) تحقق المعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{hC}{\kappa A}(u - T). \quad 0 < x < a$$

والشروط الحدودية

$$u(0) = T_0, \quad -\kappa\frac{du}{dx}(a) = h(u(a) - T).$$

اي ان ، درجة الحرارة في النهاية اليسرى تبقى عند $T < T_0$ ، بينما يكون سطح القضيب وجهته اليمنى تتبادل الحرارة مع الوسط المحيط بدرجة حرارة T . جد $u(x)$.

8 . احسب الغاية لـ $u(x)$ عندما تقترب a الى اللانهاية . حيث $u(x)$ حل للمسألة في تمرين 7 . فهل ان النتيجة مقبولة فيزياوياً ؟

9 . في عنصر حراري كهربائي ، درجة الحرارة تحقق مسألة القيم الحدودية .

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{hC}{\kappa A}(u - T) - \theta\frac{I^2R}{\kappa A}, \quad 0 < x < a$$

$$u(0) = T, \quad u(a) = T.$$

جد $u(x)$

10 . بين ان حل المسألة المعطاة في المعادلتين (20) و (21) يمكن كتابتها بالشكل

$$u(x) = T_0 \frac{\cosh \mu(x - \frac{1}{2}a)}{\cosh(\mu a/2)}.$$

4 . مسائل القيم الحدودية الشاذة :

SINGULAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS

يحدث في بعض الاحيان ان تكون المعادلة التفاضلية في مسائل القيم الحدودية لها نقطة شاذة (singular point) عند احد الحدود (التخوم) . تذكر ان النقطة x_0 هي نقطة شاذة منتظمة (regular) للمعادلة التفاضلية :

$$u'' + k(x)u' + p(x)u = f(x)$$

اذا كان كلاً من :

$$(x - x_0)k(x), \quad (x - x_0)^2 p(x)$$

له مفكوك سلسلة تايلر حول المركز x_0 ، في حين ان $k(x)$ ، او $p(x)$ ، او كلاهما يصبح غير منتهٍ عند x_0 .

فمثلاً النقطة $x_0 = 1$ هي نقطة شاذة منتظمة للمعادلة التفاضلية

$$(1 - x)u'' + u' + xu = 0,$$

لان كلاً من

$$k(x) = \frac{1}{1 - x} \quad \text{and} \quad p(x) = \frac{x}{1 - x}$$

يصبح غير منتهٍ عند $x = 1$ ، في حين ان كلاً من $(x - 1)k(x)$ و $(x - 1)^2 p(x)$ لهما مفكوك سلسلة تايلر حول المركز $x = 1$. والمثال الملائم الآخر هو معادلة كوشي ـ اويلر في بند 1 ، التي لها نقطة شاذة عند نقطة الاصل .

ويظهر هذا الوضع عندما تكون النقطة الحدودية (boundary point) هي حدودية رياضية (mathematical boundary) وليست حدودية فيزياوية

(physical boundary) . فمثلاً ، القرص الدائري الذي نصف قطره c يمكن ان يوصف بالاحداثيات القطبية (r, θ) والذي يشغل المنطقة $0 \le r \le c$. ان نقطة الاصل ، عند $r = 0$، هي حدودية رياضية ، ومن الناحية الفيزياوية هذه النقطة تكون داخل القرص .

في حالة النقطة الشاذة ، لا نستطيع تحديد قيمة $u(x_0)$ ، التي هي حل للمعادلة التفاضلية او لمشتقتها . ومن الناحية الاخرى ، فمن الضروري ان تكون كلاً من $u(x_0)$ و $u'(x_0)$ منتهية ، او مقيدة . وعادة نحتاج ان يكون الحل ومشتقته منتهِ في كل نقطة من نقاط الفترة التي نحل فيها المعادلة التفاضلية . وعندما تكون النقطة الشاذة نقطة حدودية في الفترة ، نقوم بفرض شرط ضمني (condition explicitly) . في المثال الآتي سوف نلاحظ كيف ان تلك الشروط تعمل لكي تجعل الحل في مسألة القيم الحدودية وحيداً .

سريان الحرارة الشعاعية : Radial Heat Flow

نفرض ان لدينا قضيب اسطواني طويل ، محاط بوسط درجة حرارتِهِ T ، ويحمل تياراً كهربائياً . فإذا كان سريان الحرارة في الاتجاه الشعاعي اكبر من سرعتها في الاتجاه المحوري ، فإن درجة الحرارة $u(r)$ في القضيب يمكن ان توصف بالمسألة :

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = -H, \quad 0 \le r < c, \tag{1}$$

$$u(c) = T. \tag{2}$$

حيث c تمثل نصف قطر القضيب ، r الاحداثي القطبي و H (ثابت) يتناسب مع القوة الكهربائية التي تتحول الى حرارة .

في هذه المسألة ، الشرط الفيزياوي الحدودي فقط يكون معروفاً .

الشرط الحدودي الرياضي $r = 0$ يكون نقطة شاذة ، وكما هو واضح من المعادلة التفاضلية التي هي بالصيغة

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} = -H.$$

وبالتالي ، فإن هذه النقطة تحتاج ان يكون u و du/dr منتهيان .

(3) $u(0), u'(0)$ منتهيان .

نلاحظ الآن ، ان من السهولة حل المعادلة التفاضلية (1) . اذا ضربنا المعادلة بـ r واخذنا التكامل مرة واحدة لكي نجد :

$$r\frac{du}{dr} = -H\frac{r^2}{2} + c_1.$$

واذا قسمنا المعادلة على r واخذنا التكامل مرة اخرى نجد

$$u(r) = -H\frac{r^2}{4} + c_1 \ln r + c_2.$$

وبتطبيق الشرط الخاص ، وهو ان $u(0)$ و $u'(0)$ منتهيان ، نستدل مباشرة ان $c_1 = 0$ وان $\ln r$ ومشتقته $1/r$ يصبحان غير منتهيين عندما تقترب r من الصفر .

ومن الشرط الحدودي الفيزياوي ، معادلة (2) ، يكون :

$$u(c) = -H\frac{c^2}{4} + c_2 = T.$$

لذلك فإن $c_2 = Hc^2/4 + T$ وان الحل الكامل هو

$$u(r) = H\frac{(c^2 - r^2)}{4} + T. \qquad (4)$$

من هذا المثال ، يتضح ان شرط الحدودية « المصطنع » ، هو تقييد $u(r)$ في النقطة الشاذة $r = 0$ يعمل بطريقة تماماً كما يعمل شرط الحدودية الاعتيادية نفسه عند نقطة اعتيادية (ليست شاذة) وهو يعطي شرطاً واحداً يتحقق بالثابتين المجهولين c_1 و c_2 واللذين يتعينان بصورة كاملة بالشرط الحدودي الثاني .

هناك نوع آخر من مسألة القيم الحدودية الشاذة وهي التي تكون فيها الفترة غير منتهية . (هذه بالطبع حالة رياضية مجردة ولا يمكن تصورها فيزياوياً) . فمثلاً ، الفترة $0 < x < \infty$ ، تسمى في بعض الاحيان فترة غير منتهية

(*semi-infinite*). لان لها نقطة نهاية واحدة منتهية ، والشرط الحدودي يأخذ عادة $x = 0$. وفي « النهاية » الاخرى سوف لن نفرض اي شرط حدودي ، لانه لا توجد حدود . ولكن عادة نعتبر ان كلًا من $u(x)$ و $u'(x)$ تبقى مقيدة (bounded). عندما تزداد x . بصيغة ادق ، ونحتاج لوجود ثابتين M و M' بحيث :

$$|u(x)| \leq M \quad \text{and} \quad |u'(x)| \leq M'$$

يتحققان لكل قيم x ، بغض النظر عن كبرها . ولن نتمكن من تعيين M و M' ، والشرط الكلي يكتب عادة بالشكل الآتي :

$u(x)$ و $u'(x)$ مقيدان عندما $x \to \infty$.

انبوب (ذراع) تبريد : COOLING FIN

انبوب تبريد طويل احدى نهايتيه لها درجة حرارة ثابتة T_0 وتتبادل الحرارة مع الوسط بدرجة حرارة T خلال التحويل . اذا كانت درجة حرارة الانبوب $u(x)$ ، تحقق

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{hC}{\kappa A}(u - T), \quad 0 < x \tag{5}$$

$$u(0) = T_0 \tag{6}$$

(لاحظ بند 3) . وحيث ان المسألة تتخذ وضعاً في فترة شبه ـ غير منتهية (لان الانبوب طويل جداً وربما ، نجهل ما يمكن حدوثه في النهاية الاخرى من الناحية الفيزياوية) ، يجب علينا ايضاً ان نضع الشرط .

(7) ـــ $u(x), u'(x)$ مقيدة عندما $x \to \infty$.

الآن ، الحل العام للمعادلة التفاضلية (5) هو

$$u(x) = T + c_1 \cosh \mu x + c_2 \sinh \mu x,$$

حيث $\sqrt{\frac{hC}{\kappa A}} = \mu$. الشرط الحدودي عند $x=0$ يحتاج

$$u(0) = T + c_1 = T_0.$$

ان شرط التقييد ، معادلة (7) ، يتطلب

$$c_2 = -c_1.$$

وسبب هذا يعود الى انه لكل التراكيب الخطية لـ $\cosh$ ، $\sinh$ ، فان الوحيد الذي يكون مقيداً عندما $x \to \infty$ هو

$$\cosh \mu x - \sinh \mu x = e^{-\mu x}.$$

من السهولة ايجاد الحل النهائي وهو .

$$u(x) = T + (T_0 - T)(\cosh \mu x - \sinh \mu x).$$

وتحقيق شرط التقييد سوف يكون اسهل ، عندما نعبر عن الحل العام للمعادلة التفاضلية (5) بالصيغة

$$u(x) = T + c_1' e^{\mu x} + c_2' e^{-\mu x}.$$

ويمكن ان نلاحظ مباشرة ان اختيارنا لـ $c_1' = 0$ هو السبيل الوحيد لكي يتحقق شرط التقييد . واخيراً نلخص الملاحظات كقاعدة : حل المعادلة

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \mu^2 u = 0$$

في الفترة I يعبر عنه بصورة جيدة كالآتي :

$$u(x) = \begin{cases} c_1 \cosh \mu x + c_2 \sinh \mu x, & \text{اذا كانت } I \text{ منتهية} \\ c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x}, & \text{اذا كانت } I \text{ غير منتهية} \end{cases}$$

تمارين

1 . ضع كل من المعادلات الاتية بالصيغة

$$u'' + ku' + pu = f$$

ثم عين النقاط الشاذة

a. $$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = u$$

b. $$\frac{d}{dx}\left((1 - x^2)\frac{du}{dx}\right) = 0$$

c. $$\frac{d}{d\phi}\left(\sin \phi \frac{du}{d\phi}\right) = \sin \phi \, u$$

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{du}{d\rho}\right) = -\lambda^2 u \qquad d)$$

2 . اذا كانت درجة الحرارة u في جسم كبير له فتحة نصف قطرها c في الوسط ، يمكن ان تخضع للمعادلات :

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = 0, \quad r > c$$

$$u(c) = T.$$

حل المسألة ، واضف شرط التقييد المناسب .

3 . كريبتون متراص يولد حرارة بمعدل H سعرة / ثانية سم³ . اذا كانت كرة (قطرها c) من نفس المادة تنتقل الحرارة وذلك بتحويلها الى درجة حرارة الوسط المحيط T, فان درجة الحرارة $u(\rho)$ في الكرة تحقق مسألة القيم الحدودية :

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{du}{d\rho}\right) = \frac{-H}{\kappa}, \quad 0 < \rho < c$$

$$-\kappa\frac{du}{d\rho}(c) = h(u(c) - T).$$

اعط شرط التقييد الفعلي ثم حل : ما هي درجة الحرارة في مركز الكرة ؟

4 . نضف قطر حرج (Critical radius) . تدفق النيوترونات في كرة من اليورانيوم يخضع للمعادلة التفاضلية

$$\frac{\lambda}{3}\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{du}{d\rho}\right) + (k-1)Au = 0$$

في المدى $0 < \rho < a$, حيث ان λ هي المسافة الفعالة التي يسلكها النيوترون بين التصادمات ، يقال لـ A بانها امتصاص (absorption) المقطع العرضي ، k هي عدد النيوترونات التي تنتج من التصادمات خلال الانشطار النووي . بالاضافة الى هذا ، تدفق النيوترونات على حدودية الكرة يساوي صفراً . ضع $u = v/\rho$ ، $3(k-1)A/\lambda = \mu^2$, وعين المعادلة التفاضلية التي تتحقق بـ $v(\rho)$.

5 . حل المعادلة في التمرين 4 ثم جد $u(\rho)$ التي تحقق مسألة القيم الحدودية (مع شرط التقييد) المعطاة في تمرين 4 . في اي نصف قطر a يكون الحل لا يساوي صفراً ؟ .

5 . دوال كرين **Green's Functions**

من اهم مميزات مسألة القيم الحدودية*

$$\frac{d^2u}{dx^2} + k(x)\frac{du}{dx} + p(x)u = f(x), \quad l < x < r \tag{1}$$

$$\alpha u(l) - \alpha' u'(l) = 0 \tag{2}$$

$$\beta u(r) + \beta' u'(r) = 0 \tag{3}$$

ويمكن تبسيطها باستخدام حل تغيير ـ الوسيط للمعادلة التفاضلية (1) ، كما هو مبينه في بند ـ 2 . لكي نبدأ ، نحتاج لحلين مستقلين من المعادلة المتجانسة .

$$\frac{d^2u}{dx^2} + k(x)\frac{du}{dx} + p(x)u = 0, \quad l < x < r. \tag{4}$$

دعنا نرمز لهذين الحلين بـ $u_2(x)$. ، $u_1(x)$. ويمكن تبسيطهما جبرياً اذا اعتبرنا ان u_1 تحقق الشرط الحدودي عند $x = l$ ، u_2 عند $x = r$;

$$\alpha u_1(l) - \alpha' u_1'(l) = 0, \tag{5}$$

$$\beta u_2(r) + \beta' u_2'(r) = 0. \tag{6}$$

حسب المبرهنة ـ 3 بند ـ 2 ، الحل العام للمعادلة التفاضلية (1) يمكن كتابته بالشكل

$$u(x) = c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + \int_l^x (u_1(z)u_2(x) - u_2(z)u_1(x))\frac{f(z)}{W(z)}dz. \tag{7}$$

*** الرمز « / » على الثابتين α', β' لاتعني رمز المشتقة ، بالطبع ، ولكنها تبين انهما معاملات المشتقات .**

تذكر ان في مقام التكاملية ، يمكن الحصول على محدد ورنسكن لـ u_2, u_1.

$$W(z) = \begin{vmatrix} u_1(z) & u_2(z) \\ u_1'(z) & u_2'(z) \end{vmatrix}, \tag{8}$$

الذي لايساوي صفراً ، لأن u_1 ، u_2 مستقلتان . وسوف نحتاج ان نعرف المشتقة الاتية للدالة في المعادلة 7 :

$$\frac{du}{dx} = c_1u_1'(x) + c_2u_2'(x) + \int_l^x (u_1(z)u_2'(x) - u_2(z)u_1'(x))\frac{f(z)}{W(z)}dz.$$

(لاحظ قانون ليبيز (Leibniz's rule) في ملحق الكتاب)

الان ، دعنا نطبق الشرط الحدودي ، معادلة (2) ، على الحل العام $u(x)$.

اولاً ، عند $x = l$ نحصل على

$$\alpha u(l) - \alpha' u'(l) = c_1(\alpha u_1(l) - \alpha' u_1'(l)) + c_2(\alpha u_2(l) - \alpha' u_2'(l)) = 0. \tag{9}$$

لاحظ ان التكاملات في u ، u' كلاهما يساوي صفراً عند $x = l$. وبسبب ان الشرط الحدودي (5) مفروض على u_1 ، فان المعادلة (9) تبسط الى

$$c_2(\alpha u_2(l) - \alpha' u_2'(l)) = 0, \tag{10}$$

ومن هذا نستنتج ان $c_2 = 0$.

ثانياً ، الشرط الحدودي عند $x = r$ يصبح

$$\beta u(r) + \beta' u'(r) = c_1(\beta u_1(r) + \beta' u'(r)) + \int_l^r [u_1(z)\,(\beta u_2(r) + \beta' u_2'(r)) - u_2(z)\,(\beta u_1(r) + \beta' u_1'(r))]\frac{f(z)}{W(z)}dz = 0. \tag{11}$$

الآن ، الشرط الحدودي (6) على u_2 عند $x = r$ يحذف حداً واحداً من التكاملية ، فيبقى

$$c_1(\beta u_1(r) + \beta' u_1'(r)) - \int_l^r u_2(z)\,(\beta u_1(r) + \beta' u_1'(r))\frac{f(z)}{W(z)}dz = 0 \qquad (12)$$

ان العامل المشترك لـ $\beta u_1(r) + \beta' u_1'(r)$ يمكن حذفه من كلا الحدين ، وبذلك نجد :

$$c_1 = \int_l^r u_2(z)\frac{f(z)}{W(z)}dz. \qquad (13)$$

الان وجدنا c_1 ، c_2 بحيث $u(x)$ في المعادلة (7) تحقق الشرطين الحدوديين . واذا استخدمنا قيم c_1 ، c_2 التي وجدناها ، نحصل على

$$u(x) = u_1(x)\int_l^r u_2(z)\frac{f(z)}{W(z)}dz + \int_l^x (u_1(z)u_2(x) - u_2(z)u_1(x))\frac{f(z)}{W(z)}dz. \qquad (14)$$

يصبح الحل اكثر تراصاً اذا جزءنا فترة التكامل عند x في التكامل الاول ، وجعلها

$$\int_l^r u_2(z)\frac{f(z)}{W(z)}dz = \int_l^x u_2(z)\frac{f(z)}{W(z)}dz + \int_x^r u_2(z)\frac{f(z)}{W(z)}dz. \qquad (15)$$

وعندما ندمج التكاملات في المدى l الى x ، وملاحظة وجود بعض الحذف ، عندئذ فان حلنا يصبح

$$u(x) = \int_l^x u_1(z)u_2(x)\frac{f(z)}{W(z)}dz + \int_x^r u_1(x)u_2(z)\frac{f(z)}{W(z)}dz. \qquad (16)$$

$$G(x,z) = \begin{cases} \dfrac{u_1(z)u_2(x)}{W(z)}, & l < z \le x, \\ \dfrac{u_1(x)u_2(z)}{W(z)}, & x \le z < r, \end{cases} \qquad (17)$$

واخيرا ، فان هذين التكاملين يمكن دمجها الى تكامل واحد نعرف اولاً دالة كرين للمسائل (1) و (2) و (3) بانها

وبالتالي ، فان الصيغة اعلاه بدلالة u تبسط الى

$$u(x) = \int_l^r G(x,z)f(z)dz. \qquad (18)$$

مثال : نحل المسألة المذكورة ادناه بواسطة بناء دالة كرين

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u = -1, \quad 0 < x < 1$$

$$u(0) = 0, \; u(1) = 0.$$

اولاً ، يجب ان نجد حلين مستقلين للمعادلة التفاضلية المتجانسة $u''-u = 0$ يحققان الشروط الحدودية كما هو مطلوب . الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة هو

$$u(x) = c_1 \cosh x + c_2 \sinh x.$$

وبما ان $u_1(x)$ تحتاج ان نحقق الشرط في الطرف الايسر ، $u_1(0) = 0$ نأخذ $c_1 = 0, c_2 = 1$ ونستنتج $u_1(x) = \sinh x$. الحل الثاني يجب ان يحقق $u_2(1) = 0$. ويمكن ان نأخذ

$$u_2(x) = \sinh 1 \cosh x - \cosh 1 \sinh x = \sinh(1 - x).$$

من الواضح ان محدد ورنسكن للحلين هو

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sinh x & \sinh(1 - x) \\ \cosh x & -\cosh(1 - x) \end{vmatrix} = -\sinh 1.$$

الآن ، من المعادلة (17) ، دالة كرين للمسألة تصبح

$$G(x,z) = \begin{cases} \dfrac{\sinh z \sinh(1 - x)}{-\sinh 1}, & 0 < z \le x \\[2ex] \dfrac{\sinh x \sinh(1 - z)}{-\sinh 1}, & x \le z < 1 \end{cases}$$

وعلاوة على ذلك ، بما ان $f(x) = -1$ فان الحل ، من المعادلة (18) ، هو التكامل :

$$u(x) = \int_0^1 -G(x,z)dz.$$

ولكي نجري التكامل ، يجب ان نجزىء فترة التكامل عند x ، وذلك بالرجوع فعليا الى المعادلة (16) ، تكون النتيجة :

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int_0^x \frac{\sinh z \sinh(1-x)}{\sinh 1}dz + \int_x^1 \frac{\sinh x \sinh(1-z)}{\sinh 1}dz \\
&= \frac{\sinh(1-x)}{\sinh 1}\cosh z\Big|_0^x + \frac{\sinh x}{\sinh 1}(-\cosh(1-z))\Big|_x^1 \\
&= \frac{\sinh(1-x)}{\sinh 1}(\cosh x - 1) + \frac{\sinh x}{\sinh 1}(\cosh(1-x) - 1) \\
&= \frac{\sinh(1-x)\cosh x + \sinh x \cosh(1-x)}{\sinh 1} - \frac{\sinh(1-x) + \sinh x}{\sinh 1} \\
&= 1 - \frac{\sinh(1-x) + \sinh x}{\sinh 1}.
\end{aligned}$$

من السهولة ان نلاحظ ان هذا هو الحل الصحيح . في هذه الحالة ، توجد طريقة اسرع لكي نصل للنتيجة نفسها . ان فائدة دالة كرين هي انها تبين كيف يكون حـل المسألـة معتمداً على اللاتجانس $f(x)$. وهي طريقة فعالة للحصول على الحل في بعض الحالات .

والآن ، دعنا نعود للوراء للنظر على الحسابات ، ونرى اذا كانت هناك حالات لاتتحقق اضافة الى احتمال ان المعاملين $k(x)$ ، $p(x)$ في المعادلة التفاضلية قد لا يكونا مستمرين ، يظهر ان القسمة على الصفر هي الحالة الوحيدة التي لاتتحقق . الكميات التي تُحذف أو تُقسم على هي

$$W(x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{vmatrix}$$

$$\alpha u_2(l) - \alpha' u_2'(l) \tag{19}$$

$$\beta u_1(r) + \beta' u_1'(r)$$

في المعادلات (7)، (10) (12) على التوالي . و يمكن ان نبين ان الكميات الثلاث اعلاه تساوي صفراً واذا كان احدهما يساوي صفراً ايضاً . في هذه الحالة ، فان $u_1(x)$, $u_2(x)$ يكونان متناسبين . (proportional) ويمكن تلخيص هذا بالمبرهنة الآتية :

مبرهنة 7 . لتكن $p(x)$,( ), $f(x)$ دوال مستمرة ، $l \le x \le r$.

مسألة القيم الحدود ية

$$\frac{d^2u}{dx^2} + k(x)\frac{du}{dx} + p(x)u = f(x), \quad l < x < r$$

$$\alpha u(l) - \alpha' u'(l) = 0 \qquad \text{(i)}$$

$$\beta u(r) + \beta' u'(r) = 0 \qquad \text{(ii)}$$

لها حل وحل واحد فقط ، ما لم يوجد حل غير تافه (nontrivial solution) للمعادلة

$$\frac{d^2u}{dx^2} + k(x)\frac{du}{dx} + p(x)u = 0, \quad l < x < r$$

والذي يحقق (i) ، (ii) .

عندما يوجد حل وحيد ، فانه يعطى بالمعادلتين (17) ، (18) .

مثال . مسألة القيم الحدودية

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u = -1, \quad 0 < x < \pi$$

$$u(0) = 0, u(\pi) = 0$$

ليس لها حل وحيد ، حسب المبرهنة ، لان $u(x) = \sin x$ حل غير تافه للمسألة

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u = 0, \quad 0 < x < \pi$$

$$u(0) = 0, u(\pi) = 0.$$

وفي الحقيقة اذا حاولنا اتباع طريقة بناء الحل ، نجد ان $u_1(x) = \sin x$ وان $u_2(x) = \sin x$ (او مضروباتهما) ، وبذلك تكون الكميات الثلاث في المعادلة (19) تساوي صفراً .

من الناحية الاخرى ، دعنا نحاول ايجاد الحل بالطريقة الاعتيادية .

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو :

$$u(x) = -1 + c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

لذلك ، فان تطبيق الشروط الحدودية يؤدي الى تناقض للمتطلبات

$$-1 + c_1 = 0 \quad , \quad -1 - c_1 = 0$$

وبالتالي ، في هذه الحالة لايوجد حل للمسألة .

اذا كان للمعادلة التفاضلية (1) نقطة شاذة عند $x = l$ او $x = r$ (او كلاهما) ، فان دالة كرين يمكن بناؤها . والشرط الحدودي (2) او (3) يمكن استبداله بشرط التقييد ، والذي يمكن تطبيقه على u_1 او u_2 حسب ما تكون الحالة .

فمثلاً ، تأمل المسألة

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right) = f(x), \quad 0 < x < 1$$

$u(0)$ مقيدة $\qquad u(1) = 0.$

الحل العام للمعادلة المتجانسة المقابلة هو $u(x) = c_1 + c_2 \ln x$ لذلك ، يمكن ان نختار :

$$u_1(x) = 1, u_2(x) = \ln x$$

وبالتالي فان $u_1(x)$ مقيد عند النقطة $x = 0$ ، $u_2(x) = 0$ عند النقطة $x = 1$.

وبذلك تكون دالة كرين

$$G(x,z) = \begin{cases} z \ln x, & 0 < z \leqslant x, \\ z \ln z, & x \leqslant z < 1. \end{cases}$$

ويمكن استخدام نفس الخطوات اذا كانت الفترة $r < x < l$ غير منتهية الطول .

تمارين

في التمارين 1 ـ 8 ، جد دالة كرين لكل مما ياتي :

1
$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x), \quad 0 < x < a$$
$$u(0) = 0, u(a) = 0.$$

2
$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x), \quad 0 < x < a$$
$$u(0) = 0, \frac{du}{dx}(a) = 0.$$

3
$$\frac{d^2u}{dx^2} - \gamma^2 u = f(x), \quad 0 < x < a$$
$$\frac{du}{dx}(0) = 0, u(a) = 0.$$

4
$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = f(r), \quad 0 \le r < c$$
$u(c) = 0$, $u(r)$ مقيدة عند $r = 0$.

5
$$\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{du}{d\rho}\right) = f(\rho), \quad 0 \le \rho < c$$
$u(c) = 0$, $u(\rho)$ مقيدة عند $\rho = 0$.

6
$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{du}{dx} - \frac{1}{4x^2}u = f(x), \quad 0 \le x < a$$
$u(a) = 0$, $u(x)$ مقيدة عند $x = 0$.

7
$$\frac{d^2u}{dx^2} - \gamma^2 u = f(x), \quad 0 < x$$
$u(0) = 0$, $u(x)$ مقيدة عندما $x \to \infty$.

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \gamma^2 u = f(x), \quad -\infty < x < \infty,$$
$u(x)$ مقيدة عندما $x \to \pm\infty$.

9 . استخدم دالة كرين في تمرين ـ 5 لحل المسألة

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{du}{d\rho}\right) = 1, \quad 0 \le \rho < c,$$
$$u(c) = 0,$$

ثم قارنه مع الحل الذي يمكن ايجاده بأخذ تكامل المعادلة مباشرة .

10 . استخدم دالة كربن في تمرين ـ 8 لحل المسألة

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \gamma^2 u = -\gamma^2, \quad -\infty < x < \infty$$

$u(x)$ مقيدة عندما $x \to \pm\infty$

ثم قارنه مع النتيجة التي يمكن ايجادها مباشرة

11 . استخدم دالة كرين في تمرين ـ 1 لحل المسألة المذكورة هنالك ، اذا كان

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a/2, \\ 1, & a/2 < x < a \end{cases}$$

12 . كتحقيق للمبرهنة ـ 1 ، بين ان المسألة المتجانسة (a)التي ادناه لها حل غير تافه ، (b)ليس لها حل (الوجود لايتحقق) ، وان (c) لها عدد غير منته من الحلول (الوحدانية لاتتحقق) .

a. $u'' + u = 0,\ u(0) = 0,\ u(\pi) = 0,$

b. $u'' + u = -1,\ u(0) = 0,\ u(\pi) = 0,$

c. $u'' + u = \pi - 2x,\ u(0) = 0,\ u(\pi) = 0.$

13 . افرض ان z وسيطاً $(l < z < r)$ ، وعرف الدالة $v(x) = G(x,z)$ حيث G كما في المعادلة (17) . بين ان v لها الخواص الاربعة الاتية والتي احياناً تستخدم لتعريف دالة كرين

(i) v يحقق الشروط الحدودية ، المعادلتين (2) ، (3) ، عند $x = l$, r

(ii) v مستمرة ، $l < x < r$. (النقطة $x = z$ تحتاج الى تحقيق)

(iii) v' غير مستمرة عند $x = z,$ ، وان

$$\lim_{h \to 0} (v'(z + h) - v'(z - h)) = 1$$

(iv) v تحقق المعادلة التفاضلية $v'' + k(x)v' + p(x)v = 0$ لاجل $l < x < z$ و $z < x < r$.

14 . بين ان مسألة القيم الحدودية :

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda^2 u = f(x), \quad 0 < x < a,$$

$$u(0) = 0, u(a) = 0,$$

ليس لها حل او عدد غير منته من الحلول ، اذا كانت λ القيمة الذاتية **(eigen value)** لـ

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda^2 u = 0,$$

$$u(0) = 0, u(a) = 0.$$

تمارين متنوعة

في التمارين 1 ـ 15 ، حل مسألة القيم الحدودية المعطاة ، وحدد شروط التقيد كلما كان ذلك ضرورياً

.1
$$\frac{d^2u}{dx^2} - \gamma^2 u = 0, \quad 0 < x < a$$
$$u(0) = T_0, u(a) = T_1$$

.2
$$\frac{d^2u}{dx^2} - r = 0, \quad 0 < x < a$$ (حيث r ثابت)

$$u(0) = T_0, \frac{du}{dx}(a) = 0$$

.3
$$\mathbf{3.}\ \frac{d^2u}{dx^2} = 0, \quad 0 < x < a$$

$$u(0) = T_0, \frac{du}{dx}(a) = 0$$

.4

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \gamma^2 u = 0, \quad 0 < x < a$$

$$\frac{du}{dx}(0) = 0, \; u(a) = T_1$$

.5

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = -p, \quad 0 < r < a$$

$$u(a) = 0$$

.6

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = 0, \quad a < r < b$$

$$u(a) = T_0, \; u(b) = T_1$$

.7

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{du}{d\rho}\right) = -H, \quad 0 < \rho < a$$

$$u(a) = T_0$$

.8

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = 0, \quad a < r < \infty$$

$$u(a) = T$$

.9

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \gamma^2(u - T) = 0, \quad 0 < x < a$$

$$\frac{du}{dx}(0) = 0, \; u(a) = T_1$$

.10

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \gamma^2 u = 0, \quad 0 < x < \infty$$

$$u(0) = T$$

.11

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \gamma^2(u - T_0), \quad 0 < x < \infty$$

$$u(0) = T$$

.12

$\frac{d}{dx}\left(x^3\frac{du}{dx}\right) = -k$ و $a < x < b$ (k ثابت)

$u(a) = 0, \quad u(b) = 0$ (Note: $0 < a$.)

13. في هذه المسألة ، h يمثل مستوى الماء فوق سطح الارض بين خندقين بحيث يكون مستوى الماء ثابتاً . لاحظ ان المعادلة تكون ليست خطية

$$\frac{d}{dx}\left(h\frac{dh}{dx}\right) + e = 0, \quad 0 < x < a$$

$$h(0) = h_0, \quad h(a) = h_1$$

.14 $\frac{d^4u}{dx^4} = w, \quad 0 < x < a \quad (w$ (ثابت))

$$u(0) = 0, \quad u(a) = 0, \quad \frac{d^2u}{dx^2}(0) = 0, \quad \frac{d^2u}{dx^2}(a) = 0$$

.15 $\frac{d^4u}{dx^4} + \frac{k}{EI}u = w, \quad 0 < x < \infty \quad (w$ (ثابت))

$$u(0) = 0, \quad \frac{d^2u}{dx^2}(0) = 0$$

.16 بين ان اي اثنين من الدوال الاربع $\sinh \lambda x$، $\sinh \lambda(a - x)$، $\cosh \lambda x$، $\cosh \lambda(a - x)$ يكونان حلين مستقلين خطياً للمعادلة التفاضلية :

$$\phi'' - \lambda^2\phi = 0.$$

.17 في هذه المسألة ، u تمثل درجة الحرارة في سور يتكون من مادتين . جد $u(x)$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0, \quad 0 < x < \alpha a \quad \text{و} \quad \alpha a < x < a$$

$$u(0) = T_0, \quad u(a) = T_1$$

$$\kappa_1 \frac{du}{dx}(\alpha a-) = \kappa_2 \frac{du}{dx}(\alpha a+)$$

$$u(\alpha a-) = u(\alpha a+)$$

المعادلتان الاخريتان تبينان ان معدل سريان الحرارة ودرجة الحرارة يكونان مستمرين حول الحدود المشتركة بين المادتين عند $x = \alpha a.$

.18 جد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{du}{dx}\right) + ku = 0$$

عندما $k = \lambda^2$ و $k = -p^2$ (تلميح : افرض $u(x) = v(x)/x$ ثم جد المعادلة التي تحقق $v(x)$)

19. جد حل مسألة القيم الحدودية

$$e^x \frac{d}{dx}\left(e^x \frac{du}{dx}\right) = -1, \quad 0 < x < a$$

$$u(0) = 0, \quad u(a) = 0.$$

20. حل مسألة القيم الحدودية :

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = -r^k, \quad 0 < r < a$$

$u(0)$ مقيدة و؛ $u(a) = 0.$

21. حل المعادلة التفاضيلية :

$$\frac{d^2u}{dx^2} = p^2u, \quad 0 < x < a$$

التي تخضع للمجموعات الاتية من الشروط الحدودية :

a. $u(0) = 0, u(a) = 1$

b. $u(0) = 1, u(a) = 0$

c. $u'(0) = 0, u(a) = 1$

d. $u(0) = 1, u'(a) = 0$

e. $u'(0) = 1, u'(a) = 0$

f. $u'(0) = 0, u'(a) = 1.$

22. حل مسألة القيم الحدودية التكاملية ـ التفاضلية .

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \gamma^2\left(u - \int_0^1 u(x)dx\right), \quad 0 < x < 1$$

$$\frac{du}{dx}(0) = 0, \quad u(1) = T.$$

(تلميح ابحث عن الحل الذي يكون بالصيغة

$$u(x) = A \cosh \gamma x + B \sinh \gamma x + C.)$$

23. استعمل تغيير الوسيط لايجاد الحل الثاني المستقل لكل من المعادلتين التفاضليتين الآتيتين . لقد أعطي احد الحلين داخل القوسين لكل من الحالتين .

a. $$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{2x}{1-x^2}\frac{du}{dx} + \frac{2}{1-x^2}u = 0 \quad (u = x)$$

b. $$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1-x}{x}\frac{du}{dx} + \frac{1}{x}u = 0 \quad (u = 1-x)$$

24. استخدم طريقة تبديل الوسيط ، اشتق هذه الصيغة للحل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \gamma^2 u = f(x)$$

$$u(x) = \int_0^x f(x')\frac{\sinh \gamma(x - x')}{\gamma}dx'.$$

25. اذا كانت درجة الحرارة المطلقة $u(x)$ في انبوب تبريد تشع حرارة الى الوسط المحيط بها بدرجة حرارة مطلقة T تخضع للمعادلة التفاضلية $u'' = \gamma^2(u^4 - T^4)$. حل مسألة القيم الحدودية الخاصة الآتية ، والتي يمكن ان تتم بصيغة مغلقة .

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \gamma^2 u^4, \quad 0 < x,$$

$$u(0) = U, \lim_{x\to\infty} u(x) = 0$$

26. اذا كان قضيب مقطعة العرضي منتظم مثبتاً من نهايته ويحمل ثقلاً موزعاً $w(x)$ عند طوله . فان الازاحة $u(x)$ في خط المركز تحقق مسألة القيم الحدودية

$$\frac{d^4u}{dx^4} = \frac{w(x)}{EI}, \quad 0 < x < a$$

$$u(0) = 0, u''(0) = 0, u(a) = 0, u''(a) = 0.$$

(هنا ، E هي معامل يونك و I هي العزم الثاني للمقطع العرضي) .
حل هذه المسألة اذا كان $w(x) = w_0$, (w_0 ثابت) .

27. اذا كان القضيب في التمرين 26 قد تم بناؤه في حائط من نهايته اليسرى وتركت النهاية اليمنى طليقة ، فان الشروط الحدودية تصبح

$$u(0) = 0, u'(0) = 0, u''(a) = 0, u'''(a) = 0.$$

حل المعادلة التفاضلية نفسها التي تخضع لهذه الشروط .

الفصل الأول

سلاسل وتكاملات فوريه

FOURIER SERIES AND INTEGRALS

1. الدوال الدورية وسلاسل فوريه
PERIODIC FUNCTIONS AND FOURIER SERIES

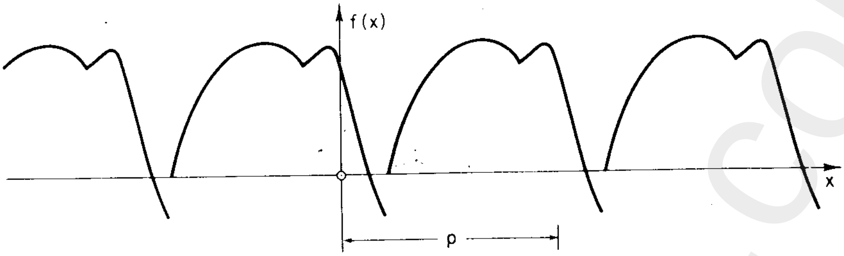
يقال للدالة f بانها دورية ذات دورة p اذا كانت (1) $f(x)$ معرفة لكل قيم x و (2) $f(x + p) = f(x)$ لكل x . الدالتين $\sin x$ و $\cos x$ تعتبر من الامثلة البسيطة للدوال الدورية ذات دورة 2π . والدالتين $\sin(2\pi x/p)$ و $\cos(2\pi x/p)$ تكون دورية ايضاً ذات دورة **P** .

والدالة الدورية يمكن ان يكون لها عدة دورات . فمثلاً اذا كان $f(x)=f(x+p)$ فان $f(x)=f(x+p)=f(x+2p)=\cdots=f(x+np)$ حيث n اي عدد صحيح . لذلك . فان $\sin x$ لها الدورات $2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots, n\cdot 2\pi.$. من الواضح ان دورة دالة دورية يجب ان تكون موجبة . ولكن شرط الدورية يتحقق للقيم السالبة بالاضافة الى الموجبة . ويمكن القول ان . ويمكن القول ان $f(x-p) = f(x)$ لكل x ، لان $f(x) = f(x-p+p) = f(x-p)$. كذلك .

$$f(x) = f(x-p) = f(x-2p) = \cdots = f(x-np).$$

ومن تعريف الدوال الدورية يتبين لنا ان قيم الدالة تعيد نفسها . وهذا يؤدي ان بيان الدالة الدورية يمكن ان يرسم لكل قيم **X** وذلك بعمل قالب للمخطط في اي

فترة طولها p ، وبعد ذلك يستنسخ المخطط من القالب اعلى واسفل محور ـ x . (لاحظ الشكل (1 ـ 1)



شكل 1 ـ 1 : دالة دورية ذات دورة p .

معظم الدوال التي تظهر في الهندسة والفيزياء تكون دورية في المسافة او الزمن ـ فمثلاً ، الموجات الصوتية (acoustic waves) ـ ولكي نفهم هذه الموجات بشكل افضل نحتاج لتمثيلها بدلالة دوال دورية بسيطة (simple periodic functions) 1 ، $\sin x$ ، $\cos x$ ، $\sin 2x$ ، $\cos 2x$ .. الخ . من الواضح ان كل هذه الدوال لها دورة مشتركة 2π ، بالرغم من ان كلا منهما له دورات اخرى .

اذا كانت f دورية ذات دورة 2π ، نحاول ان نمثل f بدلالة سلسلة غير منتهية(infinite series).

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \qquad (1)$$

نلاحظ ان كل حد في هذه السلسلة ذو دورة 2π ، لذلك اذا كان مجموع هذه السلسلة موجوداً ، فسوف يكون دالة ذات دورة 2π . هناك سؤالان يحتاجان الى اجابة :

(أ) ما هي القيم التي تأخذها a_0, a_n, b_n

(ب) اذا وجدنا قيماً مناسبة لهذه المعاملات ، هل ان السلسلة تمثل حقاً الدالة المعطاة $f(x)$

يظهر لاول وهلة انه من الصعوبة الاجابة على السؤال الاول ، لان للمعادلة (1) عدد غير منته من المجاهيل . ولكن يمكن ايجاد جواب مقبول لهذا السؤال باستخدام العلاقات التعامدية* (*orthogonality*) الآتية :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 2\pi, & n = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = 0 \qquad (2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi, & n = m \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi, & n = m \neq 0. \end{cases}$$

ويمكن تلخيص هذه العلاقات بالقول : التكامل المحدد (في الفترة من π – الى π) لجداء اي دالتان مختلفتان من السلسلة في المعادلة (1) يكون صفراً .

والفكرة الاساسية تكمن في ان المساواة المقترحة في المعادلة (1) يجب ان تكون مساواة حقيقية ، وبالتالي فإن كلا الطرفين يعطي النتيجة نفسها بعد اجراء العمليات نفسها . وبذلك فان العلاقات التعامدية تقدم عمليات لتبسيط الطرف الايمن من المعادلة (1) . اي ، نضرب طرفي المعادلة المقترحة باحد الدوال التي تظهر هنالك ثم نكامل من π – الى π . (يجب ان نفرض ان تكامل السلسلة يتم اجراؤه حداً بعد حدٍ .

وفي بعض الاحيان يصعب تبريره ، ولكننا نقوم باجرائه على كل حال .)

الان ، اذا ضربنا طرفي المعادلة (1) بثابت$(= \cos 0x)$ 1 ونكامل من π – الى π ، نجد

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \, dx.$$

ان كلمة « التعامدية يجب ان لا ينظر اليها من الناحية الهندسية

كل حد في تكامل السلسلة يكون صفراً . لذلك . فان الطرف الايمن في هذه المعادلة يختصر الى $a_0 \cdot 2\pi$. وبذلك . يكون

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx.$$

(وهذا يعني ان a_0 هي القيمة المتوسطة .(mean value) لـ $f(x)$ في دورة واحدة)

ثم . اذا ضربنا طرفي المعادلة (1) بـ $\sin mx$. حيث m عدد صحيح مثبت . ثم تكامل من π ـ الى π . سوف نجد

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \sin mx\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \sin mx\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx \sin mx\, dx.$$

من المعادلة (2) نلاحظ ان جميع الحدود التي تحتوي على a_0 او a_n سوف تختفي . بالاضافة الى هذا . فان الحد الوحيد الذي لا يساوي صفراً من الحدود التي تحتوي على b_n هو الذي فيه $n = m$. (تذكر ان n هي دليل (index)المجموع وتاخذ جميع قيم الاعداد الصحيحة .... . 1,2 . نختار m عدد صحيح ثابت . لذلك فان$m= n$تحدث مرة واحدة .) والان سيكون لدينا الصيغة الآتية :

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx\, dx.$$

وبضرب طرفي المعادلة (1) بـ $\cos mx$ (m مثبت صحيح) ثم نكامل . لنحصل على .

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\, dx.$$

والان . يمكن ان نلخص هذه النتائج . ولكي تتحقق المساواة المقترحة

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (1)$$

يجب ان نختار a_0 ، a_n ، b_n حسب الصيغ الآتية

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \qquad (3)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx \qquad (4)$$

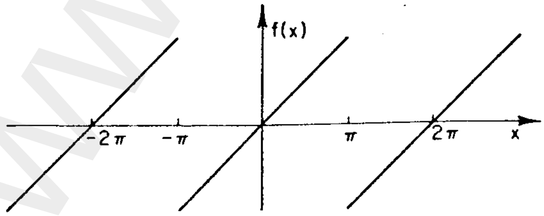
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx. \qquad (5)$$

يسمى الطرف الايمن من المعادلة (1) بسلسلة فوريه للدالة f. وتسمى a_0، a_n، b_n بمعاملات فوريه (*Fourier coefficients.*) . ولحد الآن لم نجب على السؤال (ب) حول المساواة ، لذا سوف نكتب

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

لكي نشير الى سلسلة فوريه المقترنة بـ $f(x)$.

مثال . لتكن $f(x)$ دورية ذات دورة 2π معرفة بالصيغة $f(x) = x$ في الفترة $-\pi < x < \pi$ (لاحظ الشكل 2 ـ 1) . حسب الصيغ التي حصلنا عليها سابقاً ، يكون لدينا



شكل 2 ـ 1

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n^2} + \frac{x\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n^2} - \frac{x\cos nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{(-2\pi)\cos n\pi}{n} = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

وبهذا ، لاجل هذه الدالة لدينا

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

$$\sim 2(\sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x - + \cdots).$$

تمارين

1 . جد معاملات فوريه للدوال الآتية . اعتبر جميع الدوال دورية ذات دورة 2π . ثم ارسم مخطط هذه الدوال .

a. $f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi$

b. $f(x) = |x|, \quad -\pi < x < \pi$

c. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$

d. $f(x) = |\sin x|$

2 . ارسم دورتين في الاقل لمخططات الدوال المعرفة ادناه :

a . $f(x) = x, \quad -1 < x \leq 1, \quad f(x+2) = f(x)$

b . $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x \leq 0, \\ x, & 0 < x < 1, \end{cases} \quad f(x+2) = f(x)$

c . $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq 2\pi, \end{cases} \quad f(x+3\pi) = f(x)$

d . $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0, \\ \sin x, & 0 < x \leq \pi, \end{cases} \quad f(x+2\pi) = f(x)$

3 . بين ان الدالة الثابتة $f(x) = 1$ تكون دورية لاية دورة $p > 0$.

4 . اعط تفاصيل اشتقاق المعادلة لـ a_m .

5 . اذا كانت $f(x)$ ذات دورة p. بين ان لاي c يكون

$$\int_c^{c+p} f(x)\, dx = \int_0^p f(x)\, dx.$$

6 . اذا كانت $f(x), g(x)$ دوريتين ذات دورة مشتركة p. بين ان $af(x)$. $+ bg(x)$ و $f(x) \cdot g(x)$ تكون دورية ايضاً ذات دورة p (a, b ثابتان) .

7 . جد سلسلة فوريه لكل من الدوال الدورية الآتية ، التكامل هنا ليس ضرورياً .

a . $f(x) = \cos^2 x$
b. $f(x) = \sin(x - \pi/6)$
c. $f(x) = \sin x \cos 2x$

8 . بين ان $\sin(2\pi x/p)$ و $\cos(2\pi x/p)$ دالتان دوريتان ذات دورة p .

2 . الدورة الاختيارية ونشر نصف ـ المدى :

ARBITRARY PERIOD AND HALF-RANGE EXPANSIONS

في البند (1) وجدنا طريقة لتمثيل الدالة الدورية ذات دورة 2π بواسطة سلسلة فوريه . وليس من الضروري ان نقيد انفسنا بهذه الدورة . ذلك انه يمكن توسيع فكرة سلسلة فورية لتشمل دوال لاية دورة ، بواسطة تعديل بسيط لمقياس المتغيرات .

دعنا نفرض ان f دالة دورية ذات دورة $2a$. (اخذنا $2a$ بدل p لكونها ملائمة كما سنلاحظ لاحقاً) . لذلك يمكن ان نكتب f على شكل سلسلة من الدوال 1 ، $\sin(\pi x/a)$ ، $\cos(\pi x/a)$ ، $\sin(2\pi x/a)$، ، $\cos(2\pi x/a)$ وجميعها ذات دورة $2a$، بالصيغة

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{a} + b_n \sin\frac{n\pi x}{a}.$$

ان معاملات سلسلة فوريه هذه يمكن تحديدها اما بالقياس الى الصيغ في بند ـ 1 واما بواسطة مفهوم التعامدية . في اي من الحالتين ، تكون المعاملات

$$a_0 = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}\,dx \qquad (1)$$
$$b_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx.$$

مثال : اذا كانت $f(x) = |\sin \pi x|$ ، دورية ذات دورة 1 ، فان معاملات فورية للدالة f تكون $(a = \frac{1}{2})$

$$a_0 = \int_{-1/2}^{1/2} |\sin \pi x| \, dx = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = 2 \int_{-1/2}^{1/2} |\sin \pi x| \cos 2n\pi x \, dx = -\frac{4}{\pi} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

$$b_n = 2 \int_{-1/2}^{1/2} |\sin \pi x| \sin 2n\pi x \, dx = 0.$$

وبالتالي ، فان سلسلة فوريه للدالة تكون :

$$|\sin \pi x| \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos 2n\pi x.$$

وفي احيان كثيرة يكون من الضروري ان نمثل بواسطة سلسلة فوريه دالة معرفة في فترة منتهية فقط . ويمكن ان نبرر مثل هذا التمثيل على اساس ان الدالة المعلومة جزء من الدالة الدورية . واذا كانت الدالة المعلومة f معرفة في الفترة $-a < x < a$ يمكن ان ننشأ $\bar{f}$ ، توسيع الدورية (*periodic extension*). للدورة $2a$ ، وذلك باستخدام التعاريف الاتية :

$$\bar{f}(x) = f(x), \qquad -a < x < a$$

$$\bar{f}(x) = f(x + 2a), \quad -3a < x < -a$$

$$\bar{f}(x) = f(x - 2a), \qquad a < x < 3a$$

وهكذا دواليك ، في اعلى واسفل محوره x . لاحظ ان الدالة f في الطرف الايمن تقع ضمن الفترة $-a < x < a$ وكما اعطي f في الاصل . وبالتمثيل البياني ، هذا النوع من التوسيع ينتج منه عمل قالب لمخطط $\bar{f}$ في $-a < x < a$ ومن ثم استنساخ القالب في الفترة المتاخمة التي طولها $2a$.

$$a_0 = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} \bar{f}(x) \, dx,$$

$$a_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} \bar{f}(x) \cos \frac{n\pi x}{a} \, dx \qquad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} \bar{f}(x) \sin \frac{n\pi x}{a} \, dx.$$

واذا ركزنا اهتمامنا على $f(x)$ فقط في الفترة $-a < x < a$ حيث اعطي اصلا ، فان خطوات توسيع الدورية شكلياً تماماً ـ والصيغ المعطاة للمعاملات التي تشمل f تكون فقط في الفترة الاصلية ـ ويمكن ان نكتب

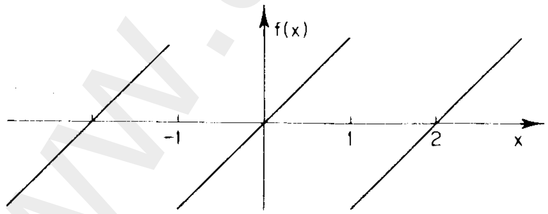
$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{a} + b_n \sin\frac{n\pi x}{a}, \quad -a < x < a.$$

ان المتباينة تركز اهتمامنا على حقيقة ان f معرفة فقط في الفترة من $-a$ الى a .

مثال : ليكن $f(x) = x$ معرفاً بالفترة $-1 < x < 1$ فان مخطط توسيع الدورية (ذات دورة 2) يمكن ملاحظتهُ بالشكل (3 ـ 1) ، وان معاملات فوريه هي

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \int_{-1}^{1} x \sin n\pi x \, dx = -\frac{2\cos n\pi}{n\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

ان دالتي الجيب وجيب التمام التي ظهرت في سلسلة فوريه لها بعض خواص التناظر (symmetry) والتي لها اهمية في ايجاد المعاملات . ومخطط دالة الجيب التمام يكون متناظراً حول المحور العمودي بينما مخطط دالة الجيب يكون غير متناظراً حول المحور نفسه . نوضح هذه الخواص بتعريف



شكل (3 ـ 1) . $f(x) = x, \ -1 < x < 1, \ f$ **دورية ذات دورة 2 .**

تعريف . يقال للدالة $g(x)$ بانها زوجية (*even*) اذا كان $g(-x) = g(x)$ ، ويقال للدالة $h(x)$ بانها فردية (*odd*).اذا كان ($h(-x) = -h(x)$) ،

امثلة . x^3 و x و $\sin \alpha x$ و x مرفوعاً لاي أس فردي تكون فردية
x^2 و 1 و $\cos \alpha x$ و x مرفوعا لاي اس زوجي تكون زوجية

معظم الدوال لا تكون زوجية ولا فردية ، ولكن اية دالة يمكن التعبير عنها كحاصل جمع دالة زوجية مع دالة فردية :

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$$

من السهولة ان نلاحظ ان الحد الاول هو دالة زوجية بينما الحد الثاني فهو دالة فردية .

الميزات المهمة للدوال الزوجية والفردية هي كما يلي :

1 ـ تكامل دالة فردية معرفة على فترة متناظرة يساوي صفراً .
2 ـ تكامل دالة زوجية معرفة على فترة متناظرة هي ضعف التكامل المعرف على النصف الايمن من الفترة . وبالرموز نكتب

$$\int_{-a}^{a} \text{odd}\, dx = 0$$
$$\int_{-a}^{a} \text{even}\, dx = 2\int_{0}^{a} \text{even}\, dx.$$

يمكن ان نلاحظ تاثير العمليات الحسابية على الدوال الزوجية والفردية على النحو :

زوجي × فردي = فردي
زوجي × زوجي = زوجي
فردي × فردي = زوجي
زوجي + زوجي = زوجي
فردي + فردي = فردي

لنفرض الان ان g دالة زوجية في الفترة $-a < x < a$ بما ان دالة الجيب تكون فردية ، وان الجداء $g(x) \sin(n\pi x/a)$ فردي ايضا ، لذلك يكون لدينا

$$b_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} g(x) \sin\frac{n\pi x}{a} \, dx = 0.$$

اي أن ، جميع معاملات دالة الجيب تساوي اصفاراً . بالاضافة الى هذا ، بما ان دالة الجيب التمام زوجية ، فان $g(x) \cos(n\pi x/a)$ تكون كذلك ، وبالتالي فان

$$a_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} g(x) \cos\frac{n\pi x}{a} \, dx = \frac{2}{a} \int_{0}^{a} g(x) \cos\frac{n\pi x}{a} \, dx.$$

وبهذا فان معاملات دالة الجيب التمام يمكن حسابها من التكامل في الفترة من 0 الى a

وتتحقق نتائج مماثلة لهذه بالنسبة للدوال الفردية : معاملات دالة الجيب التمام تساوي اصفاراً ومعاملات دالة الجيب يمكن تبسيطها . ويمكن تلخيص هذه النتائج بالمبرهنة الآتية :

مبرهنة : اذا كانت $g(x)$ زوجية $(g(-x) = g(x))$ في الفترة $-a < x < a$ فان .

$$g(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{a}, \quad -a < x < a$$

حيث

$$a_0 = \frac{1}{a} \int_{0}^{a} g(x) \, dx, \quad a_n = \frac{2}{a} \int_{0}^{a} g(x) \cos\frac{n\pi x}{a} \, dx.$$

اذا كانت $h(x)$ فردية في الفترة $-a < x < a \ (h(-x) = -h(x))$ ، فان

$$h(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{a}, \quad -a < x < a$$

حيث

$$b_n = \frac{2}{a} \int_{0}^{a} h(x) \sin\frac{n\pi x}{a} dx.$$

وغالباً ما نجد ان الدالة المعرفة في الفترة $0 < x < a$ يمكن تمثيلها بصيغة سلسلة فوريه . ويوجد عدد غير منتهٍ من الطرق لعمل ذلك ، ولكن توجد طريقتان بسيطتان ومفيدتان ، نوسع الدالة المعطاة الى دالة معرفة على الفترة المتناظرة $-a < x < a$ وذلك بجعل توسيع الدالة اما زوجية واما فردية .

تعريف . لتكن $f(x)$ معطاة في الفترة $0 < x < a$ والتوسع الفردي (odd extension) للدالة f معرفاً بـ :

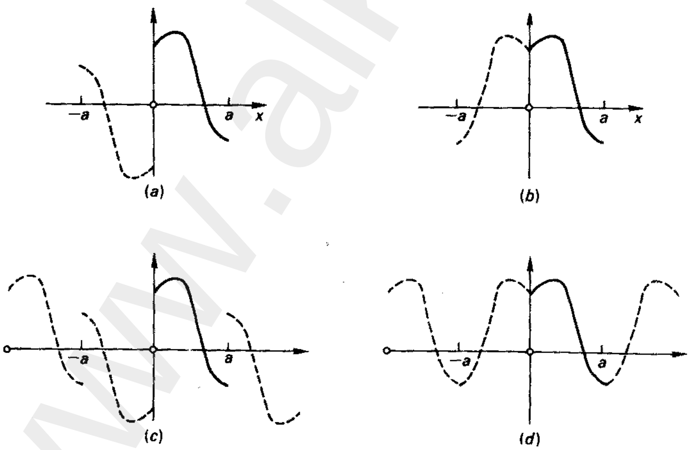
$$f_o(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < a \\ -f(-x), & -a < x < 0. \end{cases}$$

والتوسع الزوجي للدالة f معرفاً بـ :

$$f_e(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < a \\ f(-x), & -a < x < 0 \end{cases}$$

تذكر انهُ اذا كان $-a < x < 0$ فان $0 < -x < a$ وبهذا تكون القيم الدالية (functional values) في الطرف الايمن معروفة من الدوال المعطاة .

وبالتمثيل البياني ، التوسع الزوجي يمكن الحصول عليه وذلك بانعكاس شكل المخطط في المحور العمودي . والتوسع الفردي يمكن الحصول عليه بالانعكاس اولاً عند الاحداثي العمودي والاحداثي الافقي (لاحظ الشكل 4 ـ 1) .



شكل (4 ـ 1) الدالة معطاة في الفترة $0 < x < a$ الشكل يبين (a) التوسع الفردي ، (b) التوسع الزوجي (c) التوسع الدوري الفردي (d) التوسع الزوجي الدوري .

والان ، فان سلسلة فوريه لاي توسع يمكن احتسابها من الصيغ اعلاه . وبما ان f_e زوجية و f_o فردية ، فان

$$f_e(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{a}, \quad -a < x < a$$

$$f_o(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{a}, \quad -a < x < a.$$

اذا كانت السلسلة في اليمين متقاربة **(Converge)** ، فهي تمثل دوال دورية ذات دورة **2a** . من الواضح ان سلسلة دالة الجيب التمام تمثل توسيعاً زوجياً دورياً للدالة f . وتوسيع الدورية لـ f_e وسلسلة الجيب تمثل توسيعاً دورياً فردياً للدالة f .

واذا كانت المسألة التي بين ايدينا تمثل الدالة $f(x)$ في الفترة $0 < x < a$ حيث اعطيت اصلاً ، عندها يمكن ان نستخدم اما سلسلة فوريه الجيبية واما سلسلة فوريه الجيب تمامية المبينة اعلاه ، لان f_o و f_e ينطبقان مع f في هذه الفترة .

لذلك يمكن تلخيص هذا بالقول : اذا كانت $f(x)$ دالة معلومة في الفترة $0 < x < a$، فان

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{a}, \quad 0 < x < a$$

$$a_0 = \frac{1}{a}\int_0^a f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}\,dx$$

وان

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{a}, \quad 0 < x < a$$

$$b_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx.$$

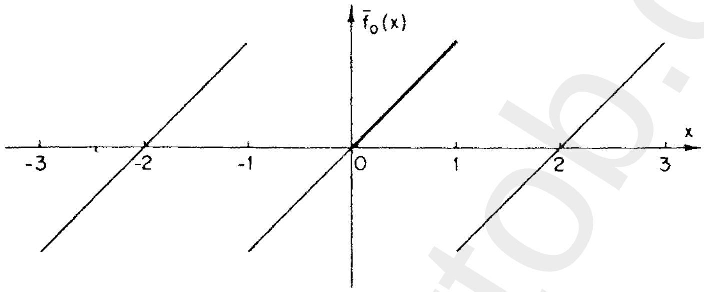
يطلق على هذين التمثيلين اسم نشر نصف ـ المدى . وسوف نحتاج هذه ، اكثر من اي نوع آخر من سلسلة فوريه ، في التطبيقات التي سوف نتناولها لاحقاً .

مثال . لتكن f دالة معرفة بالصيغة

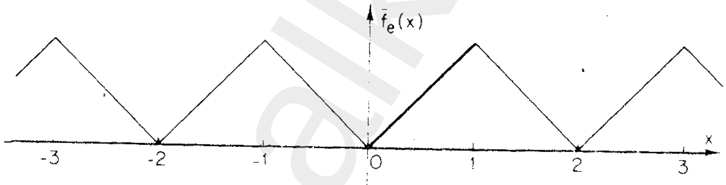
$$f(x) = x, \quad 0 < x < 1.$$

فان توسيع الدورية الفردية للدالة f هي كما موضحة في الشكل (5 ـ 1) ، وان معاملات فوريه الجيبية (Fourier sine coefficients) للدالة f تكون

$$b_n = 2\int_0^1 x \sin n\pi x \, dx = -\frac{2}{n\pi}\cos n\pi$$



شكل (5 ـ 1) . التوسع الدوري الفردي (دورة 2) لـ $f(x) = x$ في الفترة $0 < x < 1$



شكل (6 ـ 1) . التوسع الدوري الزوجي (دورة 2) لـ $f(x) = x$ في الفترة $0 < x < 1$

توسيع الدورية الزوجية للدالة f هي كما موضح في الشكل 6 ـ 1 . ومعاملات فوريه الجيب تمامية هي

$$a_0 = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

$$a_n = 2\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx = -\frac{2}{n^2\pi^2}(1 - \cos n\pi).$$

التقابلات الست التالية (سوف نبين لاحقاً انها تكون مساواة) نحصل عليها من الافكار التي طرحت في هذا البند . لاحظ ان المتباينات التي تظهر المدى التطبيقي لـ x تكون حاسمة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2\cos n\pi}{n\pi} \sin n\pi x \sim \begin{cases} f(x) = x, & 0 < x < 1 \\ f_o(x) = x, & -1 < x < 1 \\ \bar{f}_o(x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1 - \cos n\pi)}{n^2\pi^2} \cos n\pi x \sim \begin{cases} f(x) = x, & 0 < x < 1 \\ f_e(x) = |x|, & -1 < x < 1 \\ \bar{f}_e(x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

تمارين

1 . جد سلسلة فوريه لكل من الدوال الآتية . ارسم مخطط توسيع الدورية للدالة f لدورتين في الاقل .

a $\quad f(x) = |x|, \quad -1 < x < 1$

b $\quad f(x) = \begin{cases} -1, & -2 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 2 \end{cases}$

c $\quad f(x) = x^2, \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

2 . بين ان الدالتين $\cos(n\pi x/a)$ و $\sin(n\pi x/a)$ تحقيقان العلاقات التعامدية المشابهة لتلك التي اعطيت في بند ـ 1 .

3 . نفرض ان سلسلة فوريه ضرورية لدالة معرفة في الفترة $0 < x < 2a$. بين كيف نُنشيء توسيع الدورية ذات دورة $2a$ واعط صيغاً لمعاملات فوريه بحيث نستخدم التكامل للفترة من 0 الى $2a$ فقط . (تلميح : لاحظ تمرين ـ 5 ، بند ـ 1 .)

4 . بين ان الصيغة

$$e^x = \cosh x + \sinh x$$

تمثل تجزئة الدالة e^x الى حاصل جمع دالة زوجية ودالة فردية .

5 . بين اي من الدوال الاتية تكون زوجية او فردية او لا زوجية ولا فردية . ثم ارسم المخطط .

a . $f(x) = x$ b $f(x) = |x|$

c . $f(x) = |\cos x|$ d $f(x) = \arc\sin x$

e . $f(x) = x\cos x$ $f(x) = x + \cos(x+1)$

6 . اذا اعطيت $f(x)$ في الفترة $0 < x < a$ ، ما هي الطرق الاخرى التي نسلكها لكي نوسع $f(x)$ لتكون دالة في الفترة $-a < x < a$.

7 . جد سلسلة فوريه لكل من الدوال الاتية .

a. $f(x) = x, \quad -1 < x < 1$ b $f(x) = 1, \quad -2 < x < 2$

c $f(x) = \begin{cases} x, & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ 1 - x, & \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}. \end{cases}$

8 . اذا كانت المعاملات الجيبية للدالة f المعرفة على الفترة $-a < x < a$ تساوي اصفاراً . هـل هذا يؤدي الى ان f دالة زوجية

9 . من المعروف انهُ اذا كانت الدالة $f(x)$ فردية على الفترة $-a < x < a$، فان سلسلتها الفوريه تتكون فقط من الجيوب . ما هو الشرط المتناظر الاضافي الذي نفرضهُ على f لكي تكون معاملات الجيب الزوجية الدليل اصفاراً ؟ اعطِ مثالاً .

10 . ارسم مخطط التوسيع الزوجي والفردي لكل من الدوال الآتية :

a . $f(x) = 1, \quad 0 < x < a$ b . $f(x) = x, \quad 0 < x < a$

c . $f(x) = \sin x, \quad 0 < x < 1$ d . $f(x) = \sin x, \quad 0 < x < \pi$

11 . اعط سلسلة فوريه الجيبية والجيب تمامية للدوال في تمرين 10. ارسم مخطط التوسع الفردي والزوجي لعدة دورات

12 . برهن العلاقات التعامدية

$$\int_0^a \sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi x}{a}\,dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ a/2, & n = m \end{cases}$$

$$\int_0^a \cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi x}{a}\,dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ a/2, & n = m \neq 0 \\ a, & n = m = 0. \end{cases}$$

13 . اذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة في الفترة $0 < x < a$، هل ان توسيع الدورية الزوجية لها مستمرة ؟ وما هي الحالة بالنسبة لتوسيع الدورية الفردية ؟ تحقق بشكل خاص عندما يكون $x = 0$ و $\pm a$.

3 . تقارب سلاسل فوريه .

CONVERGENCE OF FOURIER SERIES

سوف نشرع الآن في الاجابة على السؤال الثاني في بند 1 : هل ان سلسلة فوريه لدالة تمثل حقاً هذه الدالة ؟ ان كلمة « تمثل » لها عدة تفسيرات ، ولكن ما نريدهُ حقاً هو الاجابة على هذا السؤال .

اذا اخترنا قيمة x ، فأن العددين $\cos(n\pi x/a)$ و $\sin(n\pi x/a)$ يمكن حسابهما لكل n ثم نضعهما في سلسلة فوريه للدالة f، وبهذا يتم حساب مجموع السلسلة ، هل ان هذا المجموع يساوي القيمة الدالية $f(x)$ ؟

في هذا البند سوف نعطي ، بدون برهان ، بعض المبرهنات التي تجيب على السؤال (سوف نعطي برهان مبرهنة التقارب في بند ـ 7) . ولكن نحتاج اولاً لبعض التعاريف حول الغايات والاستمرارية .

الغاية الاعتيادية $\lim_{x\to x_0} f(x)$ (ordinary limit) يمكن ان تكتب بالشكل $\lim_{h\to 0} f(x_0 + h)$. هنا h تقترب من الصفر في اية طريقة كانت . ولكن اذا تطلّب ان تكون h موجبة فقط ، سوف نحصل على ما يسمى بـ غاية الطرف ـ الايمن (*right-hand limit*) للدالة f عند النقطة x_0 ، والتي تعرف بـ

$$f(x_0+) = \lim_{h\to 0+} f(x_0 + h) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(x_0 + h).$$

وبالطريقة نفسها نعرف غاية الطرف ـ الايسر

$$f(x_0-) = \lim_{h \to 0-} f(x_0 + h) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} f(x_0 + h) = \lim_{h \to 0+} f(x_0 - h).$$

تذكر انهُ ليس من الضروري ان تكونا $f(x_0+), f(x_0-)$ قيمتان للدالة f .

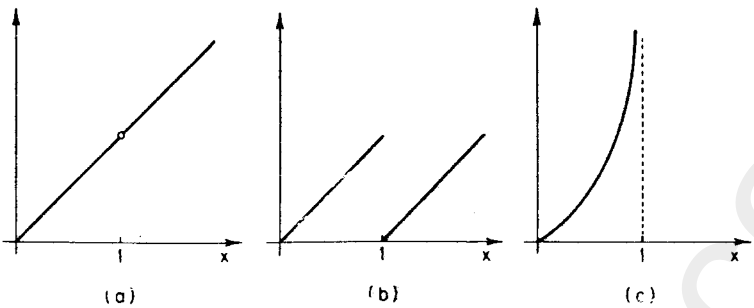
اذا كان كلٌ من غاية الطرف الايمن وغاية الطرف الايسر موجوداً وكانتا متساويتين ، فأن الغاية الاعتيادية موجودة وتساوي غاية احد الطرفين . ومن المحتمل ان تكون غاية الطرف ـ الايمن وغاية الطرف ـ الايسر موجودتان ولكنهما غير متساويتين . فمثلاً ، عند النقطة $x = 0$ للدالة

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi \\ -1, & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

نلاحظ ان غاية الطرف ـ الايسر عند $x_0 = 0$ هي 1 ـ ، بينما غاية الطرف ـ الايمن تكون + 1 . الانقطاع (discontinuity) الذي تكون عنده الغايتان للطرف الايسر والايمن موجدتين ولكنهما غير متساويتين . يسمى انقطاع بطفرة (*jump discontinuity*)

ويحدث في بعض الاحيان عند بعض النقاط ان كلًا الغايتين موجودتين وتتفقان ، ولكن الدالة تكون غير معرفة في تلك النقاط . في مثل هذه الحالة يقال لتلك الدالة ان لها انقطاع زائل (*removable discontinuity*) . اذا كانت قيمة الدالة عند نقطة ما غير مستمرة وعد لنا تعريفها ليصبح مساوياً الى الغاية ، فان الدالة سوف تصبح مستمرة في تلك النقطة . فمثلاً ، الدالة $f(x) = (\sin x)/x$ لها نقطة انقطاع ـ زائلة عند $x = 0$. يمكن ازالة الانقطاع وذلك باعادة تعريف الدالة بحيث يكون $f(x) = (\sin x)/x \; (x \neq 0)$ و $f(0) = 1$. من الان فصاعداً سوف نتجاهل حالة الانقطاع الزائل لكونها بسيطة جداً .

هناك حالات من انقطاع اكثر جدية والتي تظهر عندما يكون احد او كلا طرفي الغاية غير موجود . فمثلاً كلتا الدالتين $\sin 1/x$ و $e^{1/x}$ تكون غير مستمرة عند النقطة $x = 0$ والتي هي ليست زائلة ولا طفرة . (لاحظ الشكل 7 ـ 1) . الجدول (1.1) يلخص سلوك الاستمرارية عند النقطة



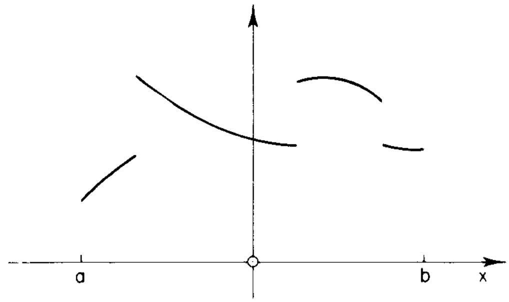
شكل (7 ـ 1) (a) **انقطاع زائل** $f(x) = (x - x^2)/(1 - x)$ (b) **انقطاع بطفرة** $f(x) = x (0 < x < 1) = x - 1 (1 < x)$. (c) **انقطاع سيىء** $f(x) = -\ln(1 - x)$.

جدول (1.1)

انواع سلوك الاستمرارية في x_0 .

الاسم	الحالة
الاستمرارية	$f(x_0+) = f(x_0-) = f(x_0)$
انقطاع زائل	$f(x_0+) = f(x_0-) \neq f(x_0)$
انقطاع بطفرة	$f(x_0+) \neq f(x_0-)$
انقطاع سيىء	$f(x_0+)$ أو $f(x_0-)$ او كلاهما
"Bad" discontinuity	غير موجود

يقال للدالة انها مستمرة مقطعياً (*sectionally continuous*) في الفترة $x \leq b$ ه اذا كانت الدالة مستمرة ، عدا عند عدد منته من الطفرات او الانقطاعات ١٨ ائلة . وتكون الدالة مستمرة مقطعياً (بدون كفاءة) اذا كانت الدالة مستمرة مقطعياً في كل فترة ذات طول منتهِ . فمثلاً ، اذا كانت الدالة الدورية مستمرة مقطعياً في اية فترة طولها دورة واحدة ، فإنها تكون مستمرة مقطعياً (لاحظ الشكل 8 ـ 1) .



شكل (8 ـ 1) . دالة مستمرة مقطعياً تتكون من اربع « مقاطع » مستمرة .

امثلة :

1 ـ الموجية المربعة (*square wave*) المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < a, \\ -1, & -a < x < 0, \end{cases} \quad f(x + 2a) = f(x)$$

تكون مستمرة مقطعياً .

2 ـ الدالة $f(x) = 1/x$ لا يمكن ان تكون مستمرة مقطعياً في اية فترة تحتوي 0 ، او ان يكون الصفر نقطة طرفية ، لان الدالة ليست مقيدة عند $x = 0$.

3 . اذا كانت $f(x) = x$ ، $-1 < x < 1$ ، فإن f تكون مستمرة في هذه الفترة ، وان توسيع دوريتها تكون مستمرة مقطعياً ولكنها ليست مستمرة .

والامثلة اعلاه توضح حقيقتين هامتين لمعنى الاستمرارية مقطعياً . والشيء الهام هو ان الدالة المستمرة مقطعياً لا يمكن ان تنقطع في اية نقطة ـ حتى النقطة الطرفية ـ في الفترة . ومن الجدير بالملاحظة انه ليس من الضروري ان تكون الدالة معرفة في كل نقطة لكي تكون مستمرة مقطعياً . فمثلاً لم نعط اي قيمة لدالة الموجة المربعة عند النقاط $x = 0, \pm a$ ، ولكن الدالة بقيت مستمرة مقطعياً ، بغض النظر عن ماهية القيم المعينة لهذه النقاط .

يقال للدالة f بانها ملساء مقطعياً (*sectionally smooth*) في الفترة $a < x < b$ اذا كانت : f مستمرة مقطعياً ، و $f'(x)$ موجودة ، وربما انتفى ذلك

عند عدد منته من النقاط ، و $f'(x)$ مستمرة مقطعياً . ومخطط الدالة الملساء مقطعياً ، لها عدد منته من نقاط الانقطاع الزائلة ، الطفرات ، والاركان (corners) (المشتقات غير موجودة في هذه النقاط) . وبين هذه النقاط ، يكون المخطط مستمراً ، ومشتقته مستمرة ايضاً . ولا يوجد له مماسات عمودية ، لان هذه تعني ان المشتقة غير منتهية .

امثلة :ـ

1 . $f(x) = |x|^{1/2}$ دالة مستمرة ، ولكنها ليست ملساء مقطعياً في الفترة التي تحتوي على الصفر ، لان $|f'(x)| \to \infty$ عندما $x \to 0$.

2 . الموجية المربعة تكون ملساء مقطعياً ، ولكنها ليست مستمرة .

والآن يمكن ان نعطي المبرهنة الاساسية في التقارب .

مبرهنة :ـ اذا كانت الدالة $f(x)$ ملساء مقطعياً ودورية ذات دورة $2a$ ، فإن سلسلة فوريه في كل نقطة x المقابلة لـ f تكون متقاربة ، وان

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right] = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

هذه المبرهنة تعطي الجواب على سؤالنا الذي طرحناه في بداية هذا البند . تذكر ان الدالة الملساء مقطعياً لها فقط عدد منتهٍ من الطفرات وليس لها انقطاع سيء (bad discontinuities) ، في كل فترة منتهية . لذلك ، فإن $f(x+)$ و $f(x-)$ متساويان ويساوي كل منهما $f(x)$ فيما عدا عدد منته من النقاط . ولهذا السبب ، فاذا كانت f تحقق شروط المبرهنة ، فإننا نقول ان f تساوي سلسلتها الفوريه ، حتى وان لم تتحقق المساواة عند الطفرات .

عندما ننشيء توسيع الدورية للدالة ، فسوف لا نعرف قيم $f(x)$ في النقاط الطرفية . وكون معاملات فوريه تعطى بدلالة التكامل ، فإن القيمة المثبتة لـ $f(x)$ في نقطة واحدة لا يمكن ان تؤثر عليهما ، لذلك ، ففي هذه الحالة ، فان قيمة f عند النقطة $x = +a$ ليست مهمة . ولكن من المفيد لكي نحافظ على صيغة سلسلة فوريه ، ان نعرف

$$f(a) = f(-a) = \tfrac{1}{2}(f(a-) + f(-a+)).$$

اي ان ، قيمة f عند النقاط الطرفية هي معدل الغايتين عند النقطتين الطرفيتين ، وكل غاية تؤخذ داخل الفترة . فمثلاً ، اذا كان $f(x) = 1 + x$ و $1 > x > 0$ ، $0 < x < 1$؛ وان $f(x) = 0$ ، $-1 < x < 0$ ، فان $f(\pm 1) = 1$ وان $f(0) = \frac{1}{2}$.

امثلة :

1 . دالة الموجية المربعة .

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ -1, & -1 < x < 0 \end{cases}$$

تكون ملساء مقطعياً ، لذلك ، فإن سلسلة فوريه المقابلة لها تتقارب من

$$\begin{array}{ll} 1, & 0 < x < 1 \\ -1, & -1 < x < 0 \\ 0, & x = 0, 1, -1 \end{array}$$

وهي دورية ذات دورة 2 .

2 . بالنسبة للدالة $f(x) = |x|^{1/2}$ ، $-\pi < x < \pi$ ، $f(x + 2\pi) = f(x)$ ، فإن المبرهنة السابقة لا تضمن التقارب لسلسلة فوريه في اي نقطة ، حتى ولو كانت الدالة مستمرة . بالاضافة الى ذلك ، فإن السلسلة تكون متقاربة عند كل نقطة x ! وهذا يعني ان شروط المبرهنة اعلاه ربما تكون قوية . (ولكنها مفيدة) .

تمارين

1 . فيما يأتي ، اعطيت الدالة مساوية لسلسلة فوريه ، بايجاد كل طرف من المساواة عند قيمة مناسبة x ، اشتق المساواة الثانية .

a. $$|x| = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)\pi x, \quad -1 < x < 1$$
$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots$$

b. $$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)\pi x = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ -1, & -1 < x < 0 \end{cases}$$
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

c. $$|\sin x| = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nx$$
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \cdots$$

2 . بين فيما اذا كانت كل من الدوال ادناه ملساء مقطعياً . واذا كانت كذلك ، اعطِ القيمة التي تتقارب اليها سلسلة فوريه في كل نقطة x في الفترة ، وفي النقاط الطرفية . ارسم المخطط

a. $f(x) = |x| + x, \; -1 < x < 1$

b. $f(x) = x\cos x, \; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

c. $f(x) = x\cos x, \; -1 < x < 1$

d. $$f(x) = \begin{cases} 0, & 1 < x < 3 \\ 1, & -1 < x < 1 \\ x, & -3 < x < -1 \end{cases}$$

3 . ما هي القيمة التي تتقارب اليها سلسلة فوريه للدالة f اذا كانت f مستمرة ، دورية وملساء مقطعياً .

4 . اذكر مبرهنات التقارب لسلسلة فوريه الجيبية والجيب تمامية والتي تظهر من نشر نصف ـ المدى .

4 . التقارب المنتظم

UNIFORM CONVERGENCE

المبرهنة في البند السابق تتعامل مع التقارب على اساس اخذ النقاط بشكل انفرادي في الفترة . واهم انواع التقارب هو التقارب المنتظم في الفترة . وليكن

$$S_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\frac{n\pi x}{a} + b_n \sin\frac{n\pi x}{a}$$

المجموع الجزئي (partial sum) لسلسلة فوريه للدالة f الانحراف الاعظم (maximum deviation) بين ان مخطط $S_N(x)$ ومخطط $f(x)$ هو

$$\delta_N = \max|f(x) - S_N(x)|, \quad -a \le x \le a$$

حيث max* تؤخذ لكل x في الفترة بضمنها النقاط الطرفية . واذا اقترب الانحراف الاعظم من الصفر عندما تزداد N ، سوف نقول ان السلسلة تقترب بانتظام في الفترة $-a \le x \le a$.

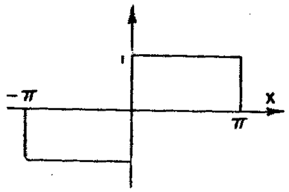
ويمكن القول ، اذا كانت سلسلة فوريه تقترب بانتظام ، فإن المجموع لعدد منتهٍ N من الحدود يعطي تقريباً جيداً ، ضمن $\pm\delta_N$ ، لقيمة $f(x)$ في اي وكل نقطة في الفترة . بالاضافة الى ذلك ، اذا اخذنا N كبيرة بشكل كافٍ ، يمكن ان نحصل على اقل ما يمكن من الاخطاء .

توجد حقيقتان مهمتان حول التقارب المنتظم ، اذا كانت سلسلة فوريه تتقارب بانتظام في فترة ـ دورة (period–interval) فإنها ، (1) يجب ان تقترب من دالة مستمرة وان (2) يجب ان تقترب من دالة (مستمرة) تولد السلسلة . وبالتالي ، فإن الدالة التي لها انقطاع غير زائل (nonremovable discontinuity) لا يمكن ان يكون لها سلسلة فوريه المتقاربة بانتظام . (وان ليس كل الدوال المستمرة لها سلسلة فورية المتقاربة بانتظام) .

---

* اذا كانت f غير مستمرة ، فإن الـ max تستبدل بـ (supremum) و بقيد اعلى اصغر (least upper bound) .

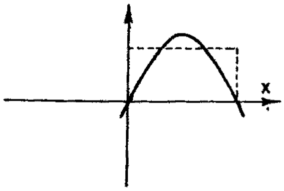
في الشكل (9 ـ 1) توجد مخططات لبعض المجموع الجزئي لدالة الموجية



$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi \\ -1, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

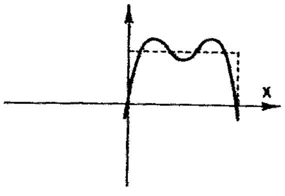
$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

(a)



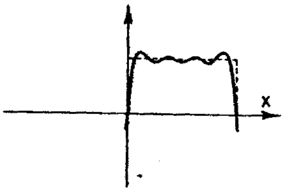
$$S_1(x) = S_2(x) = \frac{4}{\pi} \sin x$$

(b)



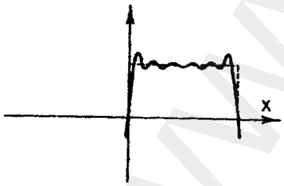
$$S_3(x) = S_4(x) = \frac{4}{\pi} (\sin x + \tfrac{1}{3} \sin 3x)$$

(c)



$$S_7(x) = S_8(x) = \frac{4}{\pi} (\sin x + \tfrac{1}{3} \sin 3x + \tfrac{1}{5} \sin 5x + \tfrac{1}{7} \sin 7x)$$

(d)



$$S_{11}(x) = S_{12}(x) = \frac{4}{\pi} (\sin x + \cdots + \tfrac{1}{11} \sin 11x).$$

(e)

شكل (9 ـ 1) المجموع الجزئي لدالة الموجية المربعة . والتقارب هنا ليس منتظماً .

المربعة . ومن السهولة ان نلاحظ فيها ان لكل N توجد نقاط قريبة من $x = 0$ و $x = \pm\pi$ حيث $|f(x) - S_N(x)|$ يساوي تقريباً من الواحد ، لذلك فإن التقارب يكون غير منتظم .

(والمخططات في الشكل (9 ـ 1) تبين ايضاً ان مجموع الجزئي لـ $f(x)$ يتجاوز غايته قرب $x = 0$. هذه الخاصية لسلسلة فوريه تسمى « ظاهرة كَبس » (*Gibbs' phenom enon*) والتي تظهر عادة قرب الطفرة) . من الناحية الاخرى ، الشكل (10 ـ 1) يبين مخططات الدالة المسننة ("sawtooth" function) والمجموع الجزئي لسلسلة فوريه لتلك الدالة .

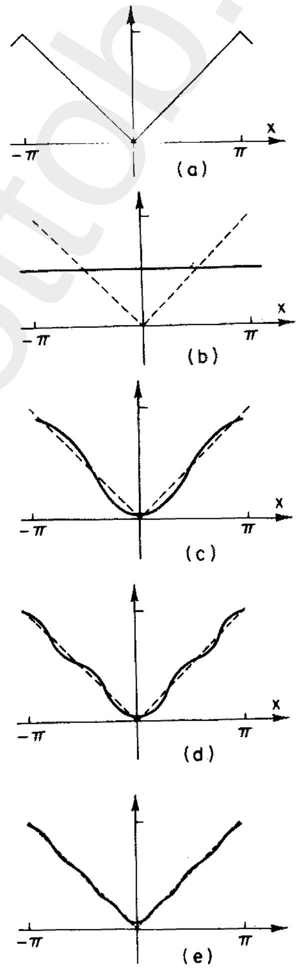
$$f(x) = |x|, \quad -\pi < x < \pi$$
$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

$$S_0(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$S_2(x) = S_1(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos x$$

$$S_3(x) = S_4(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} (\cos x + \tfrac{1}{9} \cos 3x)$$

$$S_5(x) = S_6(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} (\cos x + \tfrac{1}{9} \cos 3x + \tfrac{1}{25} \cos 5x)$$



شكل (١٥ ـ ١) المجموع الجزئي لدالة مسننة . والتقارب هنا منتظم .

ويظهر الانحراف الاعظم عادة عند النقطة $x = 0$ ويكون التقارب منتظماً .
واحدى طرق برهان التقارب المنتظم هي طريقة اختبار المعاملات .

مبرهنة 1 : اذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ متقاربة ، فإن سلسلة فوريه

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{a} + b_n \sin\frac{n\pi x}{a}$$

تتقارب بانتظام في الفترة $-a \le x \le a$ وفي كل الخط الحقيقي .

مثال : تأمل الدالة

$$f(x) = |x|, \quad -\pi < x < \pi$$

معاملات فوريه هي

$$a_0 = \frac{\pi}{2}, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\frac{-1 + (-1)^n}{n^2}, \quad b_n = 0.$$

وكون السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ متقاربة ، فإن سلسلة القيم المطلقة للمعاملات تكون متقاربة ، لذلك ، فإن سلسلة فوريه تقترب بانتظام في الفترة $-\pi \le x \le \pi$ الى $|x|$. ان سلسلة فوريه تقترب بانتظام الى توسيع الدورية لـ $f(x)$ في كل الخط الحقيقي . (لاحظ الشكل 10 ـ 1) .

هناك طريقة اخرى لبرهان التقارب المنتظم لسلسلة فوريه بواسطة اختبار الدالة f التي تولدها .

مبرهنة 2 . اذا كانت الدالة $f(x)$ دورية ، مستمرة ، ولها مشتقة مستمرة مقطعياً ، فان سلسلة فوريه المقابلة لـ f تتقارب بانتظام من $f(x)$ في كل المحور ـ x الحقيقي .

بالرغم من ان المبرهنة اعلاه تشترط ان تكون الدالة دورية ، الا انه يمكن تطبقها لدالة $f(x)$ المعرفة على الفترة $-a < x < a$ واذا كانت توسيع الدورية لـ f

تحقق شروط المبرهنة ، فان سلسلة فوريه لـ f تتقارب بانتظام في الفترة
$-a \leq x \leq c$

مثال . تأمل الدالة
$$f(x) = x, \quad -1 < x < 1$$

بالرغم من ان الدالة $f(x)$ مستمرة ومشتقتها مستمرة ايضاً في الفترة $-1 < x < 1$ فان توسيع الدورية لـ f ليست مستمرة . سلسلة فوريه لا يمكن ان تكون متقاربة بانتظام في اية فترة تضم $x = \pm 1$ لان توسيع الدورية لـ f لها طفرات هناك ، ولكن التقارب المنتظم يجب ان يحدث دالة مستمرة .

من الناحية الاخرى . فأن الدالة $f(x) = |\sin x|$ دورية ذات دورة 2π ، تكون مستمرة ، ومشتقتها مستمرة مقطعياً . لذلك ، فان سلسلتها الفوريه تتقارب بانتظام من $f(x)$ في كل مكان .

الآن ، سنعيد كتابة المبرهنة ـ 2 لدالة معرفة على الفترة $-a < x < a$ تستبدل الشرط على النقاط الطرفية بشرط الاستمزارية لتوسيع الدورية للدالة f

مبرهنة 3 . اذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة على الفترة $-a < x < a$ وان f مستمرة ومقيدة ومشتقتها مستمرة مقطعياً ، واذا كان $f(-a+) = f(a-)$، فان سلسلة فوريه لـ f تقترب بانتظام من f في الفترة $-a \leq x \leq a$ (السلسلة تقتــرب الى $f(a-) = f(-a+)$ عند $x = \pm a$).

ولكي تكون الدالة الفردية الدورية مستمرة ، فيجب ان تكون قيمتها صفراً عند النقطة $x = 0$ وعند النقاط الطرفية لفترة ـ دورة متناظرة (symmetric period-interval) . لذلك ، فان توسيع الدورية الفردية لدالة f في الفترة $0 < x < a$ يمكن ان يكون لها انقطاعات طفروية حتى لو كانت مستمرة حيث اعطيت اصلاً . في توسيع الدورية الزوجية لا يوجد مثل هذه المشاكل .

مبرهنة 4 . اذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة على الفترة $0 < x < a$ وان f مستمرة ومقيدة ومشتقتها مستمرة مقطعياً ،واذا كان $f(0+) = f(a-) = 0$ فان سلسلة فوريه الجيبية للدالة f تكون متقاربة بانتظام من f في الفترة $0 \leq x \leq a$ (السلسلة تكون متقاربة من 0 عند $x = 0$ و $x = a$)

مبرهنة 5 . اذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة في الفترة $0 < x < a$ وان f مستمرة ومقيدة ومشتقتها مستمرة مقطعياً ، فان سلسلة فوريه الجيب تمامية للدالة f تقترب بانتظام من f في الفترة $0 \le x \le a$ (السلسلة تكون متقاربة من $f(0+)$ عند $x = 0$ ومن $f(a-)$ عند $x = a$).

تمارين

1. حدد فيما اذا كانت سلسلة كل من الدوال الآتية متقاربة بانتظام ام لا ؟ ارسم مخطط كل دالة :

a. $f(x) = e^x, \quad -1 < x < 1$
b. $f(x) = \sinh x, \quad -\pi < x < \pi$
c. $f(x) = \sin x, \quad -\pi < x < \pi$
d. $f(x) = \sin x + |\sin x|, \quad -\pi < x < \pi$
e. $f(x) = x + |x|, \quad -\pi < x < \pi$
f. $f(x) = x(x^2 - 1), \quad -1 < x < 1$
g. $f(x) = 1 + 2x - 2x^3, \quad -1 < x < 1$

2. اذا كانت سلسلة فوريه للدالة

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad -\pi < x < \pi$$

متقاربة في كل النقاط . ما هي القيم التي تقترب السلسلة منها عند $x = 0$ ؟ وعند $x = \pi$ ؟ يكون التقارب منتظماً ؟ لماذا ؟

3. حدد فيما اذا كان جيب وجيب تمام السلسلة لكل من الدوال الاتية متقارب بانتظام . ارسم المخطط .

a. $f(x) = \sinh x, \quad 0 < x < \pi$
b. $f(x) = \sin x, \quad 0 < x < \pi$
c. $f(x) = \sin \pi x, \quad 0 < x < \frac{1}{2}$
d. $f(x) = 1/(1 + x), \quad 0 < x < 1$
e. $f(x) = 1/(1 + x^2), \quad 0 < x < 2$

4 . اذا كانت a_n و b_n تقتربان من الصفر عندما تقترب n من اللانهاية ، بين ان السلسلة

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha n}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

تقترب بانتظام $(\alpha > 0)$

5. حدد اي من السلاسل في تمرين 1 في البند السابق متقاربة بانتظام .

5 . عمليات على سلاسل فوريه OPERATIONS ON FOURIER SERIES

في سياق هذا الكتاب سوف نقدم بعض العمليات على سلاسل فوريه . والهدف من هذا البند هو ايجاد الشروط التي تجعل هذه العمليات مقبولة . هناك حالتان يجب ملاحظتهما . اولاً ، المبرهنات التي سنذكرها هنا ليست احسن ما يمكن ، بل توجد مبرهنات بفرضيات اضعف وتعطي نفس النتيجة . ثانياً ، عندما نتعامل مع الرياضيات ، فاننا نجري العمليات صورياً سواءً كانت مقبولة او غير مقبولة . والنتائج يجب بعدئذ ان تدقق لاثبات صحتها .

في هذا البند سوف نعطي النتائج حول دوال وسلاسل فوريه ذات دورة 2π . وتبقى النتائج صحيحة عندما تكون الدورة $2a$ بدلاً من 2π . بالنسبة للدوال المعرفة فقط على فترات منتهية ، فان توسيع الدورية يجب ان تحقق الفرضيات . سوف نشير الى الدالة $f(x)$ مع السلسلة بـ

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad (1)$$

مبرهنة 1 . سلسلة فوريه للدالة $cf(x)$ تكون معاملاتها ca_0, ca_n, cb_n (c ثابت) .

هذه المبرهنة هي نتيجة مباشرة للحقيقة القائلة ان الثابت يمر خلال التكامل . والحقيقة القائلة ان تكامل حاصل الجمع هو حاصل جمع التكاملات ، وتؤدي الى المبرهنة الاتية .

مبرهنة 2 . معاملات فوريه لحاصل جمع $f(x) + g(x)$ هي حواصل جمع المعاملات المقابلة لـ $f(x)$ و $g(x)$

المبرهنتان اعلاه تعتبران من المبرهنات المألوفة جداً بحيث ان القاريء يستخدمهما حتى بدون التفكير بهما ، والمبرهنات الآتية صعبة البرهان ، ولكنها ذات فائدة كبيرة .

مبرهنة 3 . اذا كانت $f(x)$ دورية ومستمرة مقطعياً ، فان سلسلة فوريه لـ f يمكن تكاملها حداً بعد حدٍ :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b a_0\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,dx. \qquad (2)$$

مبرهنة 4 . اذا كانت $f(x)$ دورية ومستمرة مقطعياً ، واذا كانت $g(x)$ مستمرة مقطعياً حيث $a \leq x \leq b$ ، فان

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b a_0\, g(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b (a_n \cos nx + b_n \sin nx)g(x)\,dx. \qquad (3)$$

في المبرهنتين (3) و (4) ، الدالة $f(x)$ تحتاج ان تكون مستمرة مقطعياً فقط . وليس من الضروري ان تكون سلسلة فوريه لـ $f(x)$ متقاربة على الاطلاق . ومع ذلك ، المبرهنتان تضمنان ان السلسلة في الطرف الايمن تكون متقاربة وتساوي التكامل في الطرف الايسر للمعادلتين (2) (3)

وأحد التطبيقات الهامة للمبرهنة (4) هو اشتقاق الصيغ لمعاملات فوريه في بند1. ادناه بعض التطبيقات على المبرهنتين (3) و (4) .

مثال . الدالة الدورية $g(x)$ في الفترة $0 < x < 2\pi$ ذات الصيغة

$$g(x) = x, \quad 0 < x < 2\pi$$

سلسلتها الفوريه هي

$$g(x) \sim \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

وباستخدام المبرهنتين (1) و (2) ، نجد ان الدالة $f(x)$ المعرفة بـ $f(x) = [\pi - g(x)]/2$ سلسلتها هي

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

وهذه المعالجة سوف تكون سهلة جبرياً اذا كان التقابل ~ مساواة .
الدالة $f(x)$ تحقق فرضيات المبرهنة (3) . لذلك يمكن اخذ تكامل السلسلة اعلاه من 0 الى b لنحصل على

$$\int_0^b f(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos nb}{n^2}.$$

المبرهنة (3) تضمن ان المساواة تتحقق لاي b . في الفترة من 0 الى 2π ونحصل على الصيغة $f(x) = (\pi - x)/2$. لذلك

$$\int_0^b f(x)\, dx = \frac{\pi b}{2} - \frac{b^2}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos nb}{n^2}, \quad 0 \leq b \leq 2\pi.$$

الآن ، ضع x بدل b، يكون لدينا

$$\frac{x(2\pi - x)}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi. \qquad (4)$$

خارج هذه الفترة ، يكون توسيع الدورية للدالة في الطرف الايسر مساوياً للسلسلة في الطرف الايمن .

ومن الجدير بالذكر ان السلسلة في الطرف الايمن للمعادلة (4) هي سلسلة فوريه للدالة في الطرف الايسر . اي ان

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x(2\pi - x)}{4}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad (5)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x(2\pi - x)}{4} \cos nx\, dx = \frac{-1}{n^2} \qquad (6)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{x(2\pi - x)}{4} \sin nx \, dx = 0. \tag{7}$$

المعادلتين (6) و (7) يمكن ايجادهما مباشرة . لكن المبرهنة (4) مع العلاقات التعامدية في بند ـ 1 تضمن الحل ايضاً . بالاضافة الى ذلك . المعادلة (5) تعطينا طريقة لايجاد السلسلة في الطرف الايسر .

ومع ان خاصية الوحدانية (uniqueness property) التي نصت عليها المبرهنة ، فهي طبيعية جداً وقد تم افتراضها صحيحة دون برهان ، وهي في الحقيقة نتيجة مباشرة للمبرهنة (4) .

مبرهنة 5 . اذا كانت الدالة $f(x)$ دورية ومستمرة مقطعياً ، فان سلسلتها الفوريه تكون وحيدة .

ويمكن القول ، ان سلسلة وحيدة فقط تقابل $f(x)$. وفي احوال كثيرة نستخدم الوحدانية بهذه الطريقة ، اذا كانت سلسلتها فوريه متساويتين (او تقابلان الدالة نفسها) ، فان معاملات الحدود المتشابهة يجب ان تتفق .

العملية الاخيرة التي سوف نناقشها هي المشتقة ، والتي تلعب دوراً اساسياً في التطبيقات .

مبرهنة 6 . اذا كانت الدالة $f(x)$ دورية ، ومستمرة ، وملساء مقطعياً ، فأن مشتقة سلسلة فوريه لـ $f(x)$ تتقارب من $f'(x)$ في كل نقطة x حيث $f''(x)$ موجودة .

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin nx + nb_n \cos nx). \tag{8}$$

الفرضيات على الدالة $f(x)$ تؤدي (لاحظ بند 4) الى ان سلسلة فوريه لـ$f(x)$ تتقارب بانتظام . اذا كانت $f(x)$ (او توسيع دوريتها) لا تكون مستمرة ، فمن المؤكد ان سلسلة المشتقات لـ $f(x)$ تكون غير متقاربة في بعض النقاط في الاقل .

وكمثال على هذا ، نأخذ الدالة الدورية ذات دورة 2π ، والتي بالصيغة

$$f(x) = |x|, \quad -\pi < x < \pi$$

هذه الدالة الحقيقة مستمرة وملساء مقطعياً وتساوي سلسلة فورية لها .

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \cdots\right).$$

حسب المبرهنة (5) ، فأن مشتقة السلسلة

$$\frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right)$$

تتقارب من $f'(x)$ في اية نقطة x حيث $f''(x)$ موجودة . الان ، مشتقة الدالة المسننة $f(x)$ (لاحظ الشكل 1.10) هي دالة الموجية ـ المربعة

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi \\ -1, & -\pi < x < 0 \end{cases} \qquad (9)$$

(لاحظ الشكل 9 ـ 1) . علاوة على ذلك ، فمن الواضح ان سلسلة الجيب اعلاه هي سلسلة فوريه للموجبة المربعة $f'(x)$ وانها تتقارب من القيم التي اعطيت بالمعادلة (9) ، عدا النقاط التي تكون فيها $f'(x)$ لها طفرات . وهذه بالضبط النقاط التي تكون فيها $f''(x)$ غير موجودة .

لاحقاً ، سوف يحدث باستمرار ان نعرف الدالة فقط من خلال سلسلتها الفوريه . لذلك ، فمن المهم ان نحصل على صفات الدالة عن طريق فحص معاملاتها ، وكما هو مبين في المبرهنة الآتية ؛

مبرهنة 7 . اذا كانت الدالة f دورية مع معاملات فوريه $a_n, b_n,$ ، واذا كانت السلسلة $\sum_{n=1} (|n^k a_n| + |n^k b_n|)$ تتقارب لبعض $k \geq 1$ ، فأن f لها مشتقات مستمرة $f^{(k)}$ و . . . و f' وان السلاسل الفوريه لها هي سلاسل مشتقات f .

فمثلاً ، تأمل الدالة المعرفة بالسلسلة

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\alpha} \cos nx,$$

حيث α هي وسيط موجب . في هذه الدالة يكون لدينا $a_0 = 0,\ a_n = e^{-n\alpha}$ $, b_n = 0$. وباستخدام اختبار التكامل ، فأن السلسلة $\Sigma n^k e^{-n\alpha}$ تتقارب لاي k . لذلك ، فأن f لها مشتقات لكل الرتب . وسلسلتا فوريه لـ f' و f'' هما ؛

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -ne^{-n\alpha} \sin nx,$$

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2e^{-n\alpha} \cos nx.$$

تمارين

1 . جد مجموع السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ باستخدام التكامل في المعادلة (5) .

2 . ارسم مخطط توسيع الدورية للدالة

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}, \quad 0 < x < 2\pi$$

ومشتقاتها $f'(x)$ وكذلك لـ

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

3 . لتكن f دالة بالصيغة $f(x) = x$، $0 < x < \pi$. ما هي مشتقتها ؟ وهل ان سلسلة فوريه الجيبية لـ f يمكن اشتقاتها حداً بعد حد ؟ وما هي بالنسبة لسلسلة فوريه الجيب تمامية ؟

4 . تأكد من صحة المعادلتين (6) و (7) باستخدام التكامل .

5 . لتكن الدالة $f(x)$ مستمرة وملساء مقطعياً في الفترة $0 < x < a$. ما هي الشروط الاضافية التي يجب ان تحققها $f(x)$ لكي تضمن ان سلسلة الجيب يمكن ان يتم اشتقاقها حداً بعد حدٍ ؟ كذلك سلسلة جيب التمام ؟

6 . هل ان مشتقة الدالة الدورية هي دورية ايضاً ؟ وهل ان تكامل الدالة الدورية هي دورية ايضاً ؟

7 . من المعلوم ان المساواة

$$\ln \left| 2 \cos \frac{x}{2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cos nx$$

تتحقق لكل x عدا النقاط التي هي من مضروبات π الفردية ، فهل يمكن اشتقاق سلسلة فوريه حداً بعد حد ؟

8 . استخدم السلسلة ادناه ، مع التكامل او التفاضل لايجاد سلسلة فوريه للدالة $0 < x < \pi. \quad p(x) = x(\pi - x),$

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx, \quad 0 < x < \pi$$

9 . لتكن $f(x)$ دالة فردية ، دورية ، وملساء مقطعياً ولها معاملات فورية الجيبية $b_1, b_2, \ldots$. بين ان الدالة المعرفة بـ

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin nx, \; t \geq 0,$$

لها الخواص الاتية :

a . $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 b_n e^{-n^2 t} \sin nx, \; t > 0,$

b . $u(0,t) = 0, \; u(\pi,t) = 0, \; t > 0,$

c . $u(x,0) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)).$

10 . لتكن الدالة f كما في التمرين 9 ، وان $u(x,y)$ معرفة بالصيغة

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-ny} \sin nx, \; y > 0.$$

بين ان $u(x,y)$ تحقق الخواص الاتية :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 b_n e^{-ny} \sin nx,\ y > 0.$$ .a

$$u(0,y) = 0,\ u(\pi,y) = 0,\ y > 0,$$ .b

$$u(x,0) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)).$$ .c

6 . متوسط الخطأ والتقارب في المتوسط

MEAN ERROR AND CONVERGENCE IN MEAN

بالرغم من اننا يمكن ان ندرس سلوك سلسلة غير منتهية ، فمن المعلوم أننا نستخدم سلسلة منتهية عادة في التطبيق العملي . ومن حسن الحظ ، ان لسلسلة فوريه بعض الخواص التي تجعل مثل هذا النوع من السلاسل مفيدة في هذا الاتجاه . وقبل البدء باعطاء هذه الخواص ، سوف نعطي صيغة مفيدة .

لتكن f دالة معرفة في الفترة $-a < x < a,$ ، حيث ان

$$\int_{-a}^{a} (f(x))^2\, dx$$

عدد منتيه . وليكن

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{a} + b_n \sin\frac{n\pi x}{a}$$

وان $g(x)$ لها سلسلة فوريه منتهية

$$g(x) = A_0 + \sum_{1}^{N} A_n \cos\frac{n\pi x}{a} + B_n \sin\frac{n\pi x}{a}.$$

لذلك يمكن ان نفرض العمليات الآتية :

$$\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\,dx = \int_{-a}^{a} f(x)\left[A_0 + \sum_{1}^{N} A_n \cos\frac{n\pi x}{a} + B_n \sin\frac{n\pi x}{a}\right] dx$$
$$= A_0 \int_{-a}^{a} f(x)\,dx + \sum_{1}^{N} A_n \int_{-a}^{a} f(x) \cos\frac{n\pi x}{a}\,dx$$
$$+ \sum_{1}^{N} B_n \int_{-a}^{a} f(x) \sin\frac{n\pi x}{a}\,dx.$$

يمكن ان نلاحظ ان هذه التكاملات هي مضروبات معاملات فورية للدالة f ، ويمكن اعادة كتابة الصيغة اعلاه بالشكل

$$\frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\,dx = 2a_0A_0 + \sum_{1}^{N} (a_nA_n + b_nB_n). \qquad (1)$$

الآن اذا اردنا ان نقرب $f(x)$ بواسطة سلسلة فورية المنتهية . فالصعوبة تكمن هنا في كيفية تقرير اي « تقريب » نعني . في كثير من الحالات يمكن ان نقيس التقريب ، واسهل هذه الحالات هي :

$$E_N = \int_{-a}^{a} (f(x) - g(x))^2\,dx. \qquad (2)$$

(حيث g هي دالة سلسلتها الفوريه تحتوي على حدود صعوداً الى $\cos(N\pi x/a)$. الذي هو من ضمنها) ومن الواضح ان E_N لا يمكن ان تكون سالبة ، واذا كانت الدالتين f و g « مغلقتين » ، فأن E_N تكون صغيرة لذلك فأن مسألتنا هي كيفية اختيار معاملات g لكي نصغر E_N . (نفرض أن N مُثبت)

لحساب E_N ، نقوم اولاً بنشر التكاملية :

$$E_N = \int_{-a}^{a} f^2(x)\,dx - 2\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\,dx + \int_{-a}^{a} g^2(x)\,dx. \qquad (3)$$

التكامل الاول لاعلاقة لهُ بـ g ؛ اما التكاملان الاخران فمن الواضح انهما يعتمدان على اختيار g ويمكن تحويرهما لكي نصغر E_N . وبما ان التكامل الاوسط يمكن ان نعبر عنهُ ، فلم يبق ، لنا سوى التكامل الاخير والذي يمكن ايجادهُ وذلك باحلال f محل g في المعادلة (1) .

$$\int_{-a}^{a} g^2(x)\,dx = a\left[2A_0^2 + \sum_{1}^{N} A_n^2 + B_n^2\right] \qquad (4)$$

والان لدينا صيغة E_N بدلالة المتغيرات A_0, A_n, B_n

$$E_N = \int_{-a}^{a} f^2(x)\,dx - 2a\left[2A_0a_0 + \sum_{1}^{N} A_na_n + B_nb_n\right] + a\left[2A_0^2 + \sum_{1}^{N} A_n^2 + B_n^2\right] \qquad (5)$$

ان مقدار الخطأ E_N ياخذ قيمته الصغرى عندما تكون كل المشتقات الجزئية بالنسبة للمتغييرات تساوي صفراً . لذلك يمكن حل المعادلات

$$\frac{\partial E_N}{\partial A_0} = -4aa_0 + 4aA_0 = 0$$

$$\frac{\partial E_N}{\partial A_n} = -2aa_n + 2aA_n = 0$$

$$\frac{\partial E_N}{\partial B_n} = -2ab_n + 2aB_n = 0.$$

وهذه المعادلات تتطلب ان يكون $A_0 = a_0, A_n = a_n, B_n = b_n$ لذلك فان g يجب اختيارها لتكون سلسلة فوريه المختصرة ((*truncated* Fourier series)) للدالة f,

$$g(x) = a_0 + \sum_{1}^{N} a_n \cos\frac{n\pi x}{a} + b_n \sin\frac{n\pi x}{a}$$

لكي تصغر E_N

والان بعد ان عرفنا اي اختيار لـ As ، Bs لتصغير E_N ، يمكن ان نحسب القيمة الصغرى وهي :

$$\min E_N = \int_{-a}^{a} f^2(x)\,dx - a\left[2a_0^2 + \sum_{1}^{N} a_n^2 + b_n^2\right]. \qquad (6)$$

وهذا الخطأ الاصغر يجب ان يكون اكبر او يساوي صفراً ، وبهذا يكون لدينا متباينة بيسل (Bessel inequality) .

$$\frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f^2(x)\,dx \geq 2a_0^2 + \sum_{1}^{N} a_n^2 + b_n^2. \qquad (7)$$

وهذه المتباينة تتحقق لاي N ، لذلك فان المتباينة تتحقق في الغاية عندما تقترب N من اللا نهاية والحقيقة فان المتباينة تصبح مساواة بارسفيل (Parseval's equality) :

$$\frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f^2(x)\,dx = 2a_0^2 + \sum_{1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2. \qquad (8)$$

وكنتيجة مهمة لمتباينة بيسل هي ان السلسلتين Σb_n^2 ، Σa_n^2 يجب ان تكونا متقاربتين اذا كان الطرف الايسر في المعادلتين (7) ، (8) منتهِ . وعليه فان العددين a_n ، b_n يجب ان يقتربا من 0 عندما تقترب n من اللانهاية .

وبمقارنة المعادلتين (6) ، (8) ، نحصل على تعبير مختلف للخطأ الاصغر

$$\min E_N = a\sum_{N+1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2.$$

هذه المساواة تتناقص الى الصفر عندما تزداد N . وكون $\min E_N$ هو حسب المعادلة (2) . متوسط الانحراف بين f وسلسلة فوريه المختصرة لـ f ، فاننا غالباً ما نقول « سلسلة فوريه لـ f تتقارب من f في المتوسط » . (وهذا نوع آخر من التقارب !)

الخلاصة : اذا كانت $f(x)$ معرفة في الفترة $-a < x < a$, وان

$$\int_{-a}^{a} f^2(x)\,dx$$

منته ، فان :

1 . من خلال جميع السلاسل المنتهية التي بالصيغة

$$g(x) = A_0 + \sum_{1}^{N} A_n \cos\frac{n\pi x}{a} + B_n \sin\frac{n\pi x}{a}$$

فان افضل تقريب لـ f من ناحية الخطأ الموصوف في المعادلة (2) هو سلسلة فوريه المختصرة لـ f :

$$a_0 + \sum_{1}^{N} a_n \cos\frac{n\pi x}{a} + b_n \sin\frac{n\pi x}{a},$$

2 $$\frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f^2(x)\,dx = 2a_0{}^2 + \sum_{1}^{\infty} a_n{}^2 + b_n{}^2,$$

3 . $$a_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}\,dx \to 0,$$

$$b_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx \to 0, \text{ عندما } n \to \infty,$$

4 . سلسلة فورية لـ f تتقارب من f نحو المتوسط . الخاصتين (2) ، (3) لهما اهمية كبيرة لحساب المتغيرات لمعاملات فوريه .

تمارين

1 . استخدم خواص سلسلة فوريه لايجاد التكامل المحدد

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\ln\left|2\cos\frac{x}{2}\right|\right)^2 dx.$$

(تلميح : لاحظ بند 9 ، معادلة (4) وبند (5) معادلة (5) .)

2 . تحقق من صحة مساواة بارسفيل لكل من الدوال الاتية :

$f(x) = \sin x, \quad -\pi < x < \pi.$ **b** $f(x) = x, \quad -1 < x < 1$ **a**

3 . ماذا يمكن ان نقول عن سلوك معاملات فوريه لكل من الدوال الاتية عندما تكون $n \to \infty$

a. $f(x) = |x|^{1/2}, \quad -1 < x < 1$ **b.** $f(x) = |x|^{-1/2}, \quad -1 < x < 1$

4 . كيف يمكن ان نعرف ان E_N له نهاية صغرى وليس عظمى ؟

5 . اذا كانت الدالة f معرفة في الفترة $-a < x < a$ ولها معاملات فوريه .

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ماذا يمكن ان نقول عن

$$\int_{-a}^{a} f^2(x)\, dx?$$

6 . بين انه ، عندما يكون $n \to \infty$ ، فان معاملات فوريه الجيبية للدالة

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad -\pi < x < \pi$$

تقترب من ثابت غير صفري . (بما ان هذه الدالة فردية ، فيمكن ان نأخذ معاملات جيب التحام على انها اصفاراً ، بالرغم ان مثل هذه المعاملات قد لاتظهر) استخدم الحقيقة

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

7 . برهان التقارب

PROOF OF CONVERGENCE

في هذا البند سوف نثبت مبرهنة تقارب فوريه التي اعطيت في بند 3 . معظم البرهان لايتطلب سوى افكاراً بسيطة حول حسبان التفاضل والتكامل ، وقبل اعطاء البرهان ، سوف نعطي المأخوذات الثلاث الاتية :

مأخوذة 1 . لكل $N = 1,2, \ldots,$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos ny\right)dy = 1.$$

مأخوذة 2 . لكل $N = 1,2, \ldots,$

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos ny = \frac{\sin (N + \frac{1}{2})\, y}{2 \sin \frac{1}{2}y}$$

مأخوذة 3 . اذا كانت $\phi(y)$ مستمرة مقطعياً ، $-\pi < y < \pi$ ، فان معاملاتها الفوريه تؤول الى الصفر مع n :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi(y) \cos ny\, dy = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi(y) \sin ny\, dy = 0.$$

في التمرينين 1 و 2 في هذا البند ، طلبنا التحقق من المأخوذتين 1 و 2 (لاحظ ايضا تمرين 17 في التمارين المتنوعة في نهاية الفصل .) اما المأخوذة 3 فقد اعطي برهانها في بند 6 .

المبرهنة التي سنعطي برهانها تم اعادة صياغتها لكي تكون مصدراً سهلاً . استعملت الدورة 2π لاغراض طباعية فقط ، وسوف نلاحظ ان اي دورة يمكن تبديلها وذلك باجراء تبديل بسيط في المتغيرات .

مبرهنة . اذا كانت $f(x)$ ملساء مقطعياً ودورية ذات دورة 2π ، فان سلسلة فوريه المقابلة لـ f تتقارب في كل نقطة x ، وان مجموع السلسلة هو :

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)). \qquad (1)$$

البرهان . اذا اخترنا النقطة x ، لكي تبقى ثابتة ، نفرض ان f مستمرة في x ، لذلك ، فان مجموع السلسلة يجب ان يكون $f(x)$. اي ان

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) - f(x) = 0.$$

حيث S_N هو المجموع الجزئي لسلسلة فوريه للدالة f ،

$$S_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n\cos nx + b_n\sin nx. \qquad (2)$$

بالطبع ، as ، bs هي معاملات فوريه للدالة f ،

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z)dz, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z)\cos nz\, dz. \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z)\sin nz\, dz. \end{aligned} \qquad (3)$$

التكاملات تحتوي على z كمتغير للتكامل ، وهذا لا يؤثر على قيمة التكاملات .

الجزء 1 . تحويل $S_N(x)$.

لكي نجد العلاقة بين $S_N(x)$ و f ، نستبدل المعاملات في المعادلة (2) بالتكاملات التي تعبر عنهم ونستخدم بعض المفاهيم الجبرية في النتائج .

$$S_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z)dz + \sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z)\cos nz\, dz\cos nx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z)\sin nz\, dz\sin nx\right] \qquad (4)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z)dz + \sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z)\cos nz\cos nx\, dz + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z)\sin nz\sin nx\, dz\right] \qquad (5)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z)dz + \sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z)(\cos nz\cos nx + \sin nz\sin nx)dz\right] \qquad (6)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N}\cos nz\cos nx + \sin nz\sin nx\right)dz \qquad (7)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z) \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos n(z - x) \right) dz. \qquad (8)$$

والان في هذه الصيغة الموجزة $S_N(x)$ ، نبدل متغير التكامل من z الى $x - z = y$ ؛

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi + x}^{\pi + x} f(x + y) \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos ny \right) dy. \qquad (9)$$

لاحظ ان كلا العاملين في التكاملية يكونان دوريين بدورة قدرها 2π . وحدود التكامل يمكن ان يكون اي فترة ذات طول 2π وبدون تغيير في النتيجة . (لاحظ تمرين 5 بند 1 .) وعليه يكون ،

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + y) \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos ny \right) dy. \qquad (10)$$

الجزء 2 . ليكن $S_N(x) - f(x)$.

بما اننا نريد ان نبين ان الفرق $S_N(x) - f(x)$ يؤول الى الصفر ، فيجب ان يكون $f(x)$ منسجماً مع $S_N(x)$. تذكر ان x ثابتة (بالرغم من انها اختيارية) ، لذلك فان $f(x)$ تكون عدداً . وباستخدام المأخوذة 1 نحصل على الصيغة الملائمة ،

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos ny \right) dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos ny \right) dy \end{aligned} \qquad (11)$$

وباستخدام المعادلة (10) اعلاه لتمثيل $S_N(x)$ ، نجد

$$S_N(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x + y) - f(x)) \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos ny \right) dy \qquad (12)$$

الخطوة التالية هي استخدام مأخوذة 2 لتحل محل المجموع في المعادلة (12) . والنتيجة هي :

$$S_N(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x+y) - f(x)) \frac{\sin(N+\frac{1}{2})y}{2\sin\frac{1}{2}y}\, dy \qquad (13)$$

ولكن صيغة الجمع للجيوب تعطي المساواة

$$\sin(N+\tfrac{1}{2})y = \cos Ny \sin\tfrac{1}{2}y + \sin Ny \cos\tfrac{1}{2}y.$$

وبتعويض هذه الصيغة في المعادلة (13) واستخدام بعض خواص التكاملات ، نحصل على

$$\begin{aligned} S_N(x) - f(x) = {} & \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x+y) - f(x))\frac{1}{2}\cos Ny\, dy \\ & + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x+y) - f(x)) \frac{\cos\frac{1}{2}y}{2\sin\frac{1}{2}y} \sin Ny\, dy. \end{aligned} \qquad (14)$$

التكامل الاول في المعادلة (14) يمكن تمييزه على انه معامل فوريه الجيب تمامي للدالة

$$\phi(y) = \frac{1}{2}(f(x+y) - f(x)). \qquad (15)$$

وكون f دالة ملساء مقطعياً ، فان ϕ كذلك ، وان غاية التكامل الاول تساوي صفراً عندما تزداد N ، حسب المأخوذة 3 .

اما التكامل الثاني في المعادلة (14) فيمكن تميزه على انه ، معامل فورية الجيبي للدالة

$$\phi(y) = \frac{f(x+y) - f(x)}{2\sin\frac{1}{2}y} \cos\tfrac{1}{2}y. \qquad (16)$$

لاجل تتبع الخطوات السابقة نفسها ، يجب ان نبين ان $\phi(y)$ مستمرة مقطعياً في الاقل ، $-\pi \leq y \leq \pi$. والعقبة الوحيدة التي نواجهها هي أن نبين ان القسمة على الصفر عند $y = 0$ لاتؤدي الى ان يكون لـ $\phi(y)$ انقطاع سيء في تلك النقطة .

اولا ، اذا كانت f مستمرة وقابلة الاشتقاق قرب x فان $f(x + y) - f(x)$ تكون مستمرة وقابلة الاشتقاق قرب $y = 0$ وباستخدام قاعدة لوبتال (L'Hôpital's rule) نحصل على

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(x + y) - f(x)}{2 \sin\frac{1}{2}y} = \lim_{y\to 0}\frac{f'(x + y)}{\cos\frac{1}{2}y} = f'(x). \tag{17}$$

تحت هذه الشروط ، الدالة $\phi(y)$ معادلة (16) لها انقطاع زائل عند $y = 0$ ولهذا تكون مستمرة مقطعياً .

ثانياً ، اذا كانت f مستمرة عند x ولها ركن هنا . فان $f(x + y) - f(x)$ تكون مستمرة ولها ركن عند $y = 0$ في هذه الحالة ، فان تطبيق قاعدة لوبتال مع غاية من طرف واحد ، تبين

$$\lim_{y\to 0+}\frac{f(x + y) - f(x)}{2 \sin\frac{1}{2}y} = \lim_{y\to 0+}\frac{f'(x + y)}{\cos\frac{1}{2}y} = f'(x+) \tag{18}$$

$$\lim_{y\to 0-}\frac{f(x + y) - f(x)}{2 \sin\frac{1}{2}y} = \lim_{y\to 0-}\frac{f'(x + y)}{\cos\frac{1}{2}y} = f'(x-). \tag{19}$$

تحت هذه الشروط ، الدالة $\phi(y)$ في المعادلة (16) لها انقطاع بطفرة عند $y = 0$ ، ومرة اخرى تكون مستمرة مقطعياً .

في اي من هذه الحالات ، يمكن ان نلاحظ ان التكامل الثاني في المعادلة (14) هو معامل فوريه الجيبي لدالة مستمرة مقطعياً . وباستخدام مأخوذة 3 ، فان غايتها تساوي صفراً عندما تزداد N ، وهذا يكمل البرهان لكل x عندما تكون f مستمرة .

الجزء 4 اذا كانت f غير مستمرة عند x .

والان ، دعنا نفرض ان f لها انقطاع بطفرة عند x . في هذه الحالة ، يجب ان نعود الى الجزء 2 ونعطي مجموع السلسلة بالشكل

$$\frac{1}{2}(f(x+)+f(x-)) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x+)\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos ny\right)dy + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x-)\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos ny\right)dy. \tag{20}$$

هنا ، استخدمنا خاصية الزوجية للتكاملية في مأخوذة 1 ونكتب

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos ny\right)dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos ny\right)dy = \frac{1}{2}. \tag{21}$$

والان حصلنا على طريقة ملائمة لكتابة الكمية لتكون محدودة :

$$\begin{aligned} S_N(x) - \frac{1}{2}(f(x+)+f(x-)) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x+y)-f(x+))\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos ny\right)dy \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(f(x+y)-f(x-))\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos ny\right)dy. \end{aligned} \tag{22}$$

ان فترة التكامل $S_N(x)$ كما موضح في المعادلة (10) ثم تقسيمها الى قسمين لكي تطابق التكاملين في المعادلة (20) .

والخطوة الاخيرة تحتاج ان نبين ان كلا من التكاملين في المعادلة (22) يقترب من الصفر عندما تزداد N . وكون الاسلوب هو نفسه كما في الجزء 3 فان هذا يترك كتمرين

دعنا نؤكد الأن على ان جوهر البرهان يحتاج لان نبين ان الدالة من المعادلة (16) .

$$\phi(y) = \frac{f(x+y)-f(x)}{2\sin\frac{1}{2}y}\cos\tfrac{1}{2}y \tag{23}$$

(او دالة مشابهة يمكن ان تظهر من التكاملية في المعادلة (22) ، ليس لها انقطاع سيء عند $y = 0$ '

تمارين

1 . اثبت المأخوذة 2 . اضرب في $2\sin\frac{1}{2}y$. واستخدم المتطابقة

$$\sin\tfrac{1}{2}y\cos ny = \tfrac{1}{2}(\sin(n+\tfrac{1}{2})y - \sin(n-\tfrac{1}{2})y).$$

لاحظ ان معظم السلسلة سوف تختفي . (اكتب النتيجة عندما تكون $N = 3$)

2 . اثبت المأخوذة 1 بواسطة تكامل المجموع حداً بعد حد .

3 . لتكن $f(x) = f(x + 2\pi)$ وان $f(x) = |x|$ حيث ان $-\pi < x < \pi$ تذكر ان f مستمرة ، ولها ركن عند $x = 0$. ارسم مخطط الدالة $\phi(y)$ كما عرفت في المعادلة (16) اذا كان $x = 0$ جد

$\phi(0-)$ $\phi(0+)$

4 . لتكن f التوسيع الدوري الفردي للدالة التي صيغتها $\pi - x$ حيث $0 < x < \pi$ في هذه الحالة ، f لها انقطاع بطفرة عند $x = 0$

افرض $x = 0$ ارسم مخطط الدوال

$$\phi_R(y) = \frac{f(x+y) - f(x+)}{2\sin\frac{1}{2}y}\cos\tfrac{1}{2}y \ (y > 0)$$

$$\phi_L(y) = \frac{f(x+y) - f(x-)}{2\sin\frac{1}{2}y}\cos\tfrac{1}{2}y \ (y < 0)$$

(هاتان الدالتان تظهران اذا كانت التكاملية في المعادلة (22) كما في الجزء 3 من البرهان .)

5 . تأمل الدالة f الدورية بدورة 2π والتي لها الصيغة $f(x) = |x|^{3/4}$ حيث $-\pi < x < \pi$.

a . بين ان f مستمرة عند $x=0$ ولكنها ليست ملساء مقطعياً .

b. بين ان الدالة $\phi(y)$ (من المعادلة (16) ، عند $x = 0$) تكون مستمرة مقطعياً ، $-\pi<x<\pi$ ، عدا الانقطاع السيء عند $y = 0$

حـ . بين ان معاملات فوريه لـ $\phi(y)$ تؤول الى الصفر عندما تزداد n بالرغم من الانقطاع السيء ..

8 . تحديد معاملات فورية عددياً .

NUMERICAL DETERMINATION OF FOURIER COEFFICIENTS

توجد دوال عديدة لايمكن تحديد معاملاتها الفوريه تحليلياً لانها تشمل تكاملات غير معروفة بدلالة دوال تستخرج بسهولة ، كذلك ، يمكن ان يحدث ان تكون الدالة غير معروفة بشكل واضح ، ولكن يمكن ايجاد قيمتها عند بعض النقاط . في اية من الحالتين ، فان سلسلة فوريه للدالة يمكن ايجادها ، وفي هذه الحالة يجب استخدام التكنيك العددي لاعطاء قيمة تقريبية للتكاملات التي تعبر عن معاملاتها فوريه .

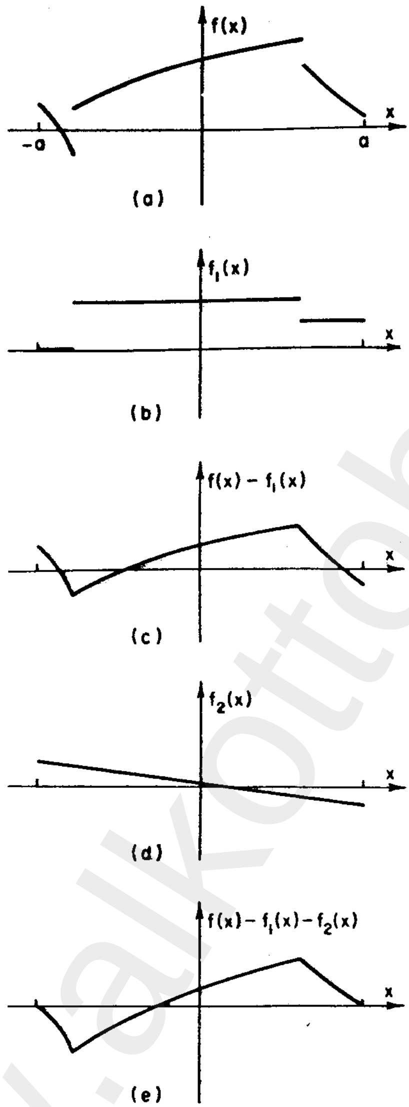
سوف نفرض ان الدالة التي نريد ان نعطي قيمة تقريبية لمعاملاتها تكون مستمرة ، دورية ، وملساء مقطعياً . واذا لم تكن هذه الحالة ، فان الدالة الملساء مقطعياً يمكن تحويرها بجعلها منسجمة لهذا الوصف وذلك باتباع الخطوات الموضحة في الشكل 11 ـ 1 .

لتكن الدالة $f(x)$ مستمرة ، ملساء مقطعياً ، ودورية ذات دورة $2a$. ولتكن الفترة $-a\le x\le a$ مقسمة الى r من الفترات الجزيئة المتساوية وان نقاطها الطرفية هي $-a = x_0, x_1, \ldots, x_r = a$ فان معاملات فوريه التقريبية للدالة f هي (الاشارة تشير الى القيم التقريبية) ،

$$\hat{a}_0 = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_r)}{r}$$

$$\hat{a}_n = \frac{(f(x_1)\cos(n\pi/a)x_1 + \cdots + f(x_r)\cos(n\pi/a)x_r)\,\Delta x}{(\cos^2(n\pi/a)x_1 + \cdots + \cos^2(n\pi/a)x_r)\,\Delta x} \qquad (1)$$

$$\hat{b}_n = \frac{(f(x_1)\sin(n\pi/a)x_1 + \cdots + f(x_r)\cos(n\pi/a)x_r)\,\Delta x}{(\sin^2(n\pi/a)x_1 + \cdots + \sin^2(n\pi/a)x_r)\,\Delta x}.$$



شكل 11 ـ 1 . تهيئة الدالة للتكامل العددي لمعاملات فوريه

(a) بيان الدالة الملساء مقطعياً في الفترة المعطاة $-a < x < a$ (b) بيان $f(x)$ الذي له طفرة في الموقع والقيمة نفسها كما في $f(x)$. المعاملات يمكن ايجادها تحليليا . (c) بيان $f(x) - f_1(x)$ هذه الدالة ليس لها طفرة في $-a < x < a$ (d) بيان $f_2(x)$. توسيع الدورية لـ $f_2(x)$ $f(x) - f_1(x)$ لها طفرة في القيمة نفسها عند $x = \pm a$ وهكذا معاملات f_2 يمكن ايجادها تحليلياً . (e) بيان سلسلة فورية لـ $f_3(x) = f(x) - f_1(x) - f_2(x)$ تتقارب بانتظام . (المعاملات تقترب من الصفر بسرعة) .

المعامل $\hat{a}_0$ هو القيمة المتوسطة التقريبية للدالة f . وللمعادلات الاخرى ، سوف نبدأ من صيغ المعاملات التي حصلنا عليها بواسطة التعامدية :

$$a_n = \frac{\int_{-a}^{a} f(x) \cos(n\pi x/a)dx}{\int_{-a}^{a} \cos^2(n\pi x/a)dx}.$$

أن التكاملات في البسط والمقام يمكن تقريبهما بواسطة مجموع ريمان **(Riemann Sum)**

$$\int_{-a}^{a} f(x) \cos\frac{n\pi x}{a}\, dx \cong \left(f(x_1) \cos\frac{n\pi x_1}{a} + \cdots + f(x_r) \cos\frac{n\pi x_r}{a}\right) \Delta x.$$

وفي جميع الاحوال ، $\Delta x = 2a/r$.
المقامات في المقدار اعلاه يمكن ايجادها باستخدام بعض الحسابات :

$$\cos^2 \frac{n\pi x_1}{a} + \cdots + \cos^2 \frac{n\pi x_r}{a} = \begin{cases} r, & \text{عندما } n = 0, \frac{r}{2}, r, \ldots \\ \frac{r}{2}, & \text{خلاف ذلك} \end{cases} \qquad (2)$$

$$\sin^2 \frac{n\pi x_1}{a} + \cdots + \sin^2 \frac{n\pi x_r}{a} = \begin{cases} 0, & \text{عندما } n = 0, \frac{r}{2}, r, \ldots \\ \frac{r}{2}, & \text{خلاف ذلك} \end{cases} \qquad (3)$$

بالطبع ، n يمكن ان تساوي $r/2$ فقط عندما تكون r زوجية .

والان يمكن ان نبسط هذه الصيغ . اذا اخذنا بنظر الاعتبار النتائج اعلاه ، وعليه يكون :

$$\hat{a}_0 = \frac{1}{r}(f(x_1) + \cdots + f(x_r))$$

$$\hat{a}_n = \frac{2}{r}\left(f(x_1)\cos\frac{n\pi x_1}{a} + \cdots + f(x_r)\cos\frac{n\pi x_r}{a}\right) \qquad (4)$$

$$\hat{b}_n = \frac{2}{r}\left(f(x_1)\sin\frac{n\pi x_1}{a} + \cdots + f(x_r)\sin\frac{n\pi x_r}{a}\right)$$

وهذه تتحقق عندما تكون $n < r/2$. واذا كانت r زوجية $(r = 2q)$ فان معاملات الجيب $\hat{b}_q$ تكون غير معرفة ، وان معاملات جيب التمام هي

$$\hat{a}_q = \frac{1}{r}\left(f(x_1)\cos\frac{q\pi x_1}{a} + \cdots + f(x_r)\cos\frac{q\pi x_r}{a}\right) \qquad (5)$$

والسؤال الان هو : ما هو عدد المعاملات التي تحسب عددياً وهي مضبوطة نسبياً بما ان قيم الدوال عند $x_1, \ldots, x_r$ تمثل r قطعة من المعلومات ، لذلك يمكن ان نتوقع r من المعاملات تكون مضبوطة نسبياً ، وهذه بالفعل هي الحالة ، وعليه ، اذا كان r عدداً زوجياً $r = 2q$ مثلاً ، يمكن ان نجد

$$\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{b}_1, \ldots, \hat{a}_q$$

وليس $\hat{b}_q$ ، لانها غير معرفة . (تذكر ان $\hat{a}_q$ يمكن ايجادهُ من الصيغة الخاصة) اذا كان r عدداً فردياً ، $r = 2q + 1$ مثلاً ، يمكن ان نجد

$$\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{b}_1, \ldots, \hat{a}_q, \hat{b}_q.$$

الصيغ في المعادلة (4) اعلاه تم اشتقاقها من الحالة التى تكون فيها النقاط $x_0, x_1, \ldots, x_r$ متساوية المسافات في الفترة $-a \le x \le a$. من الناحية الاخرى ، فان هذه تبقى سارية المفعول للنقاط المتساوية المسافات في الفترة $0 \le x \le 2a$ اي ان :

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{2a}{r}, x_2 = \frac{4a}{r}, \ldots, x_r = 2a. \qquad (6)$$

لاحظ ايضا عندما تكون $f(x)$ معرفة في الفترة $0 \le x \le a$ ، وان معاملات الجيب او جيب التمام يمكن تحديدها ، فان الصيغ يمكن اشتقاقها من الصيغ اعلاه . ولتكن الفترة مقسمة الى s من الفترات الجزئية المتساوية بنقاط طرفية $0 = x_0, x_1, \ldots, x_s = a$. فان معاملات فوريه التقريبية هي .

$$\hat{a}_0 = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{s-1}) + \frac{1}{2}f(x_s)\right)$$

$$\hat{a}_n = \frac{2}{s}\left(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1)\cos\frac{n\pi x_1}{a} + \cdots + \frac{1}{2}f(x_s)\cos\frac{n\pi x_s}{a}\right) \qquad (7)$$

$$n = 1, \ldots, s-1$$

$$\hat{a}_s = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1)\cos\frac{s\pi x_1}{a} + \cdots + \frac{1}{2}f(x_s)\cos\frac{s\pi x_s}{a}\right)$$

او

$$\hat{b}_n = \frac{2}{s}\left(f(x_1)\sin\frac{n\pi x_1}{a} + \cdots + f(x_{s-1})\sin\frac{n\pi x_{s-1}}{a}\right),$$

و

$$n = 1,2, \ldots, s. \qquad (8)$$

في الصيغ لـ as ، النقاط الطرفية تشكل عوامل لـ $\frac{1}{2}$. ويظهر هذا بسبب انه اذا كان التوسع الزوجي (even extension) للدالة f قد تم استخدامهُ في المعادلة (4) ، فان قيم f عند 0 و a تحسب مرة واحدة بينما قيم f في النقاط التي بينها تحسب مرتين .

وفي المعادلة (8) ، القيم عند النقاط الطرفية لا تدخل ، لان دالة الجيب هنالك تساوي صفراً .

والصيغة المهمة لسلسلة فوريه التقريبية هي : اذا كانت

$$F(x) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1\cos\frac{\pi x}{a} + \hat{b}_1\sin\frac{\pi x}{a} + \cdots$$

هي سلسلة فورية المنتهية وباستعمال مجموع r من $\hat{a}$s و $\hat{b}$s محسوبة من الصيغ اعلاه ، فان

$$F(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

وعليه فان مخطط $F(x)$ يقطع مخطط $f(x)$ عند النقاط x_i

مثال . احسب معاملات فوريه التقريبية للدالة $f(x) = (\sin x)/x$ في الفترة $-\pi < x < \pi$

بما ان f دالة زوجية ، فسيكون لها سلسلة جيب التمام وسوف نبسط الحسابات باستخدام صيغ نصف المدى ونجعل s زوجية .

اذا اخذنا $s = 6$ $x_0 = 0$ ، $x_1 = \pi/6, \ldots, x_5 = 5\pi/6, x_6 = \pi$

المعلومات العددية معطاة في الجدول (1.2) .

جدول 1.2

i	x_i	$\cos x_i$	$\cos 2x_i$	$\cos 3x_i$	$(\sin x_i)/x_i$
0	0	1.0	1.0	1.0	1.0
1	$\frac{\pi}{6}$	0.86603	0.5	0	0.95493
2	$\frac{\pi}{3}$	0.5	−0.5	−1.0	0.82699
3	$\frac{\pi}{2}$	0	−1.0	0	0.63662
4	$\frac{2\pi}{3}$	−0.5	−0.5	1.0	0.41350
5	$\frac{5\pi}{6}$	−0.86603	0.5	0	0.19099
6	π	−1.0	1.0	−1.0	0.0

جدول 1.3

n	$\hat{a}_n$	a_n	الخطأ
0	0.58717	0.58949	0.00232
1	0.45611	0.45141	0.00470
2	−0.06130	−0.05640	0.00490
3	0.02884	0.02356	0.00528

ان نتائج هذه الحسابات موضحة في الجدول (1.3) وفي الجهة اليسرى أعطيت المعاملات التقريبية التي تم حسابها من الجدول . وفي الجهة اليمنى اعطيت القيم الصحيحة (لحد خمس مراتب) ، حصلنا عليها من جدول تكامل الجيب (لاحظ تمرين 2) .

ولاجراء الحساب اليدوي ، نختار s من مضاعفات 4 لكي تجعل العديد من جيوب التمام اعداداً « سهلة » مثل (1) او 0.5 . واذا تم اجراء الحساب باستخدام

الحاسبات الالكترونية . ففي هذه الحالة لا توجد اعداد « سهلة » ، ويظهر وجود فائدة بأختيار s كعدد اولي . (لماذا ؟) .

الشكل (12ـ1) يبين قطعة برنامج بلغة بيسك (BASIC) .يمكن ان يحسب المعاملات في المعادلتين (4) و (5) . ولكتابة البرنامج ، فان القطعة المعطاة يجب ان تُسبق بالعبارات : حدد R (العدد r كما في المعادلتين (4) و (5)) ؛ بعد الترتيبات Y ، A و B ؛ اعط هذه القيم $Y(1), \ldots, Y(R)$ التي هي قيم الدوال $f(x_1), \ldots, f(x_r)$ في المعادلة (4) . كذلك ، يجب اعطاء بعض المتوسطات لعرض المعاملات التقريبية $A(Q)$ و $A(1)$ و $A(0)$ و.. $B(Q)$. $B(1)$

```
1000 REM FOURIER COEFFICIENTS
1010 Q=R/2
1020 H=3.141593*2/R
1030 FOR K=1 TO Q
1040 A=0
1050 B=0
1060 FOR I=1 TO R
1070 A=A+Y(I)*COS(H*K*I)
1080 B=B+Y(I)*SIN(H*K*I)
1090 NEXT I
1100 A(K)=A*2/R
1110 B(K)=B*2/R
1120 NEXT K
1130 A=0
1140 FOR I=1 TO R
1150 A=A+Y(I)
1160 NEXT I
1170 A(0)= A/R
1180 IF Q>INT(Q) THEN 1220
1190 Q=INT(Q)
1200 A(Q)=A(Q)/2
1210 B(Q)=0
1220 END
```

شكل 12 ـ 1

قطعة برنامج بلغة بيسك لحساب معاملات فورية التقريبية .

تمارين

1 . بما ان الجدول في المثال يعطي $\frac{\sin x}{x}$ لسبع نقاط ، فان سبعة معاملات لجيب التمام يمكن حسابها . جد $\hat{a}_6$.

2 . عبر عن معاملات فوريه الجيب تمامية في المثال بدلالة التكاملات التي في الصيغة

$$\mathrm{Si}((n+1)\pi) = \int_0^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

وهذه هي دالة تكامل الجيب وهي مجدولة في عدة كتب ، خاصة الكتاب الموسوم "*Handbook of Mathematical Functions*" تاليف Abramowitz و Stegun ، 1972 .

3 . الارقام ادناه تمثل عمق الماء في بحيرة اونتاريو (مطروحاً منه بيانات انخفاض الماء بـ 242.8 قدم) في بداية الشهر المقابل له . واذا فرضنا ان مستوى الماء هو دالة دورية ذات دورة سنة واحدة ، وان القياسات اخذت في فترات متساوية . احسب معاملات فوريه ... $\hat{a}_0, \hat{a}_1, b_1, \hat{a}_2, b_2, \ldots$ ، لذلك عين متوسط المستوى ، التموجات المائية بدورات 12 شهراً ، 6 اشهر ، 4 اشهر ... الخ . افرض ان x_0 تمثل شهر كانون الثاني و ... و x_{11} تمثل شهر كانون الاول و x_{12} تمثل شهر كانون الثاني مرة اخرى .

كانون الثاني	0.75	تموز	2.35
شباط	0.60	آب	2.15
آذار	0.65	ايلول	1.75
نيسان	1.15	تشرين الاول	1.05
مايس	1.80	تشرين الثاني	1.00
حزيران	2.25	كانون الاول	0.90

FOURIER INTEGRAL — 9 . تكامل فوريه

في البندين 1 و 2 من هذا الفصل طورنا مفهوم التمثيل للدالة الدورية بدلالة الجيوب وجيوب التمام والتي لها الدورة نفسها . وعليه . فبدلالة توسيع الدورية . حصلنا على تمثيل سلاسل لدوال معرفة في فترة منتهية فقط . الان يجب ان نتعامل مع دوال ليست دورية معرفة على x بين ∞ و $-\infty$ هل يمكن تمثيل دوال كهذه بدلالة الجيوب وجيوب التمام ؟

ان تمثيلاً كهذا يمكن ان يكون موجوداً لبعض الدوال غير الدورية . وهذا واضح من بعض الصيغ التكاملية البسيطة . فمثلاً . من المعروف ان التكامل المحدد الآتي يعتمد على الوسيط x كما هو مبين .

$$\int_0^\infty \frac{\sin \lambda x}{\lambda}\, d\lambda = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x < 0 \end{cases} \qquad (1)$$

من هذه النقطة فانه ليس من الصعوبة ان نحدد (تمرين 10) حيث ان التكامل

$$K(x, h) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin \lambda h}{\lambda} \cos \lambda x \, d\lambda \qquad (2)$$

يعتمد على وسيطين x و h . في هذه الطريقة (افرض ان $h > 0$)

$$K(x, h) = \begin{cases} 1, & |x| < h \\ 0, & |x| > h. \end{cases} \qquad (3)$$

الحقيقة هي ان هذه الدالة (مخططها كدالة بدلالة x هي موجات نابضة مستطيلة عرضها $2h$ وارتفاعها 1) والتي يمكن تمثيلها بدلالة $\cos \lambda x$ وهي المفتاح الذي نستخدمه لتمثيل دوال اخرى .

افرض ان الدالة $f(x)$ معرفة لكل x ومستمرة مقطعياً في كل فترة منتهية . فان مبرهنة القيمة المتوسطة (mean value theorem) تضمن ان المساواة :

$$f(x) = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(x')\, dx' \qquad (4)$$

تتحقق في كل نقطة x عندما تكون f مستمرة . ندمج الجيوب وجيوب التمام في هذه المساواة وذلك باعادة كتابة الطرف الايمن من المعادلة (4) بهذه الطريقة :

$$f(x) = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{\infty} f(x')K(x - x', h)\, dx'. \qquad (5)$$

وهذا هو بالضبط نفس المعادلة (4) . لان $K(x - x', h)$ تساوي 1 عندما تكون بين $x - h$ و $x + h$ وتساوي 0 في اي مكان آخر (لاحظ الشكل 13 ـ 1) . لذلك يكون لدينا

$$f(x) = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\sin \lambda h}{\lambda} \cos \lambda(x - x')\, d\lambda\, dx'. \qquad (6)$$

واذا كان بالامكان عكس تركيب التكامل للدالة $f(x)$. نحصل على الصيغة

$$f(x) = \lim_{h\to 0+} \int_{0}^{\infty} \frac{\sin \lambda h}{\lambda h} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \cos \lambda(x - x')\, dx'\, d\lambda. \qquad (7)$$

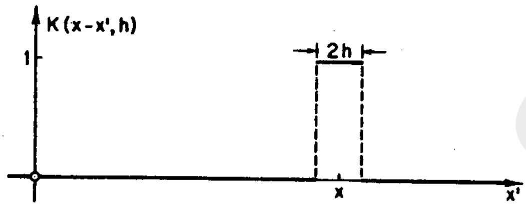
في الغاية عندما تقترب h من الصفر ، فان $(\sin \lambda h)/\lambda h$ تقترب من الواحد . وعليه نتوقع ان نحصل على التمثيل

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \cos \lambda(x - x')\, dx'\, d\lambda \qquad (8)$$

لدوال مناسبة $f(x)$. واذا تم نشر $\lambda(x - x')$ بصيغة فرق جيب التمام ، فالمعادلة (8) يمكن ان تكتب بالصيغة الآتية ، والتي سوف نستخدمها دائماً من الآن فصاعداً :

$$f(x) = \int_0^\infty (A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x)\, d\lambda,$$

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x\, dx, \quad B(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \lambda x\, dx.$$



شكل 13 ـ 1

مخطط $K(x - x', h)$

وتكامل كهذا يسمى باسم تمثيل تكامل فوريه (*Fourier integral* *representation*) للدالة f ونطلق على $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ اسم معاملات تكامل فوريه الدالية للدالة f والمبرهنة الاتية تعطي بعض الشروط التي تجعل التمثيل ممكناً .

مبرهنة . لتكن $f(x)$ ملساء مقطعياً في اي فترة منتهية ، وليكن $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ منته . فان عند اي نقطة x ،

$$\int_0^\infty (A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x)\, d\lambda = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$$

حيث

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x\, dx, \quad B(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \lambda x\, dx.$$

لقد اثبتنا هذه المبرهنة في اشتقاقاتنا . ولكن لدينا بعض الملاحظات على قواعد عمل الفرضيات المتنوعة ان الفرضيات في هذه المبرهنة لم تأخذ بنظر الاعتبار الدوال الدورية لانهُ لا توجد دالة دورية عدا 0 . يمكن ان تحقق الشرط الذي هو :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$$

منته . لاحظ ان هذا التكامل يمكن اعتبارهُ المساحة الكلية بين مخطط الدالة $f(x)$ ومحور x- .

امثلة :

1 . الدالة

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

والتي هي ايضاً $K(x, 1)$، لها دوال معاملات تكامل فوريه الدالية

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \cos \lambda x\, dx = \frac{2 \sin \lambda}{\pi\lambda}$$

$$B(\lambda) = 0.$$

وبما ان $f(x)$ ملساء مقطعياً . فان تمثيل تكامل فوريه موجود . ويمكن ان نكتب :

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} \frac{2 \sin \lambda}{\pi\lambda} \cos \lambda x\, d\lambda.$$

(التكامل اعلاه يساوي $\frac{1}{2}$ عند $x = \pm 1$ لهذا فان المساواة لا تتحقق عند هاتين النقطتين)

2 . لتكن $f(x) = \exp(-|x|)$. فان التكامل المباشر يعطي

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-|x|)\cos\lambda x\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-x}\cos\lambda x\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{e^{-x}(-\cos\lambda x + \lambda\sin\lambda x)}{1+\lambda^2}\Bigg|_0^{\infty} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{1+\lambda^2}.$$

$B(\lambda) = 0$ ، لان $\exp(-|x|)$ زوجية . وكَوْن $\exp(-|x|)$ مستمرة وملساء مقطعياً ، يمكن ان نكتب .

$$\exp(-|x|) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\lambda x}{1+\lambda^2}\, d\lambda.$$

والمثالان اعلان يوضحان الحقيقة ، انهُ بشكل عام ، لا يمكن ايجاد التكامل في تمثيل تكامل فوريه ، والمبرهنة الاخيرة تسمح لنا ان نكتب المساواة بين دالة مناسبة وتكامل فوريه لتلك الدالة .

اذا كانت $f(x)$ معرفة فقط في الفترة $0 < x < \infty$، ويمكن ان ننشيء توسيعاً زوجياً او فردياً بحيث يكون تكامل فوريه لها محتوياً على $\cos\lambda x$ او $\sin\lambda x$ فقط . ويطلق عليهما جيب تمام فوريه وتمثيل تكامل الجيب للدالة f ، على التوالي . وعليه يمكن ان نكتب .

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(\lambda)\cos\lambda x\, d\lambda, \quad 0 < x < \infty$$

$$A(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\cos\lambda x\, dx$$

او

$$f(x) = \int_0^{\infty} B(\lambda)\sin\lambda x\, d\lambda, \quad 0 < x < \infty$$

$$B(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\sin\lambda x\, dx.$$

تمارين

1 . ارسم التوسيع الفردي والتوسيع الزوجي لكل من الدوال الاتية ، ثم جد تكاملي فورية الجيبي والجيب التمامي للدالة f . جميع الدوال معرفة في الفترة $0 < x < \infty$

a . $f(x) = e^{-x}$

b . $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & 1 < x \end{cases}$

c . $f(x) = \begin{cases} \pi - x, & 0 < x < \pi \\ 0, & \pi < x \end{cases}$

2 . بدل متغيرات التكامل في الصيغتين A و B وبرر كل خطوة فيما يأتي .
(يمكن تبديل ترتيب التكامل .)

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t)(\cos \lambda t \cos \lambda x + \sin \lambda t \sin \lambda x)\, dt\, d\lambda$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(t) \int_0^\infty \cos \lambda(t - x)\, d\lambda\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(t) \left[\lim_{\omega\to\infty} \frac{\sin \omega(t - x)}{t - x}\right] dt$$

$$= \lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(t) \frac{\sin \omega(t - x)}{t - x}\, dt$$

يسمى التكامل الاخير تكامل فوريه المنفرد (*Fourier's single integral*)
ارسم مخطط الدالة $\frac{(\sin \omega\nu)}{\nu}$ كدالة بدلالة ν لبعض قيم ω . ماذا يحدث قرب $\nu = 0$؟ يمكن ان نكتب التكامل الاخير بالشكل الاتي :

$$f(x) = \int_{-\infty}^\infty f(t)\, \delta(t - x)\, dt$$

وبالرغم من ان δ ليست دالة ، ولكنها تسمى دالة دلتا ديراك (Dirac's delta function.) .

3 . جد تمثيل تكامل فورية لكل مما يأتي :

a . $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ b . $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

(تلميح : لايجاد معاملات تكامل فورنة الدالية ، اختبر تمثيل تكامل فوريه التي وجدناها في الامثلة .)

4 . في تمرين 3 فرع b ، التكامل $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ ليس منتهياً . علاوة على ذلك بأن $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ موجودتان $(B(\lambda) = 0)$. جد الاساس المنطقي في مبرهنة التقارب التي تنص على ان الدالة يمكن تمثيلها بواسطة تكاملها الفوري .
(تلميح : لاحظ مثال 1 .)

5 . افرض ان الدالة $f(x)$ مستمرة ، وقابلة للاشتقاق ولها معاملات تكامل فوريه الدالية $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$. كيف تكون علاقة معاملات تكامل فوريه الدالية للمشتقة $f'(x)$ مع A , B ؟

6 . بين انه اذا كان k ، K موجبتين ، فان كلاً مما يأتي صحيح :

a . $$\int_0^{\infty} e^{-kx} \sin x\, dx = \frac{1}{1 + k^2}$$

b . $$\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-Kx}}{x} \sin x\, dx = \tan^{-1} K$$

c . $$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

(فرع (a) بأجراء التكامل مباشرة ، (b) تكامل (a) بالنسبة لـ k ، (c) باخذ الغاية لـ (b) عندما $K \to \infty$)

7 . ابتدأ من تمرين 6 فرع c ، اشتق المعادلة (1) .

8 . استخدم المتطابقات المثلثية للجداء $\sin \lambda h \cos \lambda x$ لاشتقاق معادلة (3) من المعادلة (1) .

9 . جد تمثيل تكامل فوريه لكل من الدوال الاتية :

a . $$f(x) = \begin{cases} \sin x, & -\pi < x < \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$$

b . $$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < \pi \\ 0, & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

c . $$f(x) = \begin{cases} |\sin x|, & -\pi < x < \pi \\ 0, & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

10 . اعد كتابة المعادلة (1) بالشكل .

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda x}{\lambda} d\lambda = \frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(x),$$

حيث $\mathrm{sgn}(x)$ يساوي 1 ، 0 ، 1 . 1 − عندما تكون x موجبة ، صفر ، او سالبة على الترتيب . بين ان المعادلة (3) هي .

$$K(x,h) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{sgn}(x + h) - \mathrm{sgn}(x - h))$$

اخيراً ، احصل على المعادلة (2) باستخدام المعادلة (1) والمتطابقة

$$\sin\lambda(x + h) - \sin \lambda(x - h) = 2 \sin \lambda h \cos \lambda x$$

11 . تكامل فوريه يمكن ايجاده على انه غاية سلسلة فوريه . لتكن $f(x)$ دالة معرفة لكل x وانها ملساء مقطعياً . يمكن تمثيلها لاية فترة $-a < x < a$ بواسطة سلسلة فوريه .

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{a} + b_n \sin \frac{n\pi x}{a}, \ -a < x < a$$

$$a_0 = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x)\, dx,\ a_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x) \cos \frac{n\pi x}{a}\, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x) \sin \frac{n\pi x}{a}\, dx.$$

نفرض ان $\lambda_n = n\pi/a$ ونعرف الدالتين

$$A_a(\lambda_n) = \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} f(x) \cos \lambda_n x dx, \quad B_a(\lambda_n) = \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} f(x) \sin \lambda_n x dx.$$

وبهذا تصبح سلسلة فوريه .

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_a(\lambda_n) \cos \lambda_n x + B_a(\lambda_n) \sin \lambda_n x)\, \Delta\lambda \qquad (*)$$

حيث .

$$\Delta\lambda = \lambda_{n+1} - \lambda_n = \pi/a.$$

بين ان كلًا من الغايات الاتية تتحقق عندما تكون $a \to \infty$ ، اذا كان $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ منتهياً :

$$A_a(\lambda) \to \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\lambda x\,dx = A(\lambda)$$

$$B_a(\lambda) \to \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx = B(\lambda)$$

$$a_0 \to 0.$$

12 . هل ان سلسلة فوريه في (*) اعلاه تقترب من تكامل فوريه للدالة f عندما يكون $a \to \infty$

10 . الطرق العقدية COMPLEX METHODS

نفرض ان الدالة $f(x)$ تقابل سلسلة فوريه

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

(استعملنا الدورة 2π لتوخي السهولة فقط) . ان صيغة اويلر الشهيرة تنص على ان :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad \text{حيث} \quad i^2 = -1$$

وباستخدام بعض الخواص الجبرية ، فان الدالة الاسية للجيب وجيب التمام تكون :

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}).$$

وبتعويض الصيغ الأسية في سلسلة فوريه للداله f سوف نحصل على صيغة مرادفة هي :

$$f(x) \sim a_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(e^{inx} + e^{-inx}) - ib_n(e^{inx} - e^{-inx})$$

$$\sim a_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n)e^{inx} + (a_n + ib_n)e^{-inx}.$$

والان يمكن ان نعرف معاملات فوريه العقدية للدالة f:

$$c_0 = a_0, \quad c_n = \tfrac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \tfrac{1}{2}(a_n + ib_n), \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

وبدلالة هذه المعاملات ، يكون لدينا :

$$f(x) \sim c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}. \tag{1}$$

هذه هي الصيغة العقدية لسلسلة فوريه للدالة f . ومن السهولة اشتقاق الصيغة الشاملة .

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx \tag{2}$$

وتتحقق هذه العلاقة لكل n ، (موجب ، سالب ، او صفر) الصيغة العقدية تستخدم بشكل خاص في الفيزياء والهندسة الكهربائية . .

في بعض الاحيان يمكن تمييز الدالة المقابلة لسلسلة فوريه وذلك باستخدام الصيغة العقدية . فمثلاً ، السلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cos nx$$

يمكن اعتبارها الجزء الحقيقي لـ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{inx} = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (e^{ix})^n \tag{3}$$

لان الجزء الحقيقي لـ $e^{i\theta}$ هو $\cos\theta$. والسلسلة في الطرف الايمن من المعادلة (3) يمكن تمييزها على انها سلسلة تايلور (Taylor series) .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (e^{ix})^n = \ln(1 + e^{ix}).$$

وهذا يؤدي الى :

$$1 + e^{ix} = e^{ix/2}(e^{ix/2} + e^{-ix/2}) = 2e^{ix/2} \cos \frac{x}{2}$$

$$\ln(1 + e^{ix}) = \frac{ix}{2} + \ln\left(2 \cos \frac{x}{2}\right).$$

الجزء الحقيقي من $\ln(1 + e^{ix})$ هو $\ln [2 \cos (x/2)]$ حيث $-\pi < x < \pi$.
وعليه نشتق العلاقة :

$$\ln\left|2 \cos \frac{x}{2}\right| \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cos nx. \qquad (4)$$

(السلسلة متقاربة عدا عند $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$)

تكامل فورية للدالة $f(x)$ المعرفة في الفترة الكلية $-\infty < x < \infty$ يمكن ان يكتب بالصيغة العقدية :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda) e^{i\lambda x}\, d\lambda. \qquad (5)$$

ومعاملات تكامل فورية العقدية الدالية تعطى بالشكل :

$$C(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x}\, dx. \qquad (6)$$

وببساطة يمكن ان نبين :

$$C(\lambda) = A(\lambda) - iB(\lambda) \qquad (7)$$

حيث B و A هما معاملًا تكامل فوريه . ومعامل تكامل فوريه العقدي يسمى عادة تحويل فوريه (Fourier transform) للدالة $f(x)$.

تمارين

1 . اربط الدوال والسلاسل التي ادناه وذلك باستعمال الصيغة العقدية وسلسلة تايلور .

a $$1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx = \frac{1 - r\cos x}{1 - 2r\cos x + r^2}, \quad 0 \le r < 1$$

b $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!} = e^{\cos x} \sin(\sin x)$$

2 . بين باستخدام التكامل ان :

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx}\, dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 2\pi, & n = m \end{cases}$$

وسع هذه الصيغة لمعاملات فوريه العقدية باستخدام فكرة التعامدية .

3 . استخدم الصيغة العقدية

$$a_n - ib_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx, \quad n \neq 0$$

لايجاد سلسلة فوريه للدالة :

$$f(x) = e^{\alpha x}, \quad -\pi < x < \pi.$$

4 . وسع الصيغة (2) لمعاملات فوريه العقدية c_n من الصيغ لـ $b_n . a_n$.

5 . جد تمثيل تكامل فوريه العقدي لكل من الدوال الآتية :

a
$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

b
$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < \pi \\ 0, & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

11 . تطبيقات على سلاسل وتكاملات فوريه
. APPLICATIONS OF FOURIER SERIES AND INTEGRALS

تعتبر سلاسل وتكاملات فوريه من اهم الادوات الاساسية للرياضيات التطبيقية . وسوف نعطي بعض التطبيقات والتي لا تقع في نطاق بقية هذا الكتاب .

A . المعادلات التفاضلية غير المتجانسة
NONHOMOGENEOUS DIFFERENTIAL EQUATION

هناك العديد من النظم الميكانيكية والكهربائية يمكن وصفها بالمعادلة التفاضلية

$$\ddot{y} + \alpha\dot{y} + \beta y = f(t).$$

يقال للدالة $f(t)$ بانها « دالة القوة » (forcing function,) . و βy بـ « الحد الحافظ » (restoring term,) . و $\alpha\dot{y}$ « الحد المثبط » (damping term.)

اذا كانت الدالة $f(t)$ دورية ذات دورة 2π. فأفرض أن سلسلتها الفوريه هي :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt.$$

واذا كانت $y(t)$ دورية ذات دورة 2π. فأن الدالة ومشتقاتها لهما سلاسل فوريه الاتية :

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nt + B_n \sin nt$$

$$\dot{y}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -nA_n \sin nt + nB_n \cos nt$$

$$\ddot{y}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2A_n \cos nt - n^2B_n \sin nt.$$

وبهذا فأن المعادلة التفاضلية يمكن كتابتها بالصيغة :

$$\beta A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-n^2A_n + \alpha nB_n + \beta A_n) \cos nt$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (-n^2B_n - \alpha nA_n + \beta B_n)\sin nt = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt.$$

وبمساواة المعاملات يمكن تحديد Bs و As

$$\beta A_0 = a_0$$
$$(\beta - n^2)A_n + \alpha nB_n = a_n$$
$$-\alpha nA_n + (\beta - n^2)B_n = b_n.$$

وبحل هذه المعادلات لـ As و Bs, ، نجد :

$$A_n = \frac{(\beta - n^2)a_n - \alpha nb_n}{\Delta}, \quad B_n = \frac{(\beta - n^2)b_n + \alpha na_n}{\Delta}$$

حيث : where

$$\Delta = (\beta - n^2)^2 + \alpha^2n^2.$$

الان ، اذا اعطيت الدالة f, ، فأن as و bs يمكن تحديدها وبهذا يمكن الحصول على As و Bs . الدالة $y(t)$ يمكن تمثيلها بالسلسلة المعلومة وهي الجزء الدوري من الاستجابة . بالاعتماد على الشروط الابتدائية . ويمكن ان نحصل على استجابة مضمحلة عندما تزداد t .

B. مسائل القيم الحدودية (التخومية)

BOUNDARY VALUE PROBLEMS

كتمهيد لمقدمة الفصل القادم ، سوف نستخدم فكرة تطبيق سلسلة فورية لحل مسألة القيم الحدودية :

$$\frac{d^2u}{dx^2} + pu = f(x), \quad 0 < x < a$$

$$u(0) = 0, \quad u(a) = 0.$$

اولاً ، سوف نفرض ان $f(x)$ تساوي سلسلة فوريه الجيبية

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad 0 < x < a.$$

وثانياً ، سوف نفرض ان الحل $u(x)$، الذي نبحث عنه ، يساوي سلسلة فوريه الجيبية

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad 0 < x < a$$

وبأخذ المشتقة الثانية للسلسلة نحصل على :

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{n^2\pi^2}{a^2} B_n\right) \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad 0 < x < a.$$

وعندما نعوض صيغ السلاسل لـ u''، و u، و $f(x)$ في المعادلة التفاضلية ، نجد ان :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{n^2\pi^2}{a^2} B_n + pB_n\right) \sin \frac{n\pi x}{a} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad 0 < x < a.$$

وكون معاملات الحدود المتشابهة متساوية ، يمكن ان نستنتج ان :

$$\left(p - \frac{n^2\pi^2}{a^2}\right) B_n = b_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

واذا كان $p = m^2\pi^2/a^2$ لبعض عدد صحيح موجباً m ، فلا توجد قيمة لـ B_m تحقق :

$$\left(p - \frac{m^2\pi^2}{a^2}\right) B_m = b_m$$

ما لم يكن $b_m = 0$ ايضاً . وفي هذه الحالة فأن اية قيمة لـ B_m تتحقق . وبهذا يمكن ان يكون :

$$B_n = b_n \Big/ \left(p - \frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)$$

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^2 b_n}{a^2 p - n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

مع الاتفاق على ان المقام الصفري يجب ان يعالج بشكل منفصل وكمثال على هذا . تأمل مسألة القيم الحدودية :

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u = -x, \quad 0 < x < 1$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

ويمكن التأكد مباشرة من ان :

$$-x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi n} \sin n\pi x, \quad 0 < x < 1.$$

وباستخدام الخطوات السابقة . فأن الحل يجب ان يكون :

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n^2\pi^2 + 1)} \sin n\pi x, \quad 0 < x < 1.$$

وبالرغم ان هذه السلسلة تنتهي الى دالة معلومة ، فأننا بصورة عامة غير قادرين على معرفة صيغة الحل $u(x)$ عدا سلسلتها الفوريه الجيبية

C. مبرهنة العينات — THE SAMPLING THEOREM

احدى اهم نتائج مبرهنة المعلومات هي مبرهنة العينات ، والتي تقوم على اساس تركيب من سلسلة فوريه وتكامل فوريه بصيغها العقدية وما يطلق عليه المهندس كلمة اشارة ما هي إلا دالة معرفة لكل t . واذا كانت الدالة قابلة التكامل ، يوجد لها تمثيل بتكامل فوريه

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) \exp(i\omega t)\, d\omega$$

$$C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t)\, dt.$$

حزمة

يقال للاشارة بانها حزمة مقيدة اذا كان تحويلها الفوري يساوي صفراً عدا في فترة منتهية ، اي انهُ ، اذا كان :

$$C(\omega) = 0, \text{عندما } |\omega| > \Omega.$$

لذلك فأن Ω تسمى ذبذبة متقطعة . (cutoff frequency) اذا كانت f حزمة مقيدة ، فأن يمكن كتابتها بالصيغة :

$$f(t) = \int_{-\Omega}^{\Omega} C(\omega) \exp(i\omega t)\, d\omega \qquad (1)$$

لان $C(\omega)$ تساوي صفراً خارج الفترة $-\Omega < \omega < \Omega$. سوف نركز انتباهنا على هذه الفترة ، وذلك بكتابة $C(\omega)$ كسلسلة فوريه :

$$C(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{in\pi\omega}{\Omega}\right), \quad -\Omega < \omega < \Omega. \qquad (2)$$

المعاملات العقدية هي :

$$c_n = \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} C(\omega) \exp\left(\frac{-in\pi\omega}{\Omega}\right) d\omega.$$

والنقطة الجديرة بالملاحظة في مبرهنة العينات ان التكامل لـ c_n هو في الحقيقة قيمة الدالة $f(t)$ في الزمن المخصص . ومن معادلة التكامل (1) ، نلاحظ :

لذلك كون

لدينا :

$$C(\omega) = \frac{1}{2\Omega}\sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{-n\pi}{\Omega}\right)\exp\left(\frac{in\pi\omega}{\Omega}\right)$$
$$= \frac{1}{2\Omega}\sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)\exp\left(\frac{-in\pi\omega}{\Omega}\right), \quad -\Omega < \omega < \Omega.$$

وباستخدام المعادلة (1) مرة اخرى . فأن $f(t)$ تصبح

$$f(t) = \int_{-\Omega}^{\Omega} C(\omega)\exp(i\omega t)\,d\omega$$
$$= \frac{1}{2\Omega}\sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)\int_{-\Omega}^{\Omega}\exp\left(\frac{-in\pi\omega}{\Omega}\right)\exp(i\omega t)\,d\omega.$$

وبأخذ التكامل واستخدام المتطابقة :

$$\sin\theta = \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}{2i},$$

نجد

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)\frac{\sin(\Omega t - n\pi)}{\Omega t - n\pi}.$$

هذه هي اهم نتيجة في مبرهنة العينات . والتي تنص على ان دالة الحزمة المقيدة $f(t)$ يمكن اعادة تركيبها من عينات f عند $t = 0, \pm\pi/\Omega$. مبرهنة العينات ويمكن ملاحظتها فيزياوياً . معدات الهاتف الجديدة تستخدم العينات لارسال محادثات عديدة من خلال قناة واحدة .

COMMENTS AND REFERENCES : 12 . تعليقات ومصادر

كان اول استخدام للسلسلة المثلثية في منتصف القرن الثامن عشر . ويبدو ان اويلر Euler استخدم مفهوم التعامدية لايجاد المعاملات . وفي بداية القرن التاسع عشر استخدم فوريه السلسلة المثلثية لدراسة المسائل الخاصة بالتوصيل الحراري (لاحظ الفصل الثاني) . وادعاؤه ان اي دالة يمكن تمثيلها على شكل سلسلة مثلثية ، ادى الى اعادة دراسة اساسيات حسبان التفاضل والتكامل .

دايرجلد Dirichlet (حوالي 1830) وضع الشروط الكافية للتقارب في سلسلة فوريه . وبعد ذلك ، قام (ريمان) باعادة تعريف التكامل في محاولة لاكتشاف الشروط الضرورية والكافية للتقارب في سلسلة فوريه . وقد فشلت محاولته هذه (هذه المسألة لم تحل .) ووضع عدد آخر من الرياضيين الكبار نظريات مهمة مثل (نظرية المجموعات) لدراسة سلسلة فوريه ، واصبحت هذه المسائل تشغل اهتمام الباحثين ، وتم حل المسألة الاساسية عام 1966 . وفي عام 1981 نشر ديفيد هيرش في مجلة (*The Mathematical Experience*) مقالة ممتعة ومشوقة عن تاريخ واستخدام سلسلة فوريه

وتعتبر سلسلة فوريه ذات اهمية كبيرة في الرياضيات التطبيقية ، والفيزياء والهندسة وعلوم أخرى ، وتتطلب دراسة أبعد .

وفي عام 1962 ظهر كتاب رائع بعنوان *Fourier Series,* لـ تولستوف والذي لا يتطلب خلفيات رياضياته عالية جداً .

اما كتاب *Fourier Series and Boundary Value Problems* تأليف(جيرجل وبراون) ، عام 1978 فأنه يعتبر مرجعاً للتطبيقات الهندسية .
وحوالي 1960 ، اصبح واضحاً ان الحسابات العددية لمعاملات فوريه يمكن اعادة ترتيبها لتقليل العمليات الحسابية . وتسمى هذه النتيجة بتحويل فورية السريع . ويعتبر كتاب *Numerical Analysis* تأليف دالستون ورانبوتز 1978 ، وكتاب *Numerical Methods* تأليف دالكتوز بورك ، 1974 . من المصادر الممتازة في هذا الموضوع .

ان مبرهنة العينات التي شرحناها في البند السابق اصبحت مهمة جداً في هندسة الاتصالات . وان كتاب *Signals and Systems* تأليف زيمر ، 1963 ، مثلاً ، يحتوي شرحاً مفصلاً لهذه المادة .

وثمة مصدر عام آخر هو "The Shannon Sampling Theorem" تأليف جيري ، 1977 .

تمارين متنوعة

1 . جد سلسلة فوريه الجيبية لدالة شبه المنحرف (trapezoidal function) المعرفة في الفترة $0 < x < \pi$ بـ

$$f(x) = \begin{cases} x/\alpha, & 0 < x < \alpha \\ 1, & \alpha < x < \pi - \alpha \\ (\pi - x)/\alpha, & \pi - \alpha < x < \pi. \end{cases}$$

2 . بين ان السلسلة في التمرين 1 تتقارب بانتظام .

3 . عندما تقترب α من الصفر ، الدالة في التمرين 1 تقترب من الموجية المربعة . هل ان المعاملات الجيبة التي وجدناها في التمرين (1) تقترب من الموجية المربعة .

4 . جد سلسلة فوريه الجيب تمامية للدالة .

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt,$$

حيث f يرمز للدالة في التمرين 1 . ارسم المخطط

5 . جد سلسلة فوريه الجيبية للدالة في الفترة $0 < x < a$ التي بالصيغة (α هي وسيط بين 1,0)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{hx}{\alpha a} & 0 < x < \alpha a \\[2ex] \dfrac{h(a - x)}{(1 - \alpha)a} & \alpha a < x < a. \end{cases}$$

6 . ارسم مخطط الدالة في التمرين 5 . جد لها تقارب سلسلة فوريه الجيبية عند $x = 0$? at $x = \alpha a$? at $x = a$

7 . لتكن $f(x) = 1,\ 0 < x < a$ ارسم المخطط ثم جد سلسلة فوريه لكل من توسعات $f(x)$:

a . التوسع الزوجي .

b . التوسع الفردي .

c . التوسع الدوري (بدورة a) .

d . التوسع الدوري الزوجي .

e . التوسع الدوري الفردي .

f . التوسع الذي يقابل الدالة $f(x) = 0,\ -a < x < 0$

8 . جد المطلوب في تمرين 7 ، عندما $f(x) = x,\ 0 < x < a$

9 . جد سلسلة فوريه للدالة .

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -a < x < 0 \\ 2x, & 0 < x < a. \end{cases}$$

ارسم مخطط الدالة ومخطط التوسع الدوري لها . الى اي قيم تكون . السلسلة متقاربة عند $x = 2a?\ x = -a,\ x = -a/2,\ x = 0,\ x = a,$

10 . ارسم مخطط التوسع الدوري ثم جد سلسلة فوريه الجيبية للدالة

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{1}{2}, & \dfrac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

الى قيم تكون السلسلة متقاربة عند $x = 0,\ x = \pi/2,\ x = \pi,\ x = 3\pi/2,$ $x = 2\pi$ ؟

11 . ارسم مخطط التوسع الدوري الزوجي للدالة المعطاة في تمرين 10 .

جد سلسلتها الفوريه الجيب تمامية . الى اي قيم تكون السلسلة متقاربة عندما تكون

$$x = 0,\ x = \pi/2,\ x = \pi,\ x = 3\pi/2, \text{ and } x = 2\pi$$

12 . جد سلسلة فوريه الجيب تمامية للدالة :

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

ارسم مخطط مجموع سلسلة الجيب التمام .

13 . جد سلسلة فورية الجيبيه للدالة المعرفة بـ $f(x) = 1 - 2x$ $0 < x < 1$ ارسم مخطط التوسع الدوري الفردي للدالة $f(x)$. ثم جد مجموع سلسلة فوريه الجيبية عند النقاط عندما يكون للدالة طفرة .

14 . جد المطلوب نفسه في تمرين 13 ، واستخدم سلسلة فوريه الجيب تمامية والتوسع الدوري الزوجي .

15 . جد سلسلة فوريه للدالة

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < -\dfrac{\pi}{2} \\ \sin 2x, & -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & \dfrac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

ارسم مخطط الدالة

16 . بين ان الدالة المعطاة بالصيغة $f(x) = (\pi - x)/2$, $0 < x < 2\pi$ لها سلسلة فوريه وهي :

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad 0 < x < 2\pi.$$

ارسم مخطط $f(x)$ وتوسعه الدوري .

17 . استخدم الطرق العقدية والسلسلة الهندسية المنتهية لاثبات ان :

$$\sum_{n=1}^{N} \cos nx = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x - \sin \frac{1}{2}x}{2 \sin \frac{1}{2}x}.$$

ثم استخدم المتطابقات المثلثية لاثبات :

$$\sum_{n=1}^{N} \cos nx = \frac{\sin \frac{1}{2}Nx \cos \frac{1}{2}(N + 1)x}{\sin \frac{1}{2}x}.$$

18 . عين المجموع الجزئي لسلسلة فوريه في تمرين 16 مثل

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nx}{n}.$$

السلسلة في تمرين 17 هي $S_N'(x)$. استخدم هذه المعلومات لتعيين النهايات العظمى والصغرى لـ $S_N(x)$ في الفترة $0 \le x \le \pi$. جد قيمة $S_N(x)$ في النقطة الاولى في الفترة $0 < x < \pi$ حيث $S_N'(x) = 0$ عند $N = 5$ قارن مع $(\pi - x)/2$ عند هذه النقطة .

19 . جد سلسلة فوريه الجيبية للدالة

$$f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{\pi x}{a}, & 0 < x < a \\ 0, & a < x \le \pi \end{cases}$$

افترض ان $0 < a < \pi$

20 . جد سلسلة فورية الجيب تمامية للدالة المعطاة في تمرين 19 .

21 . جد تمثيل تكامل فورية للدالة :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < a \\ 0, & x < 0 \text{ or } x > a. \end{cases}$$

22 . جد تمثيل تكامل فوريه الجيبي والجيب تمامي للدالة

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a - x}{a}, & 0 < x < a \\ 0, & a < x. \end{cases}$$

23 . جد تمثيل تكامل فوريه الجيبي للدالة

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < \pi \\ 0, & \pi < x. \end{cases}$$

24 . جد تمثيل تكامل فوريه للدالة

$$f(x) = \begin{cases} 1/\epsilon, & \alpha < x < \alpha + \epsilon \\ 0, & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

25 . استخدم التكامل بواسطة التجزئة لاثبات المساواة

$$\int_0^\infty e^{-\lambda} \cos \lambda x \, d\lambda = \frac{1}{1 + x^2}.$$

26 . المعادلة في تمرين (25) تتحقق لكل x . اشرح لماذا هذا التحقيق يؤدي الى الى :

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{1+x^2}\,dx = e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0.$$

27 . كامل طرفي المساواة في تمرين 25 من 0 الى t لاثبات المساواة .

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}\sin \lambda t}{\lambda}\,d\lambda = \tan^{-1} t.$$

28 . هل ان المساواة في تمرين (27) تؤدي الى ان :

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \tan^{-1} t \sin \lambda t\,dt = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}?$$

29 . من تمرين (27) اشتق المساواة .

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}\sin \lambda x\,d\lambda = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}x, \quad x > 0.$$

30 . بدون استخدام التكامل ، جد سلسلة فوريه (ذات دورة 2π) لكل من الدوال الاتية :

a $\sin^2 5x$ **b** $2 + 4\sin 50x - 12\cos 41x$
c $\sin 3x \cos 5x$ **d** $\sin(4x+2)$
e $\cos(2x + \frac{1}{3}\pi)$. **f** $\cos^3 x$

31 . لتكن الدالة $f(x)$ في الفترة $0 < x < 1$ معرفة بالصيغة

$$f(x) = 1 - x$$

جد (a) سلسلة فوريه الجيبية (b) سلسلة فوريه الجيب تمامية (c) تكامل فوريه الجيبي (d) تكامل فوريه الجيب تمامي الذي يساوي الدالة المعطاة في الفترة $0 < x < 1$ في كل حالة . ارسم مخطط الدالة التي تكون السلسلة او التكامل متقارب اليها في الفترة $-2 < x < 2$.

32 . تحقق من تكامل فوريه

$$\int_0^{\infty} \cos \lambda q \exp(-\lambda^2 t)\, d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{4t}} \exp\left(-\frac{q^2}{4t}\right) \quad (t > 0)$$

وذلك بتحويل الطرف الايسر حسب الخطوات : (a) حول التكامل من $-\infty$ الى ∞ باستخدام الخاصية الزوجية للتكامل ؛ (b) بدل $\cos \lambda q$ بـ $\exp(i\lambda q)$ (برر هذه الخطوة) ؛ (c) اكمل المربع في الدالة الاسية ؛ (d) بدل متغييرات التكامل (e) استخدم المساواة

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2)\, du = \sqrt{\pi}.$$

33 . قرب الحدود السبعة الاولى من معاملات الجيب تمام $(\hat{a}_0, \hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_6)$ للدالة

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \quad 0 < x < 1.$$

34 . استخدم تمثيل سلسلة فوريه الجيبية لـ $u(x)$ وللدالة $f(x) = x, 0 < x < a$ لحل مسألة القيم الحدودية

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \gamma^2 u = -x, \quad 0 < x < a,$$

$$u(0) = 0, \quad u(a) = 0.$$

43 ـ 35 لكل هذه التمارين

أ . جد سلسلة فوريه الجيب تمامية للدالة ؛

ب . جد القيمة التي تقترب اليها السلسلة عند قيم x ؛

حـ . ارسم مخطط التوسع الدوري الزوجي للدالة المعطاة لدورتين في الاقل .

52 ـ 44 لكل هذه التمارين

أ . جد سلسلة فوريه الجيبية للدالة ؛

ب . حدد القيمة التي تقترب اليها السلسلة عند قيم x ؛

حـ . ارسم المخطط للتوسع الدوري الفردي للدالة المعطاة لدورتين في الاقل .

$$\textbf{35 \& 44.}\quad f(x)=\begin{cases}0, & 0<x<\dfrac{a}{3}\\[4pt] x-\dfrac{a}{3}, & \dfrac{a}{3}<x<\dfrac{2a}{3}\\[4pt] \dfrac{a}{3}, & \dfrac{2a}{3}<x<a\end{cases}\qquad x=0,\ \frac{a}{3},\ a,\ -\frac{a}{2}$$

$$\textbf{36 \& 45.}\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0<x<\dfrac{a}{2}\\[4pt] 1, & \dfrac{a}{2}<x<a\end{cases}\qquad x=\frac{a}{2},\ 2a,\ 0,\ -a$$

$$\textbf{37 \& 46.}\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{a}, & 0<x<\dfrac{a}{2}\\[4pt] \dfrac{(3a-2x)}{2a}, & \dfrac{a}{2}<x<a\end{cases}\qquad x=0,\ \frac{a}{2},\ a,\ \frac{3a}{2}$$

$$\textbf{38 \& 47.}\quad f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<\dfrac{a}{2}\\[4pt] \dfrac{a}{2}, & \dfrac{a}{2}<x<a\end{cases}\qquad x=0,\ a,\ -\frac{a}{2}$$

$$\textbf{39 \& 48.}\quad f(x)=\frac{(a-x)}{a},\quad 0<x<a\qquad x=0,\ a,\ -\frac{a}{2}$$

$$\textbf{40 \& 49.}\quad f(x)=\begin{cases}0, & 0<x<\dfrac{a}{4}\\[4pt] 1, & \dfrac{a}{4}<x<\dfrac{3a}{4}\\[4pt] 0, & \dfrac{3a}{4}<x<a\end{cases}\qquad x=0,\ \frac{a}{4},\ \frac{a}{2},\ a,\ -\frac{3a}{4}$$

$$\textbf{41 \& 50.}\quad f(x)=x(a-x),\quad 0<x<a\qquad x=0,\ -a,\ -\frac{a}{2}$$

$$\textbf{42 \& 51.}\quad f(x)=e^{kx},\quad 0<x<a\qquad x=0,\ \frac{a}{2},\ a,\ -a$$

$$\textbf{43 \& 52.}\quad f(x)=\begin{cases}0, & 0<x<\dfrac{a}{2}\\[4pt] 1, & \dfrac{a}{2}<x<a\end{cases}\qquad x=-a,\ \frac{a}{2},\ a$$

58 ـ 53 لكل من هذه التمارين

a. جد تمثيل تكامل فورية الجيب تمامي للدالة ؛

b. ارسم مخطط التوسع الزوجي للدالة .

64 ـ 59 لكل من هذه التمارين

a . جد تمثيل تكامل فوريه الجيبي للدالة ؛

b . ارسم مخطط التوسع الفردي للدالة ؛

53 & 59. $f(x) = e^{-x}, \quad 0 < x$

54 & 60. $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & 0 < x < a \\ 0, & a < x \end{cases}$

55 & 61. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < b \\ 0, & b < x \end{cases}$

56 & 62. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 < x < \pi \\ 0, & \pi < x \end{cases}$

57 & 63. $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 < x < 1 \\ 0, & 1 < x \end{cases}$

58 & 64. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 2 - x, & 1 < x < 2 \\ 0, & 2 < x \end{cases}$

65 . لتكن $f(x)$ دالة دورية ذات دورة 2π وان معاملاتها الفوريه هي .... b_1، $a_0, a_1,$ فان ، المجموع الجزئي :

$$S_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

هو القيمة التقريبية لـ $f(x)$ اذا كانت f ملساء مقطعياً وان N كبيرة بما فيه الكفاية . ومعدل هذه التقريبات هو :

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{N}(S_1(x) + \ldots + S_N(x)).$$

من المعلوم ان $\sigma_N(x)$ متقاربة بانتظام الى الدالة $f(x)$ اذا كانت f مستمرة . بين ان :

$$\sigma_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{N + 1 - n}{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

66 . بمقارنة المأخوذة 2 بند 7 ، برهن على ان

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sin(n + \tfrac{1}{2})y = \frac{\sin^2(\frac{1}{2}Ny)}{\sin^2(\frac{1}{2}y)}.$$

67 . اتبع خطوات بند 7 ، لاثبات :

$$\sigma_N(x) - f(x) = \frac{1}{2N\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x + y) - f(x)] \left(\frac{\sin(\frac{1}{2}Ny)}{\sin(\frac{1}{2}y)} \right)^2 dy.$$

هذه المساواة هي المفتاح الذي يؤدي الى برهان التقارب المنتظم المبين في التمرين 65 .

الفصل الثاني ٢

معادلة الحرارة

THE HEAT EQUATION

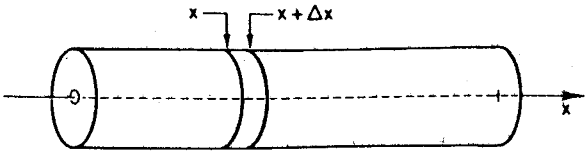
1 . الاشتقاق والشروط الحدودية .

DERIVATION AND BOUNDARY CONDITIONS

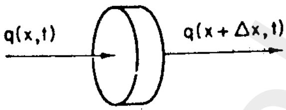
احد امثلة الاشتقاق للمعادلات التفاضلية الجزئية ، هي مسألة وصف الحرارة في قضيب موصل للحرارة . ولكي نبسط المسألة بابسط ما يمكن ، سوف نفرض ان القضيب له مقطع عرضي منتظم وان درجة الحرارة لاتتغير من نقطة الى اخرى في المقطع . لذلك ، إذا استخدمنا نظام الاحداثيات هو مقترح في الشكل (1 ـ 2) ، فيمكن القول ان درجة الحرارة تعتمد فقط على موقع x والزمن t .

والفكرة الاساسية في تطوير المعادلات هي استخدام القوانين الفيزياوية لقطعة صغيرة من القضيب . وعلى وجه الخصوص ، سوف نستخدم قانون حفظ الطاقة لشريحة من القضيب التي تقع بين x ، $x + \Delta x$ (شكل 2 ـ 2) .

ان قانون حفظ الطاقة ينص على ان كمية الحرارة المكتسبة في الوسط زائداً الحرارة المتولدة في الداخل تساوي كمية الحرارة المفقودة زائداً الحرارة المخزونة . هذا القانون يصح ايضاً اذا بدلنا كلمة « كمية » بـ « المعدل في وحدة زمنية الان .



شكل (1 ـ 2) .



شكل (2 ـ 2)

لتكن $q(x, t)$ معدل سريان الحرارة في نقطة x وزمن t . ابعاد q هي* $[q] = H/tL^2$ ، و q موجبة عندما يكون سريان الحرارة نحو اليمين . ومعدل الحرارة التي تكتسبها الشريحة من خلال السطح عند x هي $Aq(x, t)$ ، حيث ان A هي مساحة المقطع العرضي ..

ومعدل الحرارة التي تفقدها الشريحة من خلال السطح عند $x + \Delta x$ هو $Aq(x + \Delta x, t)$.

ان معدل الحرارة المخزونة في الشريحة يتناسب مع معدل تغيير درجة الحرارة . لذلك ، اذا كانت ρ تمثل الكثافة و c هي السعة الحرارية لكل وحدة كتلة ($[c] = H/mT$) ، فانه يمكن ان نقرب معدل الحرارة المخزونة في الشريحة بـ :

$$\rho c A \, \Delta x \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$$

---

* الاقواس المربعة استخدمت للرمز « للابعاد » ، H = الحرارة ، t = الزمن ، T = درجة الحرارة ، L = الطول ، m = الكتلة ، ... الخ .

حيث $u(x, t)$ هي درجة الحرارة .

وتوجد طرق اخرى التي فيها الحرارة تُكتسب او (تفقد) من القضيب الذي لدينا ، وأحدى هذه الطرق ان الحرارة تنتقل بواسطة الاشعاع او الحمل من (او الى) الوسط المحيط .

والطريقة الأخرى هي ان الحرارة تتحول الى حالة من حالات الطاقة ـ فمثلاً ، بواسطة مقاومة تيار كهربائي ، او بواسطة ردود فعل كمياوي او نووية . وكل هذه الطرق تقع تحت اسم « معدل التوليد » (generation rate) . فاذا كان معدل التوليد لكل وحدة حجم هو g ، $[g] = H/tL^3$ ، فأن معدل توليد الحرارة في الشريحة هو $A\,\Delta x\,g$. (لاحظ ان g قد تعتمد على t و x ، وكذلك على u .)

الان تكون قد حصلنا على قانون حفظ الطاقة لشريحة القضيب بالصيغة :

$$Aq(x, t) + A\,\Delta x\,g = Aq(x + \Delta x, t) + A\,\Delta x\,\rho c\,\frac{\partial u}{\partial t}. \qquad (1)$$

وباجراء بعض العمليات الجبرية ، نحصل على :

$$\frac{q(x, t) - q(x + \Delta x, t)}{\Delta x} + g = \rho c\,\frac{\partial u}{\partial t}.$$

النسبة : $\dfrac{q(x + \Delta x, t) - q(x, t)}{\Delta x}$

ويمكن تميزها على انها حاصل قسمة الفرق . واذا جعلنا Δx تتناقص ، فأن حاصل القسمة يصبح ،

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{q(x + \Delta x, t) - q(x, t)}{\Delta x} = \frac{\partial q}{\partial x}.$$

وبهذا يصبح قانون حفظ الطاقة بالصيغة

$$-\frac{\partial q}{\partial x} + g = \rho c\,\frac{\partial u}{\partial t}. \qquad (2)$$

وكون هذه المعادلة تعتمد على متغييرين q و u فنحتاج الى معادلة اخرى بدلالة q و u . وهذه العلاقة هي قانون فورية في التوصيل الحراري . والتي في بعد واحد تكون بالصيغة :

$$q = -\kappa \frac{\partial u}{\partial x}.$$

وبالكلمات ، فان سريان الحرارة المنخفضة (q موجبة عندما تكون $\partial u/\partial x$ سالبة) يكون بمعدل يتناسب مع تدرج درجة الحرارة . عامل التناسب κ يسمى التوصيلية الحرارية (thermal conductivity) ، والذي يعتمد على x اذا كان القضيب غير منتظم . ويمكن ان يعتمد ايضاً على درجة الحرارة التي سوف نعتبرها ثابتة .

وبتعويض قانون فوريه في معادلة التوازن الحراري نحصل على

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa \frac{\partial u}{\partial x}\right) + g = \rho c \frac{\partial u}{\partial t}. \qquad (3)$$

لاحظ ان κ و ρ و c يمكن ان تكون جميعها دوالاً . واذا كانت هذه الدوال مستقلة بالنسبة لـ x و t و u ، يمكن ان نكتب

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{g}{\kappa} = \frac{\rho c}{\kappa}\frac{\partial u}{\partial t}. \qquad (4)$$

هذه المعادلة تكون قابلة التطبيق في الفترة $0 < x < a$ وانَّ $t > 0$. الكمية $\kappa/\rho c$ تكتب عادة k ، ويطلق عليها اسم الانتشارية (diffusivity) . الجدول (1 ـ 2) يبين القيم التقريبية لهذه الثوابت لبعض المواد .

جدول 1 ـ 2
قيم الثوابت

المادة	c	ρ	κ	$k = \frac{\kappa}{\rho c}$
	$\frac{\text{cal}}{\text{g °C}}$	$\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$	$\frac{\text{cal}}{\text{sec cm °C}}$	$\frac{\text{cm}^2}{\text{sec}}$
الالمنيوم	0.21	2.7	0.48	0.83
النحاس	0.094	8.9	0.92	1.1
الفولاذ	0.11	7.8	0.11	0.13
الزجاج	0.15	2.6	0.0014	0.0036
السمنت	0.16	2.3	0.0041	0.011
الجليد	0.48	0.92	0.004	0.009

في بعض الاحيان سوف نتعامل مع معادلة الحرارة بدون توليد :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t, \qquad (5)$$

والتي يفترض ان تصف درجة الحرارة u في القضيب الذي طولهُ a بخواص ومقطع عرضي منتظم ، بحيث لا تتولد حرارة ، وان يكون السطح الاسطواني عازلاً .

هذه المعادلة وحدها لا تعطينا معلومات كافية لتعيين درجة الحرارة . كل من الدوال الاتية :

$$u(x, t) = x^2 + 2kt$$
$$u(x, t) = e^{-kt} \sin x$$

تحقق المعادلة التفاضلية الجزئية وكذلك حاصل جمعها وطرحها

ومن الواضح أن هذا الوضع غير مقنع من الناحية الرياضية او الفيزياوية ، لاننا نرغب ان نحدد درجة الحرارة . لذلك يجب اضافة شروط اخرى على الدالة u . الشروط الاضافية المناسبة هي الشروط التي تصف .

1 . توزيع درجة الحرارة الابتدائية .

2 . ماذا يحدث في طرفي القضيب .

الشرط الابتدائي يمكن وصفهُ رياضياً بالشكل

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < a$$

حيث $f(x)$ هي دالة بدلالة x فقط .

الشروط الحدودية يمكن ان تأخذ صيغاً متعددة . اولاً ، درجة الحرارة في اي من نهايتي القضيب يمكن اعتبارها ثابتة ، فمثلاً اذا غمرنا نهاية القضيب في ماء متجمد او في بخار . فيمكن ان نصف هذه الشروط بالمعادلتين

$$u(0, t) = T_0, \quad u(a, t) = T_1, \quad t > 0$$

حيث T_0 و T_1 يمكن ان تكون متساوية او مختلفة . وبشكل اعم ، فأن درجة الحرارة على الحدودية يمكن السيطرة عليها ببعض الطرق ، دون اعتبارها ثابتة

واذا رمزنا للنقاط الطرفية بـ x_0 ، فأن الشرط يكون :

$$u(x_0, t) = \alpha(t) \tag{6}$$

حيث α هي دالة الزمن . بالطبع ، الحالة التي تكون فيها الدالة ثابتة مشمولة هنا . ونوع من الشرط الحدودي كهذا يسمى شرط دايركلت (Dirichlet condition) او الشرط من النوع الاول .

والاحتمال الأخر هو ان معدل سريان الحرارة قابل التحكم . وكون قانون فوريه يقترن مع معدل سريان الحرارة والتدرج في درجة الحرارة ، فيمكن ان نكتب

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t) = \beta(t) \tag{7}$$

حيث β هي دالة الزمن . ويسمى هذا بشرط نيومان (Neumann condition) او الشرط من النوع الثاني . وفي اغلب الاحيان نفرض ان $\beta(t)$ تساوي o . وبهذا يصبح الشرط على النحو الاتي :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t) = 0$$

الذي يقابل حالة السطح المعزول ، وفي هذه المعادلة يمكن القول ان سريان الحرارة يساوي o .

ولا زال هناك احتمال آخر للشرط الحدودي وهو :

$$c_1 u(x_0, t) + c_2 \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t) = \gamma(t) \qquad (8)$$

ويسمى هذا الشرط بالشرط من النوع الثالث او شرط روبن (Robin's condition .) وهكذا شرط يمكن تصورهُ فيزياوياً . اذا كان السطح عند $x = a$ معرضاً للهواء او لمائع ، فأن الحرارة التي تصل الى السطح من داخل القضيب تنتقل خارجاً بواسطة الحمل. وقانون نيوتن في التبريد ينص على ان معدل انتقال درجة الحرارة من الجسم الى الهواء يتناسب مع فرق درجات الحرارة بين الجسم والهواء . وبالرموز ، يكون لدينا

$$q(a, t) = h(u(a. t) - T(t)) \qquad (9)$$

حيث $T(t)$ تمثل درجة حرارة الهواء

الهواء . وباستخدام قانون فورية ، تصبح المعادلة

$$-\kappa \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = hu(a, t) - hT(t). \qquad (10)$$

وهذه المعادلة يمكن ان تكتب بالصيغة (8) . (لاحظ ان **h** تسمى معامل الحمل $[h] = H/L^2tT$.)

جميع الشروط الحدودية اعلاه تشمل الدالة h و (ا و) مشتقتها في نقطة واحدة . واذا اشتملت على اكثر من نقطة واحدة . فأن الشرط الحدودي يسمى شرطاً مختلطاً (mixed condition) . فمثلاً ، اذا قمنا بحني القضيب المنتظم وجعلهُ على شكل حلقة ، وربطنا نهايته عند $x=0$ و $x = a$ فأن الشروط الحدودية المناسبة ستكون

$$u(0, t) = u(a, t), \qquad t > 0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(a, t), \quad t > 0 \tag{12}$$

وكلاهما من النوع المختلط .

وتوجد انواع اخرى من الشروط الحدودية والتي يمكن تحقيقها ، ولكن النوع الرابع المذكور اعلاه يعتبر اكثر هذه الانواع شيوعاً . والخاصية الهامة المشتركة بين الانواع الاربعة هي ان كل نوع من هذه الانواع يحوي عملية خطية بدلالة الدالة u .

معادلة الحرارة ، الشرط الابتدائي والشرط الحدودي لكل نهاية تُشكل ما يسمى بـ مسألة القيم الحدودية ـ القيم الابتدائية . فمثلاً ، احدى المسائل المحتملة هي :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < a, \quad 0 < t \tag{13}$$

$$u(0, t) = T_0 \qquad 0 < t \tag{14}$$

$$-\kappa \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = h(u(a, t) - T_1), \quad 0 < t \tag{15}$$

$$u(x, 0) = f(x), \qquad 0 < x < a. \tag{16}$$

لاحظ ان الشروط الحدودية يمكن ان تكون من انواع مختلفة عند النهايات المختلفة . وبالرغم من اننا سوف لا نثبت ذلك ، ولكن في الحقيقة يوجد حل واحد فقط لمسألة القيم الحدودية ـ القيم الابتدائية الكاملة .

تمارين

1 . ضع المعادلة (10) في صيغة المعادلة (8) . لاحظ ان الاشارة لا تزال تشير الى ان سريان الحرارة يكون في اتجاه درجة الحرارة الواطئة . اي انه ، اذا كان $u(a, t) > T(t)$ ، فأن $q(a, t)$ تكون موجبة وان التدرج في u يكون سالباً . بين ، اذا كان السطح عند $x = 0$ (نهايته اليسرى) قد عُرض للحمل ، فأن الشرط الحدودي سيكون :

$$\kappa \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = hu(0, t) - hT(t).$$

وضح الاشارات .

2 . افرض ان السطح عند $x = a$ عُرض للاشعاع . قانون ستيفن بولتس مان (Stefan-Boltzmann) في الاشعاع ينص على ان معدل اشعاع انتقال الحرارة يتناسب مع فرق القوة الرابعة لدرجات الحرارة المطلقة للاجسام . بيِّن ان شرط الحدودية الاشعاعية عند $x = a$ الذي ينتقل الى الجسم بدرجة حرارة مطلقة T هو :

$$q(a, t) = \sigma(u^4(a, t) - T^4).$$

3 . اعد صياغة هذا الشرط بدلالة التدرج او مشتقة u عند a .

4 . المعادلة اعلاه يمكن كتابتها بالشكل الاتي :

$$u^4 - T^4 = (u - T)(u^3 + u^2T + uT^2 + T^3).$$

ما هي الشروط التي تجعل العامل الثاني من اليمين يأخذ قيمة تقريبية ثابتة ؟ واذا كان العامل ثابتاً فأن الشرط الحدودي يكون خطياً .

5 . اعط تفسيراً فيزياوياً للمسألة في المعادلات (13) ـ (16)

6 . افرض ان نهاية قضيب عند $x = 0$ غُمر في حاوية ماء عازلة او اي مائع اخر ، بحيث تكون درجة حرارة المائع مساوية لدرجة حرارة نهاية القضيب ، اي ان السعة الحرارية للمائع هي C من الوحدات الحرارية لكل درجة . بين ان هذا الوضع يمكن تمثيلة رياضياً بالمعادلة

$$C \frac{\partial u}{\partial t}(0, t) = \kappa A \frac{\partial u}{\partial x}(0, t)$$

حيث A هي مساحة المقطع العرضي للقضيب .

7 . افرض ان القضيب يكتسب حرارة من خلال سطحه الاسطواني بواسطة الحمل من المائع المحيط به بدرجة حرارة U (ثابت) . قانون نيوتن في التبريد ينص على ان معدل الحرارة المنقولة تتناسب مع المساحة وفرق درجة الحرارة . ما هي g في المعادلة (1) ؟ ما هي الصيغة التي تأخذها المعادلة (4)

8 . بين ان الدوال التي ادناه هي حلول لمعادلات الحرارة (5) .

$$u(x, t) = \exp(-\lambda^2 kt) \cos \lambda x$$

$$u(x, t) = \exp(-\lambda^2 kt) \sin \lambda x$$

2 . درجات حرارة حالة ـ الاستقرار .

STEADY-STATE TEMPERATURES

قبل ان نبدأ باعطاء مسألة التوصيل الحراري الكاملة . سوف نقوم بتسيط الحالة التي نطلق عليها حالة الاستقرار او مسألة التوازن . وسوف نبدأ بالمثال الأتي :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < a, 0 < t \tag{1}$$

$$u(0, t) = T_0, \quad 0 < t \tag{2}$$

$$u(a, t) = T_1, \quad 0 < t \tag{3}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < a. \tag{4}$$

يمكن ان نفكر في $u(x, t)$ على انها درجة الحرارة في القضيب الاسطواني ، بمساحة سطحية جانبية معزولة ، ودرجة حرارة نهايتي القضيب تثبت بـ T_0 و T_1 .

لقد اثبتت التجارب انه بعد مرور زمن طويل تحت نفس الشروط ، فأن تغيير درجة الحرارة مع الزمن يضمحل . بدلالة الدالة $u(x, t)$ والتي تمثل درجة الحرارة ، نتوقع ان غاية $u(x, t)$ ، عندما تقترب t من اللانهاية ، تكون موجودة وتعتمد على x فقط :

$$\lim_{t\to\infty} u(x, t) = v(x)$$

وكذلك

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

الدالة $v(x)$ ، تسمى توزيع درجة الحرارة لحالة الاستقرار يجب أن تحقق الشروط الحدودية ومعادلة الحرارة ، والتي تتحقق لكل $t > 0$.لذلك $v(x)$ يجب ان تكون حلاً للمسألة :

$$\frac{d^2v}{dx^2} = 0, \quad 0 < x < a \qquad (5)$$

$$v(0) = T_0, \quad v(a) = T_1. \qquad (6)$$

وبأخذ تكامل المعادلة التفاضلية مرتين ، نجد ان

$$\frac{dv}{dx} = A, \quad v(x) = Ax + B.$$

الثابتان A و B يتم اختيارها كي تكون $v(x)$ تحقق الشروط الحدودية :

$$v(0) = B = T_0, \quad v(a) = Aa + B = T_1.$$

وعندما نحل هاتين المعادلتين بالنسبة لـ A و B ، فأن توزيع حالة الاستقرار تصبح :

$$v(x) = T_0 + (T_1 - T_0)\frac{x}{a}. \qquad (7)$$

بالطبع ، المعادلتان (5) و (6) ، اللتان كلتاهما تُكون مسألة حالة الاستقرار تقابلان المعادلات (1) ـ (4) ، والتي يمكن اشتقاقها من البداية كما فعلنا في الفصل الصفر بند 3 . من الناحية الاخرى ، نلاحظ ان هذه جزء من مسألة شاملة .

الان يمكن ان نبني هذه القاعدة وذلك بأخذ مسألة حالة الاستقرار التي تقابل مسألة الانتقال الحراري المعطاة : نأخذ الغايات لكل المعادلات والتي تتحقق لـ t كبيرة (المعادلة التفاضلية الجزئية والشروط الحدودية) ، وذلك بابدال u ومشتقاتها بالنسبة لـ x بـ v ومشتقاتها ، ووضع $\partial u/\partial t$ مساوياً للصفر .

الان نأخذ كمثال المعادلات (13) ـ (16) بند 1 وهي

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < a, \quad 0 < t \tag{8}$$

$$u(0, t) = T_0, \qquad 0 < t \tag{9}$$

$$-\kappa \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = h(u(a, t) - T_1), \quad 0 < t \tag{10}$$

$$u(x, 0) = f(x), \qquad 0 < x < a. \tag{11}$$

القاعدة اعلاه عندما نتعامل مع هذه المسالة تؤدي الى المعادلات الأتية :

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = 0, \quad 0 < x < a$$

$$v(0) = T_0, \quad -\kappa v'(a) = h(v(a) - T_1).$$

وحل المعادلة التفاضلية هو $v(x) = A + Bx$. الشروط الحدودية تحتاج ان تحقق A و B العلاقات الاتية

$$v(0) = A = T_0$$

$$-\kappa v'(a) = -\kappa B = h(A + Ba - T_1).$$

وبحلها آنياً ، نجد ان

$$A = T_0, \quad B = \frac{h(T_1 - T_0)}{\kappa + ha}.$$

لذلك فأن حل حالة التوازن للمعادلات (8) ـ (11) هي (لاحظ الشكل 6 ـ 2)

$$v(x) = T_0 + \frac{xh(T_1 - T_0)}{\kappa + ha}. \tag{12}$$

في كلا المثالين ، توزيع درجة الحرارة في حالة التوازن يمكن تحديدهُ فقط بالمعادلة التفاضلية والشروط الحدودية . هذه هي عادة الحالة ؛ ولكنها لا تتحقق دائماً . فالمسألة :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t \tag{13}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \qquad 0 < t \tag{14}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = 0, \qquad 0 < t \tag{15}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < a, \tag{16}$$

التي تصف درجة الحرارة في القضيب المعزول ولهُ نهايتان معزولتان كذلك . ومسألة حالة الاستقرار المقابلة لـ $v(x) = \lim_{t\to\infty} u(x, t)$ هي :

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = 0, \quad 0 < x < a$$

$$\frac{dv}{dx}(0) = 0, \quad \frac{dv}{dx}(a) = 0.$$

ومن السهولة ملاحظة ان $v(x) = T$ (اي ثابت) هو حل لهذه المسألة . هذا الحل ليس وحيداً ، من الناحية الاخرى ، توجد اعتبارات فيزياوية بحيث يتم بواسطتها تحديد T وبما ان المساحة الجانبية للقضيب معزولة ، وان نهايتيه معزولتان ايضاً في هذه المسألة ، فأن القضيب لا يتبادل الحرارة مع بقية المحيط .

لذلك فان الحرارة الحالية عند $t = 0$ تبقى نفسها لاي زمن آخر .

واذا كانت ρ ، c و A لهما المعنى نفسه كما في السابق . فيمكن القول ان حرارة الشريحة في القضيب بين x و $x + \Delta x$ تعطى تقريبياً بـ $\rho c A \Delta x\, u(x, t)$. لذلك فأن الحرارة الكلية في القضيب في زمن t هي :

$$\int_0^a \rho c A u(x, t)\, dx.$$

في زمن $t = 0$ ، $u(x, 0) = f(x)$ ، بينما في الغاية $u(x, t) \to v(x)$. الحرارة عند $t = 0$ وفي الغاية يجب ان تكون نفسها

$$\int_0^a \rho c A f(x)\, dx = \int_0^a \rho c A v(x)\, dx = \int_0^a \rho c A T\, dx = \rho c A a T.$$

المعاملات ρ ، c و A تكون مستقلة عن x ويمكن حذفها . وبهذا يكون لدينا :

$$T = \frac{1}{a}\int_0^a f(x)\, dx$$

اي ان T ، درجة الحرارة النهائية في القضيب ، هي معدل درجة الحرارة عند $t = 0$

سوف لا نفترض ان مخطط توزيع درجة حرارة حالة الاستقرار هو خط مستقيم وهذه بالتأكيد ليس هي الحالة في التمرين 1 .

ان حل حالة الاستقرار يعطينا معلومات مهمة حول حل مسائل القيم الحدودية الابتدائية ، كما انهُ يعطينا الحل الكامل . والآن نعزل بقية درجات الحرارة المجهولة $u(x, t)$ وذلك بتعريف درجة حرارة الانتقال الموزعة (*transient tempera ture distribution*)

$$w(x, t) = u(x, t) - v(x).$$

وكلمة انتقال تعتبر مناسبة لانهُ ، حسب فرضيتنا حول سلوك u ، لقيم كبيرة لـ t ، نتوقع ان تقترب $w(x, t)$ من الصفر عندما تقترب t من اللا نهاية .

بشكل عام ، الانتقال يُحقق مسائل القيم الحدودية الابتدائية التي تشبه المسألة الاصلية ولكنها تتميز بان لها معادلة تفاضلية جزئية متجانسة وشروط حدودية . ولتوضيح ذلك ، سوف نعالج المسألة المعطاة في المعادلات (1) ـ (4) والتي حلها في حالة الاستقرار كما هو في المعادلة (7) .

وباستخدام المساواة $u(x, t) = w(x, t) + v(x)$ ، وما نعرفة حول v ـ اي المعادلتين (5) و (6) ـ نضع المسألة الاصلية في صيغة جديدة لاجل $w(x, t)$. لدينا العلاقـــات الاتية :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{dv}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$u(0, t) = T_0 = w(0, t) + v(0) = w(0, t) + T_0$$

$$u(a, t) = T_1 = w(a, t) + v(a) = w(a, t) + T_1$$

$$u(x, 0) = w(x, 0) + v(x).$$

وبالتعويض في المعادلات (1) ـ (4) ، نحصل على مسألة القيم الحدودية ـ القيم الأبتدائية لاجل w :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial w}{\partial t}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t \tag{17}$$

$$w(0, t) = 0, \qquad 0 < t \tag{18}$$

$$w(a, t) = 0, \qquad 0 < t \tag{19}$$

$$w(x, 0) = f(x) - \left[T_0 + (T_1 - T_0)\frac{x}{a}\right] \tag{20}$$

$$= g(x), \quad 0 < x < a.$$

ومن المؤكد من المعادلات (17) ـ (19) ان المعادلة التفاضلية الجزئية المتجانسة والشروط الحدودية المتوقعة لـ w قد تم ايجادها .

وسوف نلاحظ في البند القادم كيف يمكن ايجاد درجة حرارة الانتقال

تمارين

1 . اذكر ثم حل مسألة حالة الاستقرار المقابلة لـ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma^2(u - T) = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < a, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = T_0,\ u(a, t) = T_1, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = 0, \qquad 0 < x < a.$$

2 . اذكر المسألة التي تتحقق بدرجة حرارة الانتقال الموزعة المقابلة للمسألة في التمرين (1) .

3 . جد حل مسألة الاستقرار للمسألة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma^2(u - T) = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < a, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = T,\ u(a, t) = T, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = T_1\frac{x}{a}, \qquad 0 < x < a.$$

اعطِ التفسير الفيزياوي لهذه المسألة . ماذا يحدث اذا كانت $\gamma = \pi/a$ ؟

4 . اذكر مسألة القيم الحدودية ـ القيم الابتدائية التي تتحقق بواسطة درجة حرارة الانتقال الموزعة المقابلة للمعادلات (8) ـ (11) .

5 . جد حل حالة الاستقرار للمسألة

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa\frac{\partial u}{\partial t}\right) = c\rho\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < a, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = T_0,\ u(a, t) = T_1 \quad 0 < t$$

اذا كان $\kappa(x) = b + dx$ ، حيث b و d ثابتان .

6 . جد وارسم المخطط لحل حالة الاستقرار لـ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \; 0 < x < a, \quad 0 < t$$

مع الشروط الحدودية

a. $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \; u(a, t) = T_0$

b. $u(0, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = T_0, \; \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = 0$

c. $u(0, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = T_0, \; u(a, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = T_1.$

7 . جد حل حالة الاستقرار للمسائل ادناه مع التوليد

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t$$

a. $u(0, t) = T_0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = 0, \quad r =$ ثابت

b. $u(0, t) = T_0, \quad u(a, t) = T_1, \quad r = \alpha - \beta^2 u.$

8 جد حلول حالة الاستقرار لـ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma^2(U(x) - u) = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \; 0 < x < a, \; 0 < t$$

$$u(0, t) = U_0, \; \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = 0, \; 0 < t$$

حيث : $U(x) = U_0 + Sx$ (U_0, S) ثابتان

3 . امثلة : درجات حرارة النهايات المثبتة

EXAMPLE: FIXED END TEMPERATURES

في بند (1) لاحظنا ان درجة الحرارة $u(x, t)$ في قضيب منتظم الذي سطحة الجانبي معزول يمكن تحديدها بالمسألة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t \tag{1}$$

$$u(0, t) = T_0, \quad 0 < t \tag{2}$$

$$u(a, t) = T_1, \quad 0 < t \tag{3}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < a \tag{4}$$

واذا كانت درجات الحرارة في نهايتي القضيب ثابتة وان درجة حرارته الابتدائية الموزعة هي $f(x)$. في بند (2) وجدنا ان درجة حرارة حالة الاستقرار الموزعة ،

$$v(x) = \lim_{t\to\infty} u(x, t),$$

تحقق مسألة القيم الحدودية

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = 0, \quad 0 < x < a \tag{5}$$

$$v(0) = T_0, \quad v(a) = T_1. \tag{6}$$

في الحقيقة ، يمكن ان نجد $v(x)$ ضمنياً ،

$$v(x) = T_0 + (T_1 - T_0)\frac{x}{a}. \tag{7}$$

نعرف الآن درجة حرارة الانتقال الموزعة بالشكل

$$w(x, t) = u(x, t) - v(x)$$

ونجد ان **w** تحقق مسألة القيم الحدودية الابتدائية .

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial w}{\partial t}, \qquad 0 < x < a, \quad 0 < t \tag{8}$$

$$w(0, t) = 0, \qquad 0 < t \tag{9}$$

$$w(a, t) = 0, \qquad 0 < t \tag{10}$$

$$w(x, 0) = f(x) - v(x) = g(x), \quad 0 < x < a. \tag{11}$$

وهدفنا هو تحديد درجة حرارة الانتقال الموزعة $w(x, t)$, ـ وكون $v(x)$ معروفة اصلاً ـ فإن درجة الحرارة المجهولة هي

$$u(x, t) = v(x) + w(x, t). \tag{12}$$

المسألة في w يمكن معالجتها بطريقة يطلق عليها طريقة الجداء (*product method,*) او فصل المتغيرات ، او طريقة فوريه . ولاجل العمل بهذه الطريقة ، فمن الضروري ان تكون لدينا شروط حدودية متجانسة . وبهذا يمكن ان تكون هذه الطريقة قابلة التطبيق على توزيع الانتقال w ولكن ليس للدالة الاصلية u . بالطبع ، كون كلاً من المعادلة التفاضلية الجزئية والشروط الحدودية التي تتحقق بـ $w(x, t)$ تكون متجانسة ، فإن الدالة $w \equiv 0$ تحقق المعادلتين . وكون هذا الحل بسيط وليس له اهمية في تحقيق الشرط الابتدائي ، فانه يسمى الحل التافه . وكوننا نبحث عن الحل غير التافه ، لذلك سوف نتفادى الحل التافه في جميع الاحوال .

والفكرة العامة لهذه الطريقة ، هي ان نفرض ان حل المعادلة التفاضلية الجزئية له صيغة الجداء : $w(x, t) = \phi(x)T(t)$. وكون كل عامل يعتمد على متغير واحد فقط ، فيكون لدينا :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \phi''(x)T(t), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \phi(x)T'(t).$$

والمعادلة التفاضلية الجزئية تصبح :

$$\phi''(x)T(t) = \frac{1}{k}\phi(x)T'(t)$$

وبقسمة الطرفين على ϕT ، نجد ان :

$$\frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = \frac{T'(t)}{kT(t)}, \quad 0 < x < a, \ 0 < t.$$

الطرف الايسر هو دالة بدلالة x، اما الايسر فهو دالة بدلالة t. ولكي تتحقق المساواة لكل $a > x > 0$ و $t > 0$، فإن القيمة المشتركة لهاتين الدالتين يجب ان تكون ثابتة :

$$\frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = p, \quad \frac{T'(t)}{kT(t)} = p.$$

الآن اصبح لدينا معادلتان تفاضليتان اعتياديتان لعاملي الدالتين :

$$\phi'' - p\phi = 0, \quad T' - pkT = 0. \qquad (13)$$

والشرطان الحدوديان على w يمكن كتابتهما بصيغة الجداء على النحو :

$$w(0, t) = \phi(0)T(t) = 0, \quad w(a, t) = \phi(a)T(t) = 0.$$

توجد طريقتان لكي تتحقق المعادلتان لكل $t > 0$. اما ان تكون الدالة $T(t) = 0$ لكل t، واما العوامل الاخرى فتساوي اصفاراً. ولكن في الحالة الاولى، يكون ايضاً $w = \phi(x)T(t)$ صفراً، وهذه الحالة تؤول الى الحل التافه. لذلك نتبع الخيار الآخر ونختار

$$\phi(0) = 0, \quad \phi(a) = 0. \qquad (14)$$

هدفنا الآن هو حل المعادلة (13) التي تحقق الشروط الحدودية (14) وتجنب الحل التافه. حل المعادلة (13) هو (بفرض $p > 0$)

$$\phi(x) = c_1 \cosh\sqrt{p}x + c_2 \sinh\sqrt{p}x, \quad T(t) = ce^{pkt}.$$

وبتعويض الشروط الحدودية (14) في $\phi(x)$ سوف نحصل على $c_1 = 0$ وكذلك $c_2 = 0$، لذلك، فإن $\phi(x) \equiv 0$. ولكن هذه الحالة تمثل الحل التافه. $w(x, t) = 0$. والنتيجة نفسها يمكن الحصول عليها اذا اعتبرنا ان $p = 0$

والآن، اذا اخذنا الثابت سالباً، واذا ابدلنا p بـ $-\lambda^2$ في المعادلة (13) نحصل على المعادلتين.

$$\phi'' + \lambda^2\phi = 0, \quad T' + \lambda^2 kT = 0$$

وحلهما هو :

$$\phi(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x, \quad T(t) = c \exp(-\lambda^2 kt).$$

واذا كانت ϕ بالصيغة اعلاه ، فإن الشروط الحدودية تتطلب $\phi(0) = c_1 = 0$ ، وبهذا يكون $\phi(x) = c_2 \sin \lambda x$. لذلك ، فإن $\phi(a) = c_2 \sin \lambda a = 0.$

اصبح لدينا الآن خياران ، اما $c_2 = 0$ الذي يجعل $\phi(x) = 0$ لكل قيم x ، واما $\sin \lambda a = 0$. وسوف نستبعد الاحتمال الاول ، لانه يؤدي الى الحل التافه $w(x, t) \equiv 0$. ولكي يتحقق الاحتمال الثاني ، يجب ان تكون $\lambda = n\pi/a$ ، حيث $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$. القيم السالبة لـ n لا تعطي دوالاً جديدة ، لان $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ لذلك سوف نضع $n = 1,2,3,\ldots$ فقط. وسوف نضع

$$\lambda n = \frac{n\pi}{a}$$

كون المعادلة التفاضلية (13) والشروط الحدودية (14) لـ $\phi(x)$ متجانسة فإن مضروب الحل بثابت يبقى حلاً . وسوف نتذكر دائماً هذه الحقيقة ونسقط الثابت c_2 من $\phi(x)$ ، وكذلك نحذف c من $T(t)$.

لتلخيص ما ورد اعلاه ، $n = 1,2,3,\ldots$ ، لدينا الدالة $\phi_n(x) = \sin \lambda_n x$ ، والدالة المقترنة $T_n = \exp(-\lambda_n^2 kt)$ ، الجداء $w_n(x, t) = \sin \lambda_n x \exp(-\lambda_n^2 kt)$ يتصف بالصفات الاتية :

1. $w_n(x, t)$ تحقق معادلة الحرارة .
2. $w_n(0, t) = 0;$
3. $w_n(a, t) = 0.$

الآن نستخدم مبدأ التطابق وصيغة الارتباط الخطي لـ ws

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \lambda_n x \exp(-\lambda_n^2 kt). \qquad (15)$$

وكون كل حد يحقق معادلة الحرارة وان المعادلة خطية ومتجانسة ، لذلك فإن مجموع السلسلة يجب ان يحقق معادلة الحرارة . (هناك سؤال رياضي حول التقارب سوف نتجاهله) . وكون كل حد يساوي 0 عند $x = 0$ و $x = a$، فإن مجموع السلسلة يجب ان يساوي 0 عند تلك النقطتين ، لاي اختيار للثابت b_n . لذلك ، فإن الدالة $w(x, t)$ تحقق المعادلة التفاضلية والشروط الحدودية لمسألة القيم

الحدودية الابتدائية . ومن الجدير بالذكر ان من الاجزاء الاربعة للمسألة الاصلية ، فإن الشرط الحدودي فقط لم يتحقق بعد . عندما تكون $t = 0$، فإن القوى في المعادلة (15) تساوي جميعها واحداً . لذلك فإن الشرط الحدودي يكون بالصيغة

$$w(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{a} = g(x), \quad 0 < x < a.$$

وبشكل مباشر يمكن ان نميز المسألة في سلسلة فورية ، والتي يمكن حلها وذلك باختيار الثوابت b_n حسب الصيغة

$$b_n = \frac{2}{a}\int_0^a g(x) \sin\frac{n\pi x}{a}\, dx.$$

اذا كانت الدالة $g(x)$ مستمرة وملساء مقطعياً ، فمن المعروف ان سلسلة فوريه تقترب من g في الفترة $0 < x < a$ ، لذلك فإن الحل الذي وجدناه للدالة $w(x, t)$ يحقق كل الشروط المفروضة على w . حتى لو كانت g لا تحقق هذه الشروط ، فيمكن تبيان ان الحل الذي توصلنا اليه هو افضل حل يمكن الحصول عليه .

وحالماً يتم تحديد درجة حرارة الانتقال ، يمكن ان نجد المتغير الاصلي $u(x, t)$ على انه مجموع الانتقال وحلول حالة الاستقرار ،

$$u(x, t) = v(x) + w(x, t).$$

مثال : لتكن المسالة الاصلية بالشكل هي :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = T_0, \quad 0 < t$$

$$u(a, t) = T_1, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < a.$$

ان حل حالة الاستقرار هو :

$$v(x) = T_0 + (T_1 - T_0)\frac{x}{a}.$$

ودرجة حرارة الانتقال ، $w(x, t) = u(x, t) - v(x)$ ، تحقق

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial w}{\partial t}, \qquad 0 < x < a, \quad 0 < t$$

$$w(0, t) = 0, \qquad 0 < t$$

$$w(a, t) = 0, \qquad 0 < t$$

$$w(x, 0) = -T_0 - (T_1 - T_0)\frac{x}{a} = g(x), \quad 0 < x < a.$$

وبموجب الحسابات اعلاه ، تأخذ w الصيغة ،

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \lambda_n x \exp(-\lambda_n^2 kt) \qquad (16)$$

وان الشرط الابتدائي هو ،

$$w(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{a} = g(x), \quad 0 < x < a.$$

المعاملات b_n تكون ،

$$b_n = \frac{2}{a}\int_0^a \left[-T_0 - (T_1 - T_0)\frac{x}{a}\right] \sin\frac{n\pi x}{a}\, dx$$

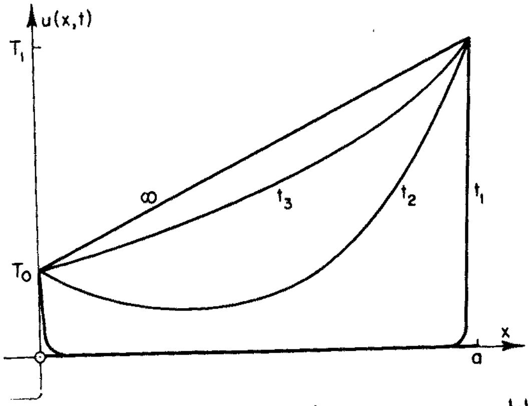
$$= \frac{2T_0}{a}\frac{\cos(n\pi x/a)}{(n\pi/a)}\Bigg|_0^a$$

$$-\frac{2}{a^2}(T_1 - T_0)\frac{\sin(n\pi x/a) - (n\pi x/a)\cos(n\pi x/a)}{(n\pi/a)^2}\Bigg|_0^a$$

$$= -\frac{2T_0}{n\pi}(1 - (-1)^n) + \frac{2(T_1 - T_0)}{n\pi}(-1)^n$$

$$b_n = \frac{-2}{n\pi}(T_0 - T_1(-1)^n).$$

الحل الكامل (لاحظ الشكل (3 ـ 2)) وهو



شكل (3 ـ 2) . حل $u(x, t)$ المقابل $u(x, 0) = 0$ رسم عند $t = 0 < t_1 < t_2 < t_3 < \infty$

$$u(x, t) = w(x, t) + T_0 + (T_1 - T_0)\frac{x}{a}$$

$$w(x, t) = -\frac{2}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{T_0 - T_1(-1)^n}{n}\sin \lambda_n x \exp(-\lambda_n{}^2 kt). \qquad (17)$$

يمكن ان نكتشف هيئة الدالة $u(x, t)$ عن طريق فحص الحل .

اولاً :ــ $u(x, 0)$ تساوي **0** $(0 < x < a)$ لان سلسلة فورية تقترب من $-v(x)$ عند $t = 0$

ثانياً :ــ عندما تكون t موجبة وصغيرة جداً ، سلسلة $w(x, t)$ تساوي $-T_0 - (T_1 - T_0)x/a$. وعندما $x = 0$ و $x = a$. فأن السلسلة تساوي (و $w(x, t)$ دالة مستمرة في x) ، لذلك $u(x, t)$ تحقق الشروط الحدودية .

ثالثاً :ــ عندما تكون t كبيرة ، $\exp(-\lambda_1{}^2 kt)$ تكون صغيرة ، والقوى الاخرى تبقى صغيرة ايضاً . وبهذا فان $w(x, t)$ تكون حسنة التقريب بواسطة الحد الاول (او عدد من الحدود الاولى) للسلسلة . اخيراً عندما $t \to \infty$ ، $w(x, t)$ تختفي بشكل كامل .

تمارين

١ . اكتب الحدود الاولى لسلسلة $w(x, t)$ في المعادلة (17) .

2 . اذا كان k = ١ سم٢ / ثانية ، a = ١ سم ، بين انه بعد مرور $t = 0.5$ ثانية فإن الحدود الاخرى لسلسلة w تهمل مقارنة مع الحد الاول . ارسم مخطط $u(x, t)$ لـ $t = 0$ ، $t = 0.5$ ، $t = 1.0$ و $t = \infty$. افرض $T_0 = 100$ ، $T_1 = 300$.

3 . اعد صياغة مسألة التوصيل الحراري بالنسبة لمسافة عديمة البعد x/a وزمن kt/a^2 . هل توجد درجة حرارة مناسبة عديمة البعد ؟

4 . ارسم مخطط الدوال ϕ_1 ، ϕ_2 و ϕ_3 ، وبيّن ان هذه الدوال تحقق الشروط الحدودية $\phi(0) = 0$ ، $\phi(a) = 0$.

في التمارين 5 ــ ٨ ، حل المسألة :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial w}{\partial t}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t$$
$$w(0, t) = 0, \quad w(a, t) = 0, \quad 0 < t$$
$$w(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < a$$

للدالة المعطاة $g(x)$.

5 . $g(x) = T_0$ (T_0 ثابت) .

6 . $g(x) = \beta x$ (β ثابت) .

7 . $g(x) = \beta(a - x)$ (β ثابت) .

8 .
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{2T_0 x}{a}, & 0 < x < \dfrac{a}{2} \\ \dfrac{2T_0(a - x)}{a}, & \dfrac{a}{2} < x < a. \end{cases}$$

4 . مثال : القضيب المعزول :

EXAMPLE: INSULATED BAR

سنتناول مرة اخرى القضيب المنتظم الذي سبق ذكره في بند (1) . لنفرض الآن ان نهايتي القضيب عند $x = 0$ و $x = a$ معزولان بدلاً من فرض ان لهما درجة

حرارة ثابتة . مسألة القيم الحدودية ـ القيم الابتدائية التي تصف درجة حرارة هذا القضيب هي :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < a, \quad 0 < t \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = 0, \quad 0 < t \qquad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \qquad 0 < x < a \qquad (3)$$

بفرض $f(x)$ دالة معلومة .

وكما راينا في بند 2 ان حل مسألة حالة الاستقرار ليس وحيداً . وباستخدام الفرضيات الفيزياوية يمكن ان نحدد درجة حرارة حالة الاستقرار على النحو الآتي :

$$\lim_{t \to \infty} u(x, t) = \frac{1}{a}\int_0^a f(x)\, dx.$$

الهدف الرياضي من وراء ايجاد حل حالة الاستقرار هو تمهيد الطريق لجعل المسألة متجانسة (معادلة تفاضلية جزئية والشروط الحدودية) للانتقال ، من الناحية الاخرى ، المعادلة التفاضلية الجزئية والشروط الحدودية في هذا المثال هي بالفعل متجانسة . لذلك ، فنحن ليس بحاجة لحل حالة الاستقرار او مسألة الانتقال بل يمكن معالجة $u(x, t)$ بشكل مباشر .

نفرض ان u بصيغة الجداء $u(x, t) = \phi(x)T(t)$. فإن معادلة الحرارة تصبح

$$\phi'' T = \frac{1}{k}\phi T'$$

والمتغيرات يمكن فصلها بالقسمة على ϕT ، لتصبح المعادلة

$$\frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = \frac{T'(t)}{kT(t)}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t.$$

ولكي تكون دالة x مساوية لدالة t ، القيمة التبادلية (mutual value) يجب ان تكون ثابتة . واذا كان هذا الثابت موجباً ، فإن T دالة اسية متزايدة بالنسبة

للزمن . وهذه الحالة غير متوقعة . ومن السهولة تبيان اذا كان الثابت موجباً ، فإن ϕ لا تحقق الشروط الحدودية مالم تساوِ صفراً .

نفرض الآن ان الثابت سالباً . فيمكن ان نكتب :

$$\frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = -\lambda^2 = \frac{T'(t)}{kT(t)}$$

ويمكن فصل هذه المعادلة الى معادلتين تفاضليتين اعتياديتين مرتبطتين بالوسيط المشترك λ :

$$\phi'' + \lambda^2\phi = 0, \quad 0 < x < a \tag{4}$$

$$T' + \lambda^2 kT = 0, \quad 0 < t. \tag{5}$$

الشروط الحدودية على u يمكن ان تحول الى شروط على ϕ ، لان هذه الشروط متجانسة . اما الشروط الحدودية في صيغة الجداء فهي

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \phi'(0)T(t) = 0, \quad 0 < t$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = \phi'(a)T(t) = 0, \quad 0 < t.$$

ولكي تتحقق هذه المعادلات ، يجب ان يكون $T(t)$ يساوي 0 دائماً (الذي يجعل $u(x, t) \equiv 0$),) ، او

$$\phi'(0) = 0, \quad \phi'(a) = 0.$$

من الواضح ان الاختيار الثاني يتجنب الحل التافه .

الآن حصلنا على معادلة تفاضلية متجانسة بالنسبة لـ ϕ مع شروط حدودية متجانسة :

$$\phi'' + \lambda^2\phi = 0, \quad 0 < x < a \tag{6}$$

$$\phi'(0) = 0, \quad \phi'(a) = 0. \tag{7}$$

وتسمى المسألة من هذا النوع بمسألة القيم الذاتية (*eigenvalue problem*) وسوف نبحث عن قيم للوسيط λ^2, بحيث تكون الحلول غير الصفرية للمعادلتين (6) و (7) موجودة . وتسمى هذه القيم بالقيم الذاتية . وتسمى الحلول المقابلة لها باسم الدوال الذاتية (*eigenfunctions*) . لاحظ ان الوسيط المطلوب هو λ^2 وليس λ. التربيع هنا ملائم للحل .

الحل العام للمعادلة التفاضلية في المعادلة (6) هو :

$$\phi(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x.$$

وبتطبيق الشرط الحدودي عند $x = 0$, نجد ان $\phi'(0) = c_2\lambda = 0$, ومنها نجد $c_2 = 0$, او $\lambda = 0$. لنترك جانباً الحالة $\lambda = 0$. ونفرض ان $c_2 = 0$ ، يكون لدينا $\phi(x) = c_1 \cos \lambda x$. عندئذ ، الشرط الحدودي الثاني يتطلب ان يكون $\phi'(a) = -c_1\lambda \sin \lambda a = 0$. ومرة اخرى نحصل على $c_1 = 0$ او $\sin \lambda a = 0$ ولكن $c_1 = 0$ تؤدي الى $\phi(x) \equiv 0$. ، وبهذا يكون $u(x, t) \equiv 0$; وهذا هو الحل التافه . ولهذا لكي نجعل $\sin \lambda a = 0$ علينا ان نختار لـ λ القيم $\pi/a, 2\pi/a, 3\pi/a, ..$ تؤشر عند القيم الذاتية بادلة

$$\lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad \phi_n(x) = \cos \lambda_n(x), \quad n = 1, 2, \dots .$$

واذا عدنا للحالة $\lambda = 0$, نلاحظ ان المعادلتين (6) و (7) تصبحان

$$\phi'' = 0, \quad 0 < x < a,$$
$$\phi'(0) = 0, \quad \phi'(a) = 0.$$

وكون اي دالة ثابتة تحقق هذه الشروط ، لذلك يكون :

$$\lambda_0^2 = 0, \quad \phi_0(x) = 1.$$

وخلاصة ماورد اعلاه يمكن القول بأن حل مسائل القيم الذاتية ، للمعادلتين (6) و (7) ، هو

$$\begin{cases} \lambda_0^2 = 0, \ \phi_0(x) = 1, \\ \lambda_n^2 = \left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2, \ \phi_n(x) = \cos \lambda_n x, \ n = 1,2, \ldots . \end{cases}$$

الآن ، وبعد ان عرفنا الاعداد $\lambda_n{}^2$ ، يمكن ان نحل المعادلة (5) لاجل $T(t)$، فنجد :

$$T_0(t) = 1, \quad T_n(t) = \exp(-\lambda_n{}^2 kt).$$

الجداء $\phi_n(x)T_n(t)$ يعطي حلول المعادلة التفاضلية الجزئية (1) التي تحقق الشروط الحدودية ، معادلة (2) :

$$u_0(x, t) = 1, \quad u_n(x, t) = \cos \lambda_n x \exp(-\lambda_n{}^2 kt). \tag{8}$$

وكون المعادلة التفاضلية الجزئية والشروط الحدودية خطية ومتجانسة ، فإن مبدأ التطابق يتحقق ، وان اي تركيب خطي من الحلول يكون حلاً ايضاً .

الحل : $u(x, t)$ لكل المنظومة يمكن ان يأخذ الصيغة الآتية :

$$u(x, t) = a_0 + \sum_1^\infty a_n \cos \lambda_n x \exp(-\lambda_n{}^2 kt). \tag{9}$$

يوجد فقط شرط واحد من المجموعة الاصلية يحتاج لتحقيق الشرط الحدودي وهو معادلة (3) . في الدالة $u(x, t)$ اعلاه ، الشرط الحدودي هو

$$u(x, 0) = a_0 + \sum_1^\infty a_n \cos \lambda_n x = f(x), \quad 0 < x < a.$$

وهنا يمكن تمييز المسألة في سلسلة فوريه وبهذا يمكن وضع صيغ المعاملات :

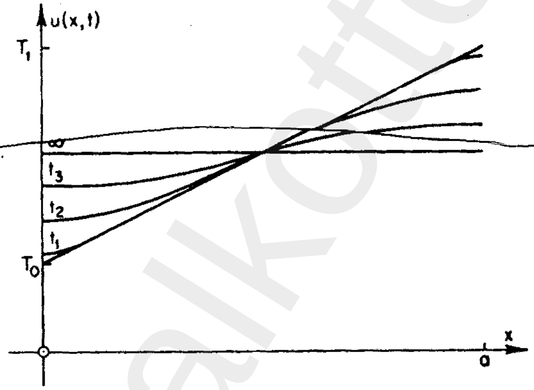
$$a_0 = \frac{1}{a}\int_0^a f(x)\, dx, \quad a_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x) \cos\frac{n\pi x}{a}\, dx.$$

وعندما يتم حساب هذه المعاملات وتعويضها في صيغ $u(x, t)$، فإن هذه الدالة تصبح حلاً لمسألة القيم الحدودية الابتدائية، المعادلات (1) ـ (3). لاحظ ان الحد الاول من حل السلسلة a_0 هو الدالة التي وحدناها في حل حالة الاستقرار، وفي الحقيقة، عندما تكون $t \to \infty$ فإن بقية الحدود الاخرى في $u(x, t)$ تتلاشى لتترك،

$$\lim_{t\to\infty} u(x, t) = a_0 = \frac{1}{a}\int_0^a f(x)\, dx.$$

الشكل (4 ـ 2) هو مخطط لحل المعادلات (1) ـ (3) مع الشرط الحدودي

$$f(x) = T_0 + (T_1 - T_0)x/a.$$



شكل 4 ـ 2 الحل $u(x,t)$، يقابل

$t = 0 < t_1 < t_2 < t_3 < \infty$. مخطط عند $u(x, 0) = T_0 + (T_1 - T_0)x/a$,

تمارين

1 . لتكن f مستمرة مقطعياً وان المعاملات $a_n \to 0$ عندما تكون $n \to \infty$ واذا كانت $t = t_1 > 0$, ثابتة . فان الحل هو :

$$u(x, t_1) = a_0 + \sum_{1}^{\infty} a_n \exp(-\lambda_n{}^2 k t_1) \cos \lambda_n x$$

وان معاملات السلسلة الجيب التمامية هي :

$$A_n(t_1) = a_n \exp(-\lambda_n{}^2 k t_1).$$

بين ان $A_n(t_1) \to 0$ عندما $n \to \infty$ والسلسلة اعلاه تقترب بانتظام في . الفترة $0 \le x \le a.$ بين ان الشيء نفسه يحدث للسلسلة المتمثلة بـ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t_1).$$

2 . ارسم مخطط الدوال ϕ_1 ,ϕ_2 ,ϕ_3 واثبت بالمخطط ان هذه الدوال تحقق الشروط الحدودية للمعادلة (7) .

3 . استخدم الشرط الابتدائي

$$u(x, 0) = T_1 \frac{x}{a}, \quad 0 < x < a$$

لايجاد الحل لـ $u(x, t)$ في مسألة المثال . ارسم مخطط $u(x, 0)$, و $u(x, t)$ لبعض $t > 0$ (استخدم الحدود الثلاثة الاولى للسلسلة) . وحل حالة الاستقرار .

4 . بين ان $u_n(x, t)$ معادلة (8) تحقق المعادلة التفاضلية (1) والشروط الحدودية . معادلة (2) .

5 . اعد تمرين (3) باستخدام الشرط الحدودي :

$$u(x, 0) = T_0 + T_1\left(\frac{x}{a}\right)^2, \quad 0 < x < a.$$

6 . اعد تمرين (3) بالشرط الحدودي :

$$u(x, 0) = \begin{cases} \dfrac{2T_0x}{a}, & 0 < x < \dfrac{a}{2} \\ \dfrac{2T_0(a - x)}{a}, & \dfrac{a}{2} < x < a \end{cases}$$

7 . اذكر مسألة القيمة الذاتية المرافقة لحل مسألة الحرارة في بند (3) . وذكر الحل ايضاً .

8 . لتكن الدالة $\phi(x)$ تحقق العلاقة

$$\frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = p^2 > 0.$$

بين ان الشروط الحدودية هي $\phi'(0) = 0$ ، $\phi'(a) = 0$ ثم اجعل $\phi(x)$ تساوي 0 . وبهذا ، فان « ثابت الانفصال » الموجب وحده يمكن ان يؤدي الى الحل التافه .

5 . مثال : شروط حدودية مختلفة .

EXAMPLE: DIFFERENT BOUNDARY CONDITIONS

في حالات عديدة ، الشروط الحدودية عند النهايتين تكون مختلفة وفي هذا البند سوف نحل المسألة الخاصة بايجاد درجة حرارة قضيب احدى نهايتيه معزولة والاخرى بدرجة حرارة مثبتة . مسألة القيم الحدودية القيم الابتدائية التي تتحقق بدرجة الحرارة في القضيب هي

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t \qquad (1)$$

$$u(0, t) = T_0, \quad 0 < t \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = 0, \quad 0 < t \qquad (3)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < a. \qquad (4)$$

يمكن بسهولة تبيان ان حل حالة الاستقرار لهذه المسألة هو $v(x) = T_0$. وباستخدام هذه المعلومات ، يمكن ان نجد مسألة القيم الحدودية القيم الابتدائية التي تتحقق بدرجة حرارة الانتقال $w(x, t) = u(x, t) - T_0$:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial w}{\partial t}, \qquad 0 < x < a, \quad 0 < t \tag{5}$$

$$w(0, t) = 0, \qquad 0 < t \tag{6}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(a, t) = 0, \qquad 0 < t \tag{7}$$

$$w(x, 0) = f(x) - T_0 = g(x), \quad 0 < x < a. \tag{8}$$

وكون هذه المسألة متجانسة ، يمكن معالجتها بطريقة فصل المتغيرات .
وبفرض ان $w(x, t)$ لها صيغة الجداء $\phi(x)T(t)$ ، فان ادخال w بصيغها هذه في المعادلة التفاضلية الجزئية (5) تؤدي الى معادلتين منفصلتين هما

$$\phi'' + \lambda^2\phi = 0, \quad 0 < x < a \tag{9}$$

$$T' + \lambda^2 kT = 0, \quad 0 < t. \tag{10}$$

بالاضافة الى ذلك ، فان الشروط الحدودية تكون بالصيغة :

$$\phi(0)T(t) = 0, \quad 0 < t \tag{11}$$

$$\phi'(a)T(t) = 0, \quad 0 < t. \tag{12}$$

وكما في السابق ، نستنتج ان $\phi(0)$ ، $\phi'(a)$ يجب ان تساوي 0 :

$$\phi(0) = 0, \quad \phi'(a) = 0. \tag{13}$$

الان ، فأن الحل العام للمعادلة التفاضلية (9) هو :

$$\phi(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x.$$

الشرط الحدودي $\phi(0) = 0$ ، يتطلب $c_1 = 0$ ويؤدي الى

$$\phi(x) = c_2 \sin \lambda x.$$

الشرط الحدودي عند $x = a$ يأخذ الان الصيغة

$$\phi'(a) = c_2\lambda \cos \lambda a = 0.$$

هنا يوجد لدينا ثلاث خيارات هي : $c_2 = 0$، والتي تعطي الحل التافة $\lambda = 0$، والتي يجب دراستها بشكل مستقل (تمرين 2) و $\cos \lambda a = 0$ والخيار الثالث ـ الحالة الوحيدة المقبولة ـ يتطلب ان يكون λa من مضروبات $\pi/2$ بعدد فردي والتي يمكن تمثيلها كالاتي :

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2a}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{14}$$

لذلك ، فان حل مسألة القيم الذاتية التي تتكون من المعادلتين (9) و (13) هو :

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2a}, \ \phi_n(x) = \sin \lambda_n x, \ n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{15}$$

بعد ان تعرفنا على الدوال الذاتية والقيم الذاتية ، نعود الى المعادلة التفاضلية (10) ، والتي حلها هو :

$$T_n(t) = \exp(-\lambda_n{}^2 kt).$$

كما في الحالات السابقة ، نجمع الحل العام للمسألة المتجانسة المعبر عنها في المعادلات (5) و (6) و (7) وذلك بوضع صيغة للارتباط الخطي العام للحلول الجدائية

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \lambda_n' x \exp(-\lambda_n{}^2 kt). \tag{16}$$

ان اختيار المعاملات b_n يجب ان يحقق الشرط الابتدائي ، معادلة (8) . وباستخدام صيغة w المعطاة بالمعادلة (16) ، نجد ان الشرط الابتدائي هو

$$w(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} = g(x), \quad 0 < x < a. \tag{17}$$

ان سلسلة فوريه الجيبية في الفترة $0 < x < a$ تشمل الدوال $\sin(n\pi x/a)$ فضلاً على الدوال التي لدينا . باحدى الاساليب العديدة (تمارين 8 ـ 3) يمكن ان نبين ان السلسلة في المعادلة (17) تمثل الدالة $g(x)$ شريطة ان تكون g ملساء مقطعياً . وان نختار المعاملات بالصيغة

$$b_n = \frac{2}{a}\int_0^a g(x) \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\, dx. \qquad (18)$$

وبهذا تكون المسألة الاصلية قد تم حلها بشكل كامل . وهذا الحل هو ،

$$u(x, t) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \lambda_n x \exp(-\lambda_n^2 kt). \qquad (19)$$

يجب ان نلاحظ بعناية ان الحد T_0 في المعادلة (19) هو حل حالة الاستقرار في هذه الحالة ، وهذه ليست جزأ من حل فصل المتغيرات .

لنفرض الان ان الشرط الابتدائي (4) هو ،

$$u(x, 0) = T_1, \quad 0 < x < a.$$

لذلك ، فان $g(x) = T_1 - T_0$ ، $0 < x < a$ والمعاملات التي تم تحديدها في المعادلة (8) هي ،

$$b_n = (T_1 - T_0)\frac{4}{\pi(2n-1)}.$$

وبهذا يكون الحل الكامل لمسألة القيم الحدودية القيم الابتدائية ، بشرط ابتدائي $u(x, 0) = T_1$ هو ،

$$u(x, t) = T_0 + (T_1 - T_0)\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1} \sin \lambda_n x \exp(-\lambda_n^2 kt). \qquad (20)$$

الان بعد ان اعطينا ثلاثة امثلة ، يمكن ان نعطي الخطوط العريضة للطريقة التي استخدمناها لحل مسائل القيم الحدودية ـ القيم الابتدائية . ولحد هذه اللحظة تعاملنا فقط مع المعادلات التفاضلية الجزئية المتجانسة . اما اللاتجانسية المستقلة عن t فيمكن معالجتها بالتكنيك نفسه .

1 . اذا كانت المعادلة التفاضلية الجزئية او الشرط الحدودي او كلاهما ليست متجانسة ، اولاً نجد الدالة $v(x)$ ، المستقلة عن t ، والتي تحقق المعادلة التفاضلية الجزئية والشروط الحدودية .

وكون $v(x)$ لاتعتمد على t ، فان المعادلة التفاضلية الجزئية التي تطبق على $v(x)$ معادلة تفاضلية اعتيادية . وعملية ايجاد $v(x)$ هي بالضبط ايجاد حل مسألة القيم الحدودية لنقطتين .

2 . نحدد مسألة القيم الابتدائية التي تتحقق بـ « حل الانتقال » (transient solution) $w(x, t) = u(x, t) - v(x)$. هذه المسألة يجب ان تكون متجانسة . اي ان ، المعادلة التفاضلية الجزئية والشروط الحدودية (لكن عادة ما يكون لها شرط ابتدائي) تتحقق بدالة ثابتة هي صفر .

3 . بفرض ان $w(x, t) = \phi(x)T(t)$ بفصل المعادلة التفاضلية الجزئية الى معادلتين تفاضليتين اعتياديتين ، احدهما لـ$\phi(x)$ والاخرى $T(t)$ ، مرتبطة بثابت الفصل ، $-\lambda^2$ ، ثم نختزل الشروط على ϕ فقط .

4 . نحل مسألة القيم الذاتية لـ ϕ . اي اننا نجد قيم λ^2 بحيث تكون حلول مسألة القيم الذاتية غير صفرية . نرمز للدوال الذاتية والقيم الذاتية بـ$\phi_n(x)$ و λ_n^2 على التوالي .

5 . نحل المعادلة التفاضلية الاعتيادية بالنسبة لعوامل الزمن ، $T_n(t)$.

6 . نصيغ الحل العام للمسألة المتجانسة على شكل حاصل جمع مضروبات حلول لجداء بثوابت .

$$w(x, t) = \sum c_n\phi_n(x)T_n(t).$$

6 . نختار c_n التي تجعل الشرط الابتدائي متحققاً . وهذه قد تكون او لاتكون متسلسلة فورييه الاعتيادية . فاذا لم تكن كذلك ، فان مبدأ التعامدية يجب استخدامها لتحديد المعاملات .

8 . نصيغ حل المسألة الاصلية

$$u(x, t) = v(x) + w(x, t)$$

ونختبر ان جميع الشروط تتحقق .

تمارين

1 . جد حل حالة الاستقرار للمسألة في المعادلات (1) ــ (4) .

2 . حدد فيما اذا كانت 0 قيمة ذاتية لمسألة القيم الذاتية المذكورة في المعادلتين (9) و (13) .

3 . لكي نبرر نشر المعادلة (17) ، لدالة اختيارية ملساء مقطعياً $g(x)$ ،

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2a} = g(x), \quad 0 < x < a,$$

جد الدالة $G(x)$ ذات الخواص :

$$G(x) = g(x), \qquad 0 < x < a$$
$$G(x) = g(2a - x), \quad a < x < 2a.$$

بين ان $G(x)$ تقابل السلسلة

$$G(x) \sim \sum_{N=1}^{\infty} B_N \sin \frac{N\pi x}{2a}, \quad 0 < x < 2a.$$

4 . بين ان B_N للسلسلة اعلاه تحقق

$$B_N = 0 \text{ (زوجية } N) \quad B_N = \frac{2}{a}\int_0^a g(x) \sin \frac{N\pi x}{2a}\, dx \quad \text{(فردية } N)$$

5 . ارسم مخطط $g(x)$ ، $G(x)$ ، ثم جد السلسلة المقابلة ، اذا كانت $g(x)$ معرفة بـ :

a . $g(x) = x, \quad 0 < x < a$

b . $g(x) = T, \quad 0 < x < a.$

6 . بين ان الدوال الذاتية وجدناها في هذا البند متعامدة اي ، برهن ان :

$$\int_0^a \sin \lambda_n x \sin \lambda_m x\, dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \dfrac{a}{2} & (m = n) \end{cases}$$

حيث

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2a}.$$

7 . حل المسألة المذكورة في المعادلات (1) ـ (4) ، خذ $f(x) = Tx/a$

8 . استخدم علاقة التعامدية في التمرين ، لتبرير الصيغة في المعادلة (18) .

9 . حل مسألة اللاتجانس :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{T}{a^2}, \qquad 0 < x < a, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = T_0, \; \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = T_0, \qquad 0 < x < a.$$

10 . حل هذه المسألة بدلالة درجة حرارة القضيب علماً ان سطحة الخارجي بتماس مع وسط درجة حرارتِهِ صفر .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t} + \gamma^2 u, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = T_0, \quad 0 < x < a.$$

11 . حل المسألة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < a, \quad 0 < t$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, u(a, t) = T_0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = T_1, \qquad 0 < x < a.$$

12 . قارن الحل في تمرين (11) بالمعادلة (20) . هل يمكن ان يؤدي احدهما الى الاخر .

6 . مثال : الحمل EXAMPLE: CONVECTION

درسنا ثلاثة انواع من الامثلة التي تحدد فيها الشروط الحدودية اما بـ u واما بـ $\partial u/\partial x$ والان سوف ندرس الحالة التي يكون فيها الشرط من النوع الثالث مشمولاً . والنموذج الفيزياوي هو التوصيل الحراري في قضيب ذي سطح جانبي معزول ، ونهايته اليسرى ذات درجة حرارة ثابتة ونهاية اليمنى معرضة للانتقال الحراري التوصيلي .

القيم الحدودية الابتدائية التي تتحقق بواسطة درجة الحرارة في القضيب هي :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < a, \quad 0 < t \qquad (1)$$

$$u(0, t) = T_0, \qquad 0 < t \qquad (2)$$

$$-\kappa\frac{\partial u}{\partial t}(a, t) = h(u(a, t) - T_1), \quad 0 < t \qquad (3)$$

$$u(x, 0) = f(x), \qquad 0 < x < a. \qquad (4)$$

وجدنا في بند (2) ان حل حالة الاتزان لهذه المسألة هو

$$v(x) = T_0 + \frac{xh(T_1 - T_0)}{\kappa + ha}. \qquad (5)$$

الان ، كون الشروط الحدودية الاصلية غير متجانسة ، نصيغ المسألة لحل الانتقال $w(x, t) = u(x, t) - v(x)$ وبالتعويض المباشر يمكن ان نجد

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial w}{\partial t}, \qquad 0 < x < a, \quad 0 < t \qquad (6)$$

$$w(0, t) = 0, \quad hw(a, t) + \kappa\frac{\partial w}{\partial x}(a, t) = 0, \quad 0 < t \qquad (7)$$

$$w(x, 0) = f(x) - v(x) = g(x), \qquad 0 < x < a. \qquad (8)$$

والحل لـ $w(x, t)$ يمكن ايجاده بواسطة طريقة الجداء . وبفرض ان w تأخذ صيغة الجداء $\phi(x)T(t)$ ، فان المتغيرات يمكن فصلها كما في السابق ، وتعطي معادلتين تفاضليتين اعتياديتين مرتبطتين بوسيط مشترك λ^2 ،

$$\phi'' + \lambda^2\phi = 0, \quad 0 < x < a$$

$$T' + \lambda^2 kT = 0, \quad 0 < t.$$

وكون الشروط الحدودية خطية ومتجانسة ، لذلك يمكن تحويلها مباشرة الى شروط على ϕ ،

$$w(0, t) = \phi(0)T(t) = 0$$

$$\kappa\frac{\partial w}{\partial x}(a, t) + hw(a, t) = [\kappa\phi'(a) + h\phi(a)]T(t) = 0.$$

اما $T(t)$ تساوي 0 (والتي تجعل $w(x, t)$ يساوي 0) ، واما

$$\phi(0) = 0, \quad \kappa\phi'(a) + h\phi(a) = 0.$$

وبربط المعادلة التفاضلية والشروط الحدودية على ϕ ، نحصل على مسألة القيم الذاتية

$$\phi'' + \lambda^2\phi = 0, \quad 0 < x < a \tag{9}$$

$$\phi(0) = 0, \quad \kappa\phi'(a) + h\phi(a) = 0. \tag{10}$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو :

$$\phi(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x.$$

الشرط الحدودي عند 0 يتطلب $\phi(0) = c_1 = 0$، وتبقى $\phi(x) = c_2 \sin \lambda x$.
والان عند الشرط الاخر :

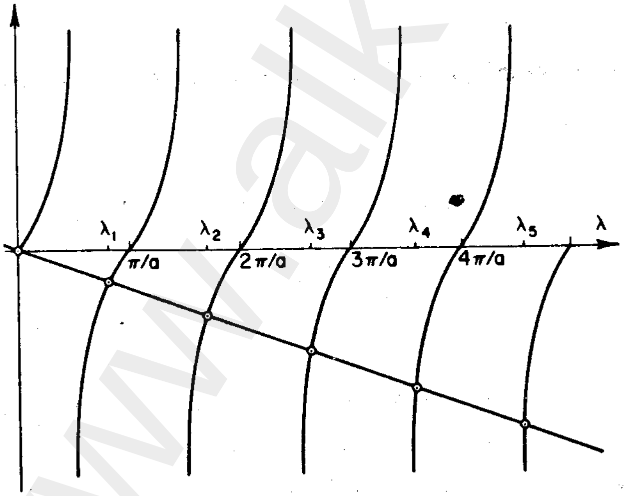
$$\kappa\phi'(a) + h\phi(a) = c_2(\kappa\lambda \cos \lambda a + h \sin \lambda a) = 0.$$

وباستبعاد الاحتمالين$c_2 = 0$ ، $\lambda = 0$، لان كليهما يؤدي الى الحل التافه ، نحصل على :

$$\kappa\lambda \cos \lambda a + h \sin \lambda a = 0, \quad \text{or} \quad \tan \lambda a = -\frac{\kappa}{h}\lambda.$$

ومن مخططي $\tan \lambda a$ و $-\kappa\lambda/h$ (شكل 5 ـ 2) ، ويمكن ان نلاحظ وجود عدد غير منته من الحلول $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ ولكل n كبيرة ، فان القيمة التقريبية λ_n هي

$$\lambda_n \simeq \frac{2n-1}{2}\frac{\pi}{a}.$$



شكل 5 ـ 2 مخططي $\tan \lambda a$ و $-\kappa\lambda/h$.

(ملاحظة : الحلول مبوبة في كتاب *Handbook of Mathematical Functions* تاليف Abramowitz و Stegun ، 1972 .)

وبهذا يكون لكل $n = 1, 2, \ldots,$ ، توجد قيمة ذاتية λ_n^2 ودالة ذاتية $\phi_n(x)$ تحقق مسألة القيم الذاتية في معادلتين (9) ، (10) المرافقة لـ $\phi_n(x)$ هي الدالة

$$T_n(t) = \exp(-\lambda_n^2 kt)$$

التي تجعل $w_n(x, t) = \phi_n(x)T_n(t)$ حلاً للمعادلة التفاضلية الجزئية (6) والشروط الحدودية معادلة (7) . وكون المعادلة (6) والشروط معادلة (7) خطية ومتجانسة ، وان اي تركيب خطي من الحلول هو حل ايضاً . لذلك ، فان حل الانتقال يأخذ الصيغة الاتية :

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \lambda_n x \exp(-\lambda_n^2 kt)$$

وبتذكر الشرط الواجب تحققه ، فان الشرط الابتدائي الذي معادلة (8) ، هو

$$w(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \lambda_n x = g(x), \quad 0 < x < a,$$

اي ان المعاملات قد تم اختيارها لتجعل االسلسلة غير المنتهية تساوي $g(x)$.

وبالرغم من ان المعادلة (11) تشبه مسألة سلسلة فورية ، ولكنها ليس كذلك ، لان λ_2 , λ_3, ... الخ ليست جميعها من مضروبات λ_1 باعداد صحيحة . واذا حاولنا استخدام فكرة التعامدية ، سوف نجد طريقة اختيار b_n ، والتي يمكن ايجادها باستخدام حسابات مباشرة ، على انها

$$\int_0^a \sin \lambda n\, x \sin \lambda m x\, dx = 0 \qquad n \neq m$$ اذا كان

الان ، اذا ضربنا طرفي المعادلة (11) بـ $\sin \lambda_m x$ (حيث m ثابت) ثم نكامل من o الى a ، فان جميع حدود السلسلة تختفي ، عدا الحالة التي يكون فيها $n = m$ معطية معادلة بـ b_m

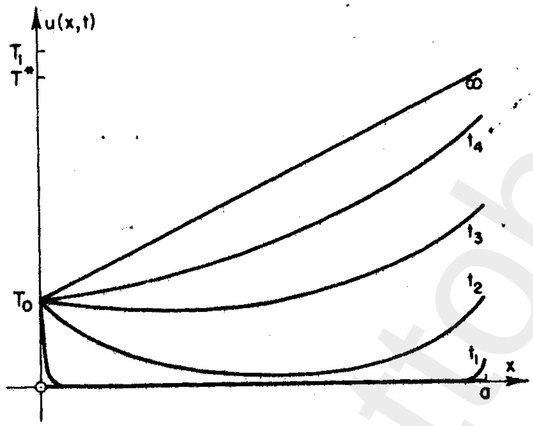
$$b_m = \frac{\int_0^a g(x) \sin \lambda_m x\, dx}{\int_0^a \sin^2 \lambda_m x\, dx}. \qquad (12)$$

بواسطة هذه الصيغة ، b_m يمكن حسابها وادخالها في صيغة $w(x, t)$. لذلك يمكن ان نضع حل $u(x, t)$ للمسألة الاصلية ، المعادلات (1) ـ (4) :

$$u(x, t) = v(x) + w(x, t)$$

$$= T_0 + \frac{xh(T_1 - T_0)}{(\kappa + ha)} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \lambda_n x \exp(-\lambda_n{}^2 kt).$$

الشكل (6 ـ 2) هو مخطط $u(x, t)$ المقابل لـ $f(x) = 0$



شكل 6 ـ 2 . الحل لـ $u(x, t)$ المقابل لـ $u(x, 0) = 0$ مخطط عند $t = 0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < \infty$

تمارين

1 . ارسم $v(x)$ المعرفة في المعادلة (5) بغرض ،

أ. a. $T_1 > T_0$

ب. b. $T_1 = T_0$

جـ. c. $T_1 < T_0$.

2 . جد تكامل التعامدية بالتكامل المباشر . من الضروري ان نستخدم المعادلة التي تعرف λ_n على النحو ،

$$\kappa\lambda_n \cos \lambda_n a + h \sin \lambda_n a = 0.$$

3 . لماذا تجاهلنا الحلول السالبة للمعادلة

$$\tan \lambda a = \frac{-\kappa\lambda}{h}.$$

4 . اشتق الصيغة في معادلة (12) للمعاملات b_m .

5 . ارسم مخطط اول دالتين ذاتيتين لهذا المثال باخذ
$\kappa/h = 0.5.\ (\lambda_1 = 2.29/a,\ \lambda_2 = 5.09/a).$

6 . بين ان ،

$$\int_0^a \sin^2 \lambda_m x\, dx = \frac{a}{2} + \frac{\kappa}{h}\frac{\cos^2 \lambda_m a}{2}.$$

7 . جد المعاملات b_m المقابلة لـ
$g(x) = 1, \quad 0 < x < a.$

8 . استخدم الحل في التمرين 7 ، اكتب عدداً من الحدود الاولى من حلول المعادلات (6) ـ (8) ، حيث $g(x) = T, 0 < x < a$.

9 . اعد التمرين 7 ولكن بغرض
$g(x) = x, \quad 0 < x < a.$

7 . مسائل سترم ـ ليوفلي STURM–LIOUVILLE PROBLEMS

لاحظنا في نهاية البند السابق ، ان سلسلة فوريه الاعتيادية ليست ملائمة لجميع المسائل التي نقوم بحلها . لذلك سوف نقوم ببعض التعميمات ، التي تغطي معظم الحالات التي تظهر من فصل المتغييرات . في المسائل البسيطة ، نجد عادة ان مسائل القيم الذاتية التي تكون بالصيغة الاتية ؛

$$\phi'' + \lambda^2\phi = 0, \quad l < x < r \tag{1}$$

$$\alpha_1\phi(l) - \alpha_2\phi'(l) = 0 \tag{2}$$

$$\beta_1\phi(r) + \beta_2\phi'(r) = 0. \tag{3}$$

ليس من الصعوبة ان نجد القيم الذاتية لهذه المسألة . وبالحساب المباشر يمكن ان نبين ان الدوال الذاتية متعامدة . ولكن الحساب غير المباشر لا يزال هو الطريق الاسهل .

نفرض ان ϕ_m و ϕ_n دالتين ذاتيتين تقابلان القيمتين الذاتيتن المختلفتين λ_m^2 و λ_n^2 . اي ان

$$\phi_n'' + \lambda_n^2\phi_n = 0, \quad \phi_m'' + \lambda_m^2\phi_m = 0,$$

وكلتا الدالتين تحققان الشروط الحدوية . واذا ضربنا المعادلة التفاضلية الاولى بـ ϕ_m ، والثانية بـ ϕ_n، وبالطرح ، ونقل الحدود التي تحتوي على $\phi_n\phi_m$ الى الجهة الاخرى نحصل على :

$$\phi_n''\phi_m - \phi_m''\phi_n = (\lambda_m^2 - \lambda_n^2)\phi_n\phi_m.$$

الطرف الايمن هو ثابت (غير صفري) مضروب بالتكاملية في العلاقة التعامدية :

$$\int_l^r \phi_n(x)\phi_m(x)\, dx = 0, \quad n \neq m$$

والتي تكون صحيحة اذا كان الطرف الايسر يساوي 0 :

$$\int_l^r (\phi_n''\phi_m - \phi_m''\phi_n)\, dx = 0.$$

ان هذا التكامل يمكن ايجاده بطريقة التجزئة :

$$\int_l^r (\phi_n''\phi_m - \phi_m''\phi_n)\, dx$$

$$= [\phi_n'(x)\phi_m(x) - \phi_m'(x)\phi_n(x)]\Big|_l^r - \int_l^r (\phi_n'\phi_m' - \phi_m'\phi_n')\, dx.$$

وكون التكامل الاخير يساوي 0، فنحصل على :

$$(\lambda_m^2 - \lambda_n^2)\int_l^r \phi_n(x)\phi_m(x)\, dx = [\phi_n'(x)\phi_m(x) - \phi_m'(x)\phi_n(x)\Big|_l^r$$

وكلًا من ϕ_n و ϕ_m يحقق الشرط الحدودي عند $x = r$,

$$\beta_1\phi_m(r) + \beta_2\phi_m'(r) = 0$$

$$\beta_1\phi_n(r) + \beta_2\phi_n'(r) = 0.$$

المعادلتان اعلاه يمكن اعتبارهما معادلتين آنيتين في β_1 و β_2. وفي الاقل فان احد العددين β_1 و β_2 لا يساوي ٥ لان خلاف ذلك يؤدي الى عدم وجود شرط حدودي . وبهذا فإن محدد المعادلتين يجب ان يساوي ٥ .

$$\phi_m(r)\phi_n'(r) - \phi_n(r)\phi_m'(r) = 0.$$

والنتيجة نفسها تتحقق عند $x = l$. لذلك

$$[\phi_n'(x)\phi_m(x) - \phi_m'(x)\phi_n(x)]\Big|_l^r = 0$$

وبهذا نكون قد برهنا العلاقة التعامدية :

$$\int_l^r \phi_n(x)\phi_m(x)\, dx = 0, \quad n \neq m$$

للدوال الذاتية للمعادلات (3)–(1).

ويمكن ان نعطي تعميماً اوسع حول التعامدية للدوال الذاتية ، بأقل ما يمكن من مشاكل . تأمل نموذج مسألة القيم الحدودية ادناه ، والذي يمكن ان يظهر من فصل المتغييرات في مسألة التوصيل الحراري (لاحظ بند 9) .

$$[s(x)\phi'(x)]' - q(x)\phi(x) + \lambda^2 p(x)\phi(x) = 0, \quad l < x < r$$

$$\alpha_1\phi(l) - \alpha_2\phi'(l) = 0$$

$$\beta_1\phi(r) + \beta_2\phi'(r) = 0.$$

دعنا الان نستخدم الخطوات نفسها اعلاه لهذه المسألة . الدوال الذاتية تحقق المعادلتين التفاضلتين الآتيتين :

$$(s\phi_n')' - q\phi_n + \lambda_n^2 p\phi_n = 0$$

$$(s\phi_m')' - q\phi_m + \lambda_m^2 p\phi_m = 0.$$

نضرب الاولى بـ ϕ_m، والثانية بـ ϕ_n، وبالطرح (الحدود التي تحتوي على $q(x)$ تحذف) ، وبنقل الحد الذي يحتوي على $p\phi_n\phi_m$ الى الطرف الاخر :

$$(s\phi_n')'\phi_m - (s\phi_m')'\phi_n = (\lambda_m^2 - \lambda_n^2)p\phi_n\phi_m. \quad (4)$$

وبتكامل الطرفين من l الى ، واستخدام التكامل بطريقة التجزئة في الطرف الايسر :

$$\int_l^r [(s\phi_n')'\phi_m - (s\phi_m')'\phi_n]\, dx$$

$$= [s\phi_n'\phi_m - s\phi_m'\phi_n]\Big|_l^r - \int_l^r (s\phi_n'\phi_m' - s\phi_n'\phi_m')\, dx.$$

التكامل الثاني يساوي 0 . من الشروط الحدودية نجد ان

$$\phi_n'(r)\phi_m(r) - \phi_m'(r)\phi_n(r) = 0$$
$$\phi_n'(l)\phi_m(l) - \phi_m'(l)\phi_n(l) = 0$$

بالمسببات السابقة نفسها .
لذلك ، وجدنا العلاقة التعامدية .

$$\int_l^r p(x)\phi_n(x)\phi_m(x)\, dx = 0, \quad \lambda_n^2 \neq \lambda_m^2$$

للدوال الذاتية للمسألة قد تم ذكرها .

خلال العمليات ، قمنا ببعض الفرضيات حول التكاملية للدوال بعد المعادلة (4) . في حالات منفردة ، عندما تكون المعاملات $s, q,$ ، و p وان الدوال الذاتية نفسها معلومة ، فيمكن ان نتحقق بسهولة من سريان مفعول الخطوات . بشكل عام ، نود ان نضمن وجود الدوال الذاتية وشرعية الحسابات بعد المعادلة (4) . لكي نقوم بهذا ، نحتاج الى الآتي :

تعريف . يقال للمسألة

$$(s\phi')' - q\phi + \lambda^2 p\phi = 0, \quad l < x < r \tag{5}$$
$$\alpha_1\phi(l) - \alpha_2\phi'(l) = 0 \tag{6}$$
$$\beta_1\phi(r) + \beta_2\phi'(r) = 0 \tag{7}$$

بمسألة ستيرم ـ ليوفلي المنتظمة (*regular Sturm–Liouville*) اذا تحققت الشروط الآتية :

a. $s(x), s'(x), q(x),$. و $p(x)$ مستمرة في الفترة $l \leq x \leq r$;
b. $s(x) > 0$ و $p(x) > 0$ في الفترة $l \leq x \leq r$;
c. $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0, \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0.$
d. يظهر الوسيط λ فقط حيث أعطيّ .

الشرط (a) والشرط الاول من (b) معا . تم فرضهما للتأكد من ان المعادلة التفاضلية لها حلول مستمرة . لاحظ ان $s(l)$ و $s(r)$ يجب ان تكون موجبة (لا تساوي 0) . الشرط (c) يبين وجود شرطين حدودين $0 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$ اذا ـ واذا فقط $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, والذي يؤدي الى عدم وجود شرط . والمتطلبات الاخرى تضاف الى الخواص المرغوب فيها بطرق ليست سهلة الان نصبح في موقف يسمح لنا باعطاء المبرهنات التي تعطي معلومات ضرورية حول الدوال الذاتية .

مبرهنة 1 .

مسألة سترم ـ ليوفلي المنتظمة لها عدد غير منته من الدوال الذاتية $\phi_1, \phi_2, \ldots$، وكل واحدة منها تقابل قيمة ذاتية مختلفة $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots$ اذا كان $n \neq m$, فان الدالتين الذاتيتين ϕ_m و ϕ_n متعامدتان مع دالة وزن $p(x)$: *weight function* ،

$$\int_l^r \phi_n(x)\phi_m(x)p(x)\, dx = 0, \quad n \neq m.$$

يمكن اثبات المبرهنة مباشرة لان استمرارية المعاملات والدوال الذاتية تجعل حساباتنا شرعية . ويجب ملاحظة ان اي مضرب للدالة الذاتية هو دالة ذاتية ايضاً ، ولكن عدا المضروب بثابت ، فان الدوال الذاتية لمسألة سترم ليوفلي وحيدة .

ثمة عدد من الخواص الاخرى لمسألة سترم ـ ليوفلي معروفة . ونلخص بعضاً منها ادناه .

مبرهنة 2 .

مسألة سترم ـ ليوفلي المنتظمة لها عدد غير منتهٍ من القيم الذاتية وان $\lambda_n^2 \to \infty$ عندما $n \to \infty$.

اذا رتبت القيم الذاتية $\lambda_1^2 < \lambda_2^2 < \ldots$, فان الدالة الذاتية المقابلة لـ λ_n^2 لها فقط $n - 1$ من الاصفار في الفترة $l < x < r$ (استبعدت النهايتان) .

اذا كان $q(x) \geq 0$, وان $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ جميعها اكبر او تساوي 0 ، فان جميع القيم الذاتية تكون غير سالبة .

أمثلة .

1 . لاحظ ان مسائل القيم الذاتية في البنود (3 ـ 6) في هذا الفصل هي جميعها مسائل سترم ـ ليوفلي المنتظمة ، كما في (1) ـ (3) من هذا البند . المسألة

$$\phi'' + \lambda^2\phi = 0, \quad 0 < x < a$$
$$\phi(0) = 0, \quad h\phi(a) + \kappa\phi'(a) = 0$$

هي مسألة سترم ليوفلي المنتظمة ، التي فيها ،

$$s(x) = p(x) = 1, \quad q(x) = 0, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 0, \quad \beta_1 = h, \quad \beta_2 = \kappa.$$

وان جميع هذه الشروط تتحقق .

2 . المثال غير المباشر هو

$$(x\phi')' + \lambda^2\left(\frac{1}{x}\right)\phi = 0, \quad 1 < x < 2$$

$$\phi(1) = 0, \quad \phi(2) = 0.$$

نضع $s(x) = x,\ p(x) = 1/x,\ q(x) = 0.$ هذه هي مسألة سترم ـ ليوفلي المنتظمة . العلاقة التعامدية هي

$$\int_1^2 \phi_n(x)\phi_m(x)\frac{1}{x}\,dx = 0, \quad n \neq m.$$

تمارين

1 . الحل العام للمعادلة التفاضلية في مثال (2) هو :

$$\phi(x) = c_1\cos(\lambda \ln x) + c_2\sin(\lambda \ln x).$$

جد القيم الذاتية والدوال الذاتية وتأكد من تحقق العلاقة التعامدية مباشرة بواسطة التكامل .

2 . تحقق من شروط المبرهنة 2 للمسألة التي تحتوي على :

$$\phi'' + \lambda^2\phi = 0, \quad 0 < x < a,$$

بشروط حدودية هي :

a. $\phi(0) = 0,\ \phi(a) = 0$ في b. $\phi'(0) = 0,\ \phi'(a) = 0.$

في الحالة (b) ، $\lambda_1^2 = 0$

3 . جد القيم الذاتية ، والدوال الذاتية وارسم مخطط عدد من الدوال الذاتية الاولى للمسألة .

$$\phi'' + \lambda^2\phi = 0, \quad 0 < x < a$$

بشروط حدودية .

.a	$\phi'(a) = 0$	$\phi(0) = 0,$
.b	$\phi(a) = 0$	$\phi'(0) = 0,$
.c	$\phi(a) + \phi'(a) = 0$	$\phi(0) = 0,$
.d	$\phi'(a) = 0$	$\phi(0) - \phi'(0) = 0,$
.e	$\phi(a) + \phi'(a) = 0.$	$\phi(0) - \phi'(0) = 0,$

4 . في المعادلات (1) ـ (3) ، خذ $l = 0, r = a,$ وبيّن ان :

a . الدوال الذاتية هي $\phi_n(x) = \alpha_2\lambda_n \cos \lambda_n x + \alpha_1 \sin \lambda_n x$

b . القيم الذاتية يجب ان تكون حلولاً للمعادلة :

$$-\tan \lambda a = \frac{\lambda(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)}{\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2\lambda^2}.$$

5 . بيّن ان الدوال الذاتية لكل من المسائل الآتية تكون متعامدة ، اذكر العلاقة التعامدية .

.a	$\phi(0) = 0, \quad \phi'(a) = 0$	$\phi'' + \lambda^2(1 + x)\phi = 0,$
.b	$\phi(0) - \phi'(0) = 0, \quad \phi(a) = 0$	$(e^x\phi')' + \lambda^2 e^x\phi = 0,$
.c	$\phi(1) = 0, \quad \phi'(2) = 0$	$\phi'' + \left(\frac{\lambda^2}{x^2}\right)\phi = 0,$
.d	$\phi'(0) = 0, \quad \phi'(a) = 0$	$\phi'' - \sin x\, \phi + e^x\lambda^2\phi = 0,$

6 . تأمل المسألة :

$$(s\phi')' - q\phi + \lambda^2 p\phi = 0, \quad l < x < r$$

$$\phi(r) = 0$$

والتي فيها $s(l) = 0, s(x) > 0$ في الفترة $l < x \leq r,$ وان q و p تحققان الشروط لمسألة سترم ـ ليوفلي المنتظمة . وان كلاً من $\phi'(x)$ و $\phi(x)$ لها غاية منتهية عندما تكون $x \to l+$. بيين ان الدوال الذاتية (اذا كانت موجودة) تكون متعامدة .

7 . المسألة ادناه ليست مسألة سترم ـ ليوفلي المنتظمة . لماذا ؟ بين ان الدوال الذاتية ليست متعامدة :

$$\phi'' + \lambda^2\phi = 0, \quad 0 < x < a$$
$$\phi(0) = 0, \quad \phi'(a) - \lambda^2\phi(a) = 0$$

8 . بيّن ان 0 هو قيمة ذاتية للمسألة

$$(s\phi')' + \lambda^2 p\phi = 0, \quad l < x < r$$
$$\phi'(l) = 0, \quad \phi'(r) = 0$$

حيث s و p تحققان شروط مسألة سترم ـ ليوفلي المنتظمة .

8 . نشر سلاسل الدوال الذاتية .

EXPANSION IN SERIES OF EIGENFUNCTIONS

لاحظنا ان الدوال الذاتية التي تظهر من مسألة سترم ـ ليوفلي المنتظمة

$$(s\phi')' - q\phi + \lambda^2 p\phi = 0, \quad l < x < r \tag{1}$$
$$\alpha_1\phi(l) - \alpha_2\phi'(l) = 0 \tag{2}$$
$$\beta_1\phi(r) + \beta_2\phi'(r) = 0 \tag{3}$$

تكون متعامدة بدالة وزن $p(x)$ ،

$$\int_l^r p(x)\phi_n(x)\phi_m(x)\,dx = 0, \quad n \neq m, \tag{4}$$

وان ما يهمنا هو ان نعبر عن الدوال بدلالة سلسلة الدالة الذاتية .
نفرض ان الدالة $f(x)$ معرفة في الفترة $l < x < r$ ولكي نعبر عن $f(x)$ بدلالة الدوال الذاتية $\phi_n(x)$ للمعادلات (1) ـ (3) . يجب ان يكون لدينا الآتي :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x), \quad l < x < r \tag{5}$$

العلاقة التعامدية معادلة (4) تعطينا الطريقة التي نحسب فيها المعاملات .
وبضرب طرفي المعادلة (5) بـ $\phi_m(x)p(x)$ (حيث m ثابت صحيح) وباخذ التكامل من l الى r نحصل على .

$$\int_l^r f(x)\phi_m(x)p(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_l^r \phi_n(x)\phi_m(x)p(x)\,dx$$

ومن العلاقة التعامدية نستنتج ان جميع الحدودفي السلسلة يجب ان تختفي عدا الحد الذي يكون فيه $m = n$ لذلك فان ،

$$\int_l^r f(x)\phi_m(x)p(x)\,dx = c_m \int_l^r \phi_m^2(x)p(x)\,dx$$

وتعطينا الصيغة التي بموجبها يتم اختيار c_m .

الان يمكن ان نعطي مبرهنة التقارب للنشر بدلالة الدوال الذاتية . لاحظ وجه التشابه مع مبرهنة تقارب سلسلة فوريه . بالطبع . سلسلة فورية الجيبية او سلسلة فورية الجيب تمامية هي سلاسل لدوال ذاتية لمسألة سترم ـ ليوفلي المنتظمة . والتي فيها تكون دالة الوزن تساوي 1 .

مبرهنة . لتكن $\phi_1,\phi_2,\ldots$ دوال ذاتية لمسألة سترم ـ ليوفلي المنتظمة في المعادلات (1) ـ (3) . حيث βs و αs ليست سالبة .

اذا كانت $f(x)$ ملساء مقطعياً في الفترة $l < x < r$, فأن

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x), \quad l < x < r \tag{6}$$

حيث ،

$$c_n = \frac{\displaystyle\int_l^r f(x)\phi_n(x)p(x)\,dx}{\displaystyle\int_l^r \phi_n^2(x)p(x)\,dx}.$$

وعلاوة على ذلك ، اذا كانت السلسلة ،

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \left[\int_l^r \phi_n^2(x)p(x)\,dx\right]^{1/2}$$

متقاربة ، فان سلسلة معادلة (6) متقاربة بانتظام ،
$l \le x \le r.$

تمارين

1 . بيّن ان ،

$$\lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{\ln b}\right)^2, \quad \phi_n = \sin(\lambda_n \ln x)$$

هي قيم ذاتية ودوال ذاتية لـ ،

$$(x\phi')' + \lambda^2\left(\frac{1}{x}\right)\phi = 0, \quad 1 < x < b$$

$$\phi(1) = 0, \quad \phi(b) = 0.$$

جد نشر الدالة $f(x) = x$ بدلالة هذه الدوال الذاتية . لاي القيم تقترب السلسلة عند $x = 1$ و $x = b$ ؟

2 . لتكن $\phi_1, \phi_2, \ldots$ دوالاً ذاتية لمسألة ستيرم ـ ليوفلي المنتظمة وانها متعامدة بدالة وزن $p(x)$ في الفترة $l < x < r,$ واذا كانت الدالة $f(x)$ ملساء مقطعياً ، فان

$$\int_l^r f^2(x)p(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n^2$$

حيث ،

$$a_n = \int_l^r \phi_n^2(x)p(x)\,dx$$

وان c_n هي معامل f كما اعطي في المبرهنة . بين لماذا تكون هذه العلاقة صحيحة واستنتج ان $c_n\sqrt{a_n}\to 0$ عندما $n\to\infty$.

3 . بيّن ان القيم الذاتية والدوال الذاتية للمسألة

$$(e^x\phi')' + e^x\gamma^2\phi = 0, \quad 0 < x < a$$
$$\phi(0) = 0, \quad \phi(a) = 0$$

هي :

$$\gamma_n^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \frac{1}{4}, \quad \phi_n(x) = \exp\left(-\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right).$$

جد معاملات نشر الدالة $f(x) = 1$ ، $0 < x < a$ بدلالة ϕ_n

4 . لتكن $\phi_1, \phi_2, \ldots$ دوال ذاتية لمسألة سترم ـ ليوفلّي المنتظمة . يقال للاعداد $\sqrt{a_n}$ بانها ثوابت نظيمية (*normalizing constants*) . ويقال للدوال $\psi_n = \phi_n/\sqrt{a_n}$ بأنها دوال ذاتية نظيمية . بين ان :

$$\int_l^r \psi_n^2(x)p(x)\,dx = 1, \quad \int_l^r \psi_n(x)\psi_m(x)p(x)\,dx = 0, \quad n \neq m.$$

5 . جد الصيغة لمعاملات دالة ملساء مقطعياً $f(x)$ في السلسلة

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\psi_n(x), \quad l < x < r$$

حيث ان ψ_n دوال ذاتية نظيمية .

6 . بين ان للدالة في تمرين 5 يكون

$$\int_l^r f^2(x)p(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2.$$

7 . ما هي الدوال الذاتية النظيمية للمسألة الاتية ؟

$$\phi'' + \lambda^2\phi = 0, \quad 0 < x < 1$$
$$\phi'(0) = 0, \quad \phi'(1) = 0$$

9 . تعاميم لمسألة التوصيل الحراري .

GENERALITIES ON THE HEAT CONDUCTION PROBLEM

ان المعلومات التي حصلنا عليها حول مسألة سترم ـ ليوفلي يمكن ان تعطينا بعض الملاحظات حول مسألة التوصيل الحراري العامة . نأخذ القضيب كنموذج فيزياوي والذي يكون سطحه الجانبي معزولاً ولكي نبسط المسالة ، سوف نفرض انه لاتوجد حرارة متولدة داخل القضيب .

وكون صفات المادة تتغير بالنسبة للموقع ، فالمعادلة التفاضلية الجزئية التي تتحكم بدرجة الحرارة $u(x, t)$ في القضيب ستكون

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \rho(x)c(x)\frac{\partial u}{\partial t}, \quad l < x < r, \quad 0 < t. \tag{1}$$

كل من الانواع الثلاثة للشروط الحدودية يمكن فرضها على اي من الحدود ، وعليه نستخدم الشروط الحدودية ؛

$$\alpha_1 u(l, t) - \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = c_1, \quad t > 0 \tag{2}$$

$$\beta_1 u(r, t) + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial x}(r, t) = c_2, \quad t > 0. \tag{3}$$

اذا اثبتنا درجة الحرارة ، فان معامل $\partial u/\partial x$ يساوي o . واذا عزلنا الحدود ، فان معامل u يساوي **0** ، والطرف الايمن يساوي **0** ايضاً . واذا كان هنالك توصيل بالحمل عند حدود ما ، فان كلا المعاملين يكونان موجبين ، والاشارات ستكون كما تظهر .

الان بعد ان تعرفنا على الحالة التي تكون فيها الحدوديتين معزولتين ، فان حل حالة الاستقرار له بعض الخواص الغريبة ، سوف ندع هذه الحالة جانباً ونعتبرها حالة خاصة .

نفرض الان ، اما α_1 واما β_1 واما كلاهما موجب . واخيراً فاننا نحتاج الشرط الابتدائي بالصيغة ؛

$$u(x, 0) = f(x), \quad l < x < r. \tag{4}$$

المعادلات (1) ـ (4) تكوّن مسألة القيم الحدودية ـ القيم الابتدائية

نفرض ان c_1 c_2 ثابتان . اذن يجب ان نجد اولاً حل حالة الاستقرار

$$v(x) = \lim_{t \to \infty} u(x, t).$$

الدالة $v(x)$ تحقق مسألة القيم الحدودية

$$\frac{d}{dx}\left(\kappa(x)\frac{dv}{dx}\right) = 0, \quad l < x < r \tag{5}$$

$$\alpha_1 v(l) - \alpha_2 v'(l) = c_1 \tag{6}$$

$$\beta_1 v(r) + \beta_2 v'(r) = c_2. \tag{7}$$

وبما ان α_1 أو β_1 موجبة . فالمسألة يمكن حلها . في الحقيقة ، من الممكن ان نعطي صيغة لـ $v(x)$ بدلالة الدالة (لاحظ تمرين 1)

$$\int_l^x \frac{d\xi}{\kappa(\xi)} = I(x). \tag{8}$$

الان سوف نعطي بعض الدوال الجديدة . لتكن $\bar{c}, \bar{\rho}, \bar{\kappa}$ هي معدل قيم الدوال $\kappa(x)$ $\rho(x)$, $c(x)$ سوف نعرف الدوال اللا بعدية $p(x)$, $s(x)$ بالشكل

$$\kappa(x) = \bar{\kappa}s(x), \quad \rho(x)c(x) = \bar{\rho}\bar{c}p(x).$$

كذلك نعرف درجة حرارة الانتقال .

$$w(x,t) = u(x,t) - v(x).$$

وبالحساب المباشر ، واستخدام حقيقة كون $v(x)$ حل للمعادلات (5) ـ (7) ، يمكن ان نبين ان $w(x, t)$ تحقق مسألة القيم الحدودية ـ القيم الابتدائية

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(s(x)\frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{1}{k}p(x)\frac{\partial w}{\partial t}, \quad l < x < r, \quad 0 < t \tag{9}$$

$$\alpha_1 w(l, t) - \alpha_2 \frac{\partial w}{\partial x}(l, t) = 0, \qquad 0 < t \tag{10}$$

$$\beta_1 w(r, t) + \beta_2 \frac{\partial w}{\partial x}(r, t) = 0, \qquad 0 < t \tag{11}$$

$$w(x, 0) = f(x) - v(x) = g(x), \qquad l < x < r \tag{12}$$

والتي لها شروط حدودية متجانسة . الثابت k معرف على انه $\overline{\kappa}/\overline{\rho}\overline{c}$، الان تستخدم طريقة فصل المتغيرات لايجاد w . اذا كانت w بالصيغة $w(x, t) = \phi(x)T(t)$ فإن المعادلة التفاضلية تصبح

$$T(t)(s(x)\phi'(x))' = \frac{1}{k} p(x)\phi(x)T'(t)$$

وبالقسمة على $p\phi T$ ، نجد معادلة الفصل .

$$\frac{(s\phi')'}{p\phi} = \frac{T'}{kT}, \quad l < x < r, \quad 0 < t.$$

وكما ذكرنا سابقاً ، فان المساواة بين دالة x ودالة t تتحقق فقط اذا كانت قيمتها المشتركة ثابتة . بالاضافة الى ذلك ، نتوقع ان يكون الثابت سالباً ، وعليه نضع

$$\frac{(s\phi')'}{p\phi} = \frac{T'}{kT} = -\lambda^2$$

ونفصل المعادلة الى معادلتين اعتياديتين .

$$T' + \lambda^2 kT = 0, \quad 0 < t$$
$$(s\phi')' + \lambda^2 p\phi = 0, \quad l < x < r.$$

الشروط الحدودية ، التي تكون خطية ومتجانسة ، يمكن ايضاً تحويلها الى شروط على ϕ . فمثلاً ، المعادلة (10) تصبح

$$[\alpha_1\phi(l) - \alpha_2\phi'(l)]T(t) = 0, \quad 0 < t$$

وكون $T(t) = 0$ تجعل $w(x, t) = 0$ نأخذ العامل الاخر على انه **0**. لذلك ، فان مسألة القيم الذاتية هي :

$$(s\phi')' + \lambda^2 p\phi = 0, \quad l < x < r \qquad (13)$$

$$\alpha_1\phi(l) - \alpha_2\phi'(l) = 0 \qquad (14)$$

$$\beta_1\phi(r) + \beta_2\phi'(r) = 0. \qquad (15)$$

وكون s و p تتعلقان بالصفات الفيزياوية للقضيب ، فانهما يجب ان تكونا موجبتين . واذا فرضنا ايضاً ان p, s, s' مستمرة . فان المعادلات (13) ـ (15) هي مسألة سترم ـ ليوفلي المنتظمة ، وانه لا بد من الاتي :

1 . يوجد عدد غير منته من القيم الذاتية

$$0 < \lambda_1^2 < \lambda_2^2 < \cdots$$

2 . كل قيمة ذاتية تقابل دالة ذاتية واحدة فقط (تأخذ او تعطي مضاعفات ثابت) .

3 . الدوال الذاتية متعامدة بدالة وزن $p(x)$:

$$\int_l^r \phi_n(x)\phi_m(x)p(x)dx = 0, \quad n \neq m.$$

الدالة $T_n(t)$ مع $\phi_n(x)$ تأخذ الصيغة

$$T_n(t) = \exp(-\lambda_n^2 kt).$$

والان نبدأ بتجميع الحل . لكل **n = 1,2,3,...**

$w_n(x, t) = \phi_n(x)T_n(t)$ تحقق المعادلات (9) ـ (11) . وكون هذه المعادلات خطية ومتجانسة ، فان اي تركيب خطي للحلول يكون حلاً ايضاً . وبهذا فان درجة حرارة الانتقال تصبح :

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n(x) \exp(-\lambda_n^2 kt).$$

الشرط الابتدائي معادلة (12) يتحقق اذا اخترنا a_n بحيث يكون

$$w(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n(x) = g(x), \quad l < x < r.$$

ان مبرهنة التقارب تخبرنا ان المساواة تتحقق ، عدا احتمال وجود عدد منته من النقاط ، اذا كانت $f(x)$ ، كذلك $g(x)$ ، ملساء مقطعياً . وبهذا يكون $w(x, t)$ حلاً للمسألة ، واذا اخترنا

$$a_n = \frac{\int_l^r g(x)\phi_n(x)p(x)\,dx}{\int_l^r \phi_n^2(x)p(x)dx}.$$

اخيراً ، يمكن ان نكتب الحل الكامل للمعادلات (1) ـ (4) بالصيغة

$$u(x, t) = v(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n(x) \exp(-\lambda_n^2 kt). \tag{16}$$

وباستخدام تمثيل المعادلة (16) يمكن ان نحصل على بعض الاستنتاجات حول حلول المعادلات (1) ـ (4) :

1 . كون جميع λ^2 موجبة ، فأن $u(x, t)$ تقترب من $v(x)$ عندما $t \to \infty$.

2 . لكل $t_1 > 0$ سلسلة $u(x, t_1)$ تقترب بانتظام في الفترة $l \le x \le r$ بسبب العوامل الاسية ؛ لذلك فان، $u(x, t_1)$ تكون دالة مستمرة في x. اي انقطاع في الشرط الابتدائي يحذف مباشرة .

3 . لبعض قيم t الكبيرة ، يمكن ان نقرب $u(x, t)$ بـ

$$v(x) + a_1\phi_1(x)\exp(-\lambda_1^2kt).$$

(لكي نحكم على مدى كبر t ، نحتاج لمعرفة بعض المعلومات حول a_n ، λ_n) كون $\phi_1(x)$ ذات اشارة واحدة في الفترة $l < x < r$ ($\phi_1(x) > 0$ أو $\phi_1(x) < 0$ لكل x بين l ، r ، فان مخطط التقريب اعلاه يقع اما فوق واما تحت مخطط $v(x)$ ، ولكن لا يقطعه (شريطه ان تكون $a_1 \neq 0$) .

تمارين

1 . جد الصيغة الضمنية لـ $v(x)$ بدلالة الدالة في معادلة (8) بفرض

a. $\alpha_1 = \beta_1 = 0,\ c_1 = c_2 = 0$

b. $\alpha_1 > 0$ or $\beta_1 > 0$, ولا يوجد معاملات سالبة

لماذا تعتبر هاتين الحالتين منفصلتين .

2 . اعط تبريراً لكل الاستنتاجات .

3 . اشتق الصيغة العامة لـ $u(x, t)$ اذا كانت الشروط الحدودية هي $\partial u/\partial x = 0$ عند النهايتين . في هذه الحالة ، $\lambda^2 = 0$ هي قيمة ذاتية .

10 . قضيب شبه ـ غير منته SEMI-INFINITE ROD

لحد هذه النقطة نكون قد ، قمنا بمعالجة المسائل المعرفة على فترات منتهية احياناً من المفيد ان نفرض ان الشيء المطلوب دراسته له طول غير منته .

اذا كان القضيب المطلوب دراسته طويلاً جداً ، فيمكن معاملته على انه شبه ـ غير منته ـ اي انه ممتد من 0 الى ∞ . المعادلة التفاضلية الجزئية التي تتحكم بدرجة الحرارة $u(x, t)$ تبقى .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x,\ 0 < t \qquad (1)$$

اذا كانت الخواص منتظمة

نفرض انه عند $x=0$ فان درجة الحرارة تبقى ثابتة ، لنقل ان

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0 \qquad (2)$$

لبعض درجات الحرارة . وفي غياب الحدودية الاخرى ، لايوجد شرط حدودي آخر . من الناحية الاخرى ، فان $u(x, t)$ تبقى منتهية ـ باقل من قيد ثابت ـ عندما $x \to \infty$. وكالعادة ، الشرط الحدودي يكون ضرورياً

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x. \qquad (3)$$

وبمعاملة المعادلات (1) ـ (3) بواسطة فصل المتغييرات ، نفرض ان $u(x,t) = \phi(x)T(t)$ ، لذلك فان المعادلة التفاضلية الجزئية يمكن فصلها الى معادلتين اعتياديتين كالعادة .

$$T' \pm \lambda^2 kT = 0, \quad 0 < t \qquad (4)$$

$$\phi'' \pm \lambda^2 \phi = 0, \quad 0 < x. \qquad (5)$$

يوجد فقط شرط حدودي واحد على u ، والذي يتطلب ان يكون $\phi(0) = 0$. الشرط غير المقيد يتطلب ايضاً من $\phi(x)$ ان تبقى منتهية عندما $x \to \infty$ وبهذا يكون حل المعادلة التفاضلية (5) هو .

$$\phi(x) = c_1 \cosh \lambda x + c_2 \sinh \lambda x$$

اذا اخترنا الاشارة السالبة في المعادلتين (5) , (4) .. ولكن $\phi(0) = 0$ يتطلب ان تكون $c_1 = 0$ التي تترك $\phi(x) = c_2 \sinh \lambda x,$. والدالة تزداد بدون قيد عندما $x \to \infty$. لذلك يجب اختيار الاشارة الموجبة . في هذه الحالة ، حل المعادلة (5) هو :

$$\phi(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$$

والتي تبقى مقيدة عندما $x \to \infty$ والتطبيقات على الشرط الحدودي عند $x = 0$ تبين ان $\phi(0) = c_1 = 0$ تترك $\phi(x) = \sin \lambda x$ ان حل المعادلة (4) (بالاشارة الموجبة) هو :

$$T(t) = \exp(-\lambda^2 kt).$$

لاية قيمة لـ λ^2 ، الدالة .

$$u(x, t; \lambda) = \sin \lambda x \exp(-\lambda^2 kt)$$

تحقق المعادلتين (1) ، (2) والشرط غير المقيد . المعادلة (1) والشرط الحدودي معادلة (2) تكون متجانسة ؛ لذلك ، فان اي تركيب خطي من الحلول يكون حلاً ايضاً . كون الوسيط λ يمكن ان يأخذ اي قيمة ، فان التركيب الخطي الملائم هو التكامل . لذلك فان u تأخذ الشكل

$$u(x, t) = \int_0^\infty B(\lambda) \sin \lambda x \exp(-\lambda^2 kt)\, d\lambda. \qquad (6)$$

(سوف لانحتاج القيم السالبة لـ λ . لانها لاتعطي حلولاً جديدة .) الشرط الابتدائي يتحقق اذا اخترنا $B(\lambda)$ لتجعل

$$u(x, 0) = \int_0^\infty B(\lambda) \sin \lambda x\, d\lambda = f(x), \quad 0 < x.$$

ويمكن ان نميز هذا على انه تكامل فوريه ؛ $B(\lambda)$ يتم اختيارها بالشكل :

$$B(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \sin \lambda x\, dx.$$

اذا كانت $B(\lambda)$ موجودة ، فان المعادلة (6) هي حل للمسألة . لاحظ انه عندما $t > 0$ ، فان الدالة الاسية تجعل التكامل الشاذ في المعادلة (6) يقترب بتسارع كبير .

اذا كان القضيب منته (بطول L ، مثلاً) فان المقدار في المعادلة (6) عديم المعنى اذا كانت x اكبر من L . ووجود الشرط الحدودي عند $x=L$ سوف يؤثر على درجة الحرارة المجاورة ، لذلك فان المعادلة (6) يمكن اعتبارها تقريبية فقط عندما $x \ll L$.

تمارين

1 . حل المعادلات (1) ــ (3) اذا كان

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < b \\ 0, & b < x. \end{cases}$$

2 . بين ان $u(x, t)$ كما اعطيت بالمعادلة (6) هي حل للمعادلات (1) ــ (3) . ما هي درجة حرارة حالة الاستقرار الموزعة ؟

3 . جد حل المعادلات (1) ــ (3) اذا كان $f(x) = T_0 e^{-\alpha x}$ ، $0 < x$.

4 . جد صيغة لحل المسألة :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x, \quad 0 < t$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \qquad 0 < t$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x.$$

5 . حدد الحل في تمرين 4 اذا كانت $f(x)$ هي الدالة التي اعطيت في تمرين 1 .

6 . اكتساب الارض للحرارة . نفرض ان الارض مستوية ، تشغل المنطقة $0 < x$ واذا كانت درجة حرارة السطح هي $u(0, t) = \sin \omega t$ ، بين ان

$$u(x, t) = \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\, x\right) \sin\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2k}}\, x\right)$$

هو حل لمعادلة الحرارة التي تحقق الشرط الحدودي . ارسم مخطط $u(x, t)$ حيث $x = 0, 1, 2$ متر في المخطط نفسه . افرض $\omega = 2 \times 10^{-7}$ ($2\pi \cong$ سنة) ، $k = 0.5 \times 10^{-6}$ م^2 / ثانية .

7 . تأمل المسألة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x, \quad 0 < t$$
$$u(0, t) = T_0, \qquad 0 < t$$
$$u(x, 0) = f(x), \qquad 0 < x.$$

بين انه لاجل ان تصح طريقتنا في الحل ، من الضروري ان يكون لدينا ، $T_0 = \lim_{x\to\infty} f(x)$ ، جد صيغة $u(x, t)$ اذا كانت هذه هي الحالة .

8 . بين ان الدالة $u(x, t)$ المعطاة في المعادلة (6) هي دالة فردية في x .

11 . قضيب غير منته . INFINITE ROD

اذا اردنا دراسة التوصيل الحراري في مركز قضيب طويل جداً ، والذي يمكن اعتباره ممتداً من $-\infty$ الى ∞ . عندئذ لا توجد شروط حدودية ، وتكون المسألة المطلوب حلها هي :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t$$
$$u(x, 0) = f(x), \qquad -\infty < x < \infty$$

$|u(x, t)|$ مقيدة عندما $x \to \pm\infty$.

وباستخدام التكنيك نفسه كما في السابقة ، نحصل على

$$u(x, t) = \phi(x)T(t),$$
$$T' + \lambda^2 kT = 0, \quad 0 < t$$
$$\phi'' + \lambda^2\phi = 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

ان اشارة الثابت اختيرت لتجعل $\phi(x)$ تحقق الشرط غير الحدودي ، والان

$$\phi(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$$
$$T(t) = \exp(-\lambda^2 kt).$$

وبربط حلول $\phi(x)T(t)$ في صيغة التكامل نحصل على

$$u(x, t) = \int_0^\infty (A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x)\exp(-\lambda^2 kt)\, d\lambda. \qquad (1)$$

عند زمن $t = 0$ وعامل القوى يصبح 1 ، والشرط الابتدائي هو

$$\int_0^{\infty} (A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x)\, d\lambda = f(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

وكون هذه تمثل مسألة تكامل فوريه ، فيجب ان نختار $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ على انها دوال معاملات تكامل فوريه

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x\, dx, \quad B(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \lambda x\, dx. \qquad (2)$$

في هذه الحالة ، يمكن ان نشتق بعض النتائج المهمة . اذا بدلنا متغير التكامل في المعادلة (2) الى ξ وبالتعويض في صيغتي $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ في المعادلة (1) :

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda\xi\, d\xi \cos \lambda x \right.$$
$$\left. + \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin \lambda\xi\, d\xi \sin \lambda x \right] \exp(-\lambda^2 kt)\, d\lambda.$$

وبربط الحدود ، نجد ان

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)[\cos \lambda\xi \cos \lambda x + \sin \lambda\xi \sin \lambda x]\, d\xi \exp(-\lambda^2 kt)\, d\lambda$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda(\xi - x)\, d\xi \exp(-\lambda^2 kt)\, d\lambda.$$

واذا بدلنا تركيب التكامل ، يمكن ان نكتب

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \int_0^{\infty} \cos \lambda(\xi - x) \exp(-\lambda^2 kt)\, d\lambda\, d\xi.$$

التكامل الداخلي يمكن حسابه بطرق التكامل العقدي . ومن المعروف ان (تمارين متنوعة تمرين 32 ، فصل 1)

$$\int_0^{\infty} \cos \lambda(\xi - x) \exp(-\lambda^2 kt)\, d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{4kt}} \exp\left[\frac{-(\xi - x)^2}{4kt}\right], \quad t > 0.$$

وهذه تعطينا ، صيغة جديدة لدرجة الحرارة الموزعة :

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4k\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \exp\left[\frac{-(\xi - x)^2}{4kt}\right] d\xi. \qquad (3)$$

ان حل صيغتي المعادلتين (1) و (3) لاجل $u(x, t)$ له بعض الفوائد . ففي المسائل البسيطة نكون قادرين على حساب المعاملات $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ في المعادلة (7) . ولكن هذه الحالة نادرة عندما يكون التكامل في معادلة (1) يمكن ايجاده تحليلياً . والشيء نفسه يكون صحيحاً للتكامل في المعادلة (3) .

لذلك ، اذا كانت قيمة u عند x المعلومة ونحتاج الى t ، فان كلا التكاملين يحسب عددياً . واذا كانت قيم kt كبيرة ، فان عامل القوى في التكاملية للمعادلة (1) يقترب من 0 الا عندما تكون λ صغيرة . لذلك فان ، القيمة التقريبية للمعادلة (1) تكون

$$u(x, t) \cong \int_0^{\Lambda} (A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x) \exp(-\lambda^2 kt)\, d\lambda$$

حيث Λ ليست كبيرة ، وان الطرف الايمن يمكن ايجاده بدرجة عالية من الدقة وبجهود بسيطة .

من الناحية الاخرى ، اذا كان kt صغيراً ، فان القوى في تكاملية معادلة (3) تقترب من 0 ، الا عندما تكون ξ قريبة من x . القيمة التقريبية .

$$u(x, t) \cong \frac{1}{\sqrt{4k\pi t}} \int_{x-h}^{x+h} f(\xi) \exp\left[\frac{-(\xi - x)^2}{4kt}\right] d\xi$$

تكون مرضية اذا كانت h ليست كبيرة ، ومرة اخرى فان التكنيك العددي يمكن استخدامه بسهولة للطرف الايمن من المعادلة .

والمقدار في المعادلة (3) له فوائد اخرى عديدة . وهذا لا يتطلب استخدام

تكاملات وسيطية (قارن معادلة (2)) . يمكن ان نبين مباشرة تاثير الشروط الابتدائية على الحل . بالاضافة الى ذلك ، الدالة $f(x)$ لا تحتاج لتحقيق الشرط

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$$

لكي تحقق المعادلة (3) في المسألة الاصلية .

تمارين

1 . جد $u(x, t)$ باستخدام اولاً المعادلة (1) ثم المعادلة (3) اذا كانت $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -a < x < a \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

2 . بين ان $u(x, t)$ كما اعطيت في المعادلة (3) تحقق معادلة الحرارة .

3 . بين ان الدالة :

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4k\pi t}} \exp\left[-\frac{x^2}{4kt}\right]$$

هي حل لمعادلة الحرارة .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < t, \quad -\infty < x < \infty.$$

ماذا يمكن القول حول u عند $x = 0$ عند $t = 0+$ ؟ ما هو $\lim_{t \to 0+} u(x,t)$ ؟ ارسم مخطط $u(0, t)$ لعدة قيم ثابتة لـ t .

4 . افرض ان $f(x)$ دالة دورية فردية ذات دورة $2a$. بين ان $u(x, t)$ المعرفة في المعادلة (3) لها الخواص نفسها ايضاً .

5 . اذا كانت $f(x) = 1$ لكل x ، فان حل مسألة التوصيل الحراري هو $u(x, t) = 1$. استخدم هذه الحقيقة مع المعادلة (3) لاثبات

$$1 = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{-(\xi - x)^2}{4kt}\right] d\xi.$$

6 . دالة الخطأ تعرف بالمعادلة

$$\operatorname{erf}(q) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^q e^{-z^2}\, dz.$$

برهن هذه الصفات لدالة الخطأ :

a. $\operatorname{erf}(-q) = -\operatorname{erf}(q)$

b. $\frac{d}{dq}\operatorname{erf}(q) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-q^2}$

c. $\lim_{q\to\infty} \operatorname{erf}(q) = 1.$ (لاحظ تمرين 5 .).

7 . بين ان $u(x, t) = \operatorname{erf}(x/\sqrt{4kt})$ هو حل للمسألة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = 0, \qquad 0 < t$$

$$u(x, 0) = 1, \qquad 0 < x.$$

8 . حل المسألة ادناه بأستخدام المعادلة (3) ، وعبر عن الحل بدلالة دوال الخطأ .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

تلميح : ارسم التكاملية ، التي تحتوي العامل $f(\xi)$. لاحظ ان « الديلين » يختصران بينما الجزء المحصور بين 0 و $2x$ يكون متناضراً حول المستقيم $\xi = x$

9 . هل يمكن حل التمرين 8 بصيغة المعادلة (1) ؟ لاحظ ان

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin \lambda x}{\lambda} d\lambda = \begin{cases} 1, & 0 < x \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

(لاحظ فصل 1 ، بند 8 .)

12 . تعليقات ومصادر

COMMENTS AND REFERENCES

قام فوريه عام 10 181 بدراسة مكثفة لمسائل التوصيل الحراري واستخدم طريقة الجداء في الحل ، ثم طور فكرة سلسلة فورية . اما سترم وليوفلي فقد اعطيا تعميماً لسلسلة فوريه في عام 1830 . ومن الاعمال الحديثة ، كتاب *Conduction of Heat in Solids* تاليف Carslaw و Jaeger, ، 1959 ، والمصدر المتقدم الآخر هو *The Mathematics of Diffusion* تاليف Crank ، 1975 .

واحدث المصادر في هذا المجال هو كتاب *The Heat Equation* تاليف D. V. Widder ، الصادر عام 1975 .

وبالرغم من ان دراستنا كانت حول معادلة الانتقال ، فان هناك ظواهر فيزياوية اخرى تم وصفها بواسطة معادلة الحرارة او معادلة الانتشار ، فمثلاً ، الفولتية والتيار في سلك معامل حثه ـ حر ، والانتقال الدوراني في سريان المائع ، وانتشار المذاب في المذيب . والحالة الاخيرة تعتبر من الحالات المهمة في الهندسة الكيمياوية ، وعلاقات التحكم هو حفظ الكتلة وقانون فكس "Fick's law,"، ويتم التعبير عنهما ، بالشكل الآتي :

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial t}, \quad v = -k\frac{\partial c}{\partial x}$$

على التوالي . حيث v تمثل معدل حركة الكتلة ، c التركيز ، k الانتشار ، بالطبع ، فان للانتشار اهمية عظيمة في فسلجة الخلية . ويمكن الرجوع الى توضيحات اخرى ومصادر في كتاب *Mathematical Biophysics,* تاليف Rashevsky ، 1960 .

ومن الجدير بالذكر ان معادلة الانتشار تظهر في بعض المسائل الكلاسيكية في نظرية الاحتمالات وبالاخص في وصف حركة براون. نفرض ان جسماً يتحرك خطوة واحدة بطول قدرهُ Δx في فترة زمن Δt . والخطوة تكون اما لليسار واما لليمين، وكلتاهما متساويتان. ولتكن $u_i(m)$ تمثل الاحتمالية، عند زمن $m\ \Delta t$ ، الجسيم عند النقطة $i\ \Delta x (m = 0, 1, 2, \ldots, i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ ولكي يصل الجسيم الى النقطة $i\ \Delta x$ عند زمن $(m + 1)\ \Delta t$ فانه يجب ان يكون عند احدى النقاط المجاورة $(i \pm 1)\ \Delta x$ عند زمن $m\ \Delta t$ ، ويجب ان يتحرك نحو $i\ \Delta x$. من هنا، نلاحظ ان الاحتمالات ترتبط بالمعادلة

$$u_i(m + 1) = \frac{1}{2}u_{i-1}(m) + \frac{1}{2}u_{i+1}(m).$$

من الواضح ان us تُحدد كلياً، حالما تكون الاحتمالية الابتدائية الموزعة (initial probability distribution) معلومة. فمثلاً، الجسيم يبدأ عند نقطة الصفر$(u_0(0) = 1, u_i(0) = 0, \text{ for } i \neq 0)$ $u_i(m)$ تُشكل بتطبيقات متتالية لمعادلة الفرق، كما مبين في الجدول (1 ــ 2).

الجدول 1 ــ 2

$m \backslash i$	−3	−2	−1	0	1	2	3
0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0.5	0	0.5	0	0
2	0	0.25	0	0.5	0	0.25	0
3	0.125	0	0.375	0	0.375	0	0.125

ويمكن تحويل المعادلة بشكل مقارب لمعادلة الحرارة. اولاً، نطرح $u_i(m)$ من طرفي المعادلة لنحصل على

$$u_i(m + 1) - u_i(m) = \frac{1}{2}(u_{i+1}(m) - 2u_i(m) + u_{i-1}(m)).$$

وبقسمة الطرف الايمن على $\Delta x^2/2$ ، والطرف الايسر على$(\Delta x^2/2\Delta t)\cdot\Delta t$ لنحصل على

$$\frac{u_i(m+1) - u_i(m)}{\Delta t} \frac{2\,\Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{u_{i+1}(m) - 2u_i(m) + u_{i-1}(m)}{(\Delta x)^2}.$$

واذا كان كلّ من فترة الزمن Δt وطول الخطوة Δx صغيراً فيمكن ان نفكر بـ $u_i(m)$ على انها قيمة الدالة المستمرة $u(x, t)$ عند $x = i\,\Delta x$، $t = m\,\Delta t$. وفي مفهوم الغاية، قسمة الفرق في الطرف الايسر تقترب من $\partial u/\partial t$. الطرف الايمن، هو فرق الفروق، يقترب من $\partial^2 u/\partial x^2$. ومعادلة الحرارة تنتج اذا كان كلّ من Δx و Δt تقترب من 0 آنياً، وان الكمية $2\Delta t/(\Delta x)^2$ تقترب من غاية غير صفرية منتهية. وفي هذه الحالة تسمى معادلة الحرارة بمعادلة فوكر بلانك ((Fokker–Planck ويمكن الحصول على تفاضيل ومصادر اخرى في كتاب ((Introduction to Probability Theory and Its Applications, تأليف Feller ، 1968 .

ذكرنا مرات عديدة عبارة « معادلة تفاضلية جزئية خطية » . والشكل العام لهذه المعادلة، من الرتبة الثانية بمتغيرين مستقلين، هو

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} + C\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial t} + Fu + G = 0$$

حيث $A, B, \ldots, G$ هي دوال لـ x و t وليس لـ u أو مشتقاتها. اذا كانت $G = 0$ ، تكون المعادلة متجانسة. بالطبع، معادلة الحرارة الاعتيادية تكون بالصيغة نفسها اذا اخذنا $A = 1$ ، $E = -1/k$، والمعاملات الاخرى تساوي 0 .

قد يتساءل البعض عن سبب استخدام الحل بصيغة الجداء. والجواب على هذا ان هذا الحل ملائم لعدة حالات. والسبب الاخر لهذا الاستخدام ان هذه الحلول تشبه هندسياً دوال x بازمنة مختلفة. ان فكرة التشابه ــ المرتبطة بتحليل الابعاد ــ لها اهمية في ميكانيك الموائع .

تمارين متنوعة

جد حل حالة ـ الاستقرار ، ومسألة القيم الذاتية المقترنة ، والحل الكامل لكل من مسائل التوصيل الحراري ادناه :

1 . $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = T_0 \quad u(a, t) = T_0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = T_1, \quad 0 < x < a$$

2 . $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma^2 u = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = T_0, \quad u(a, t) = T_0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = T_1, \quad 0 < x < a$$

3 . $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - r = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = T_0, \quad u(a, t) = T_0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = T_1, \quad 0 < x < a$$ (r ثابت)

4 . $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = T_0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = \frac{T_1 x}{a}, \quad 0 < x < a$$

5 . $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma^2 u = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = \frac{T_1 x}{a}, \quad 0 < x < a$$

6 . $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(a, t) = T_0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < a$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t$$ .7

$$u(0, t) = T_0, \quad u(a, t) = T_0$$

$$u(x, 0) = T_0, \quad 0 < x < a$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t$$ .8

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\Delta T}{a}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = \frac{\Delta T}{a}, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = T_0, \quad 0 < x < a$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t$$ .9

$$u(0, t) = T_0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = T_1, \quad 0 < x < a$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t$$ .10

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} T_0, & 0 < x < \frac{a}{2} \\ T_1, & \frac{a}{2} < x < a \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < t$$ .11

$$u(0, t) = T_0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = T_0(1 - e^{-\alpha x}), \quad 0 < x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < t$$ .12

$$u(0, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} T_0, & 0 < x < a \\ 0, & a < x \end{cases}$$

13 .
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < t$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad 0 < t$$
$$u(x, 0) = \begin{cases} T_0, & 0 < x < a \\ 0, & a < x \end{cases}$$

14 .
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t$$
$$u(x, 0) = \exp(-\alpha|x|) \quad -\infty < x < \infty$$

15 .
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t$$
$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ T_0, & 0 < x < a \\ 0, & a < x < \infty \end{cases}$$

16 .
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, 0 < x < a, 0 < t$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, u(a, t) = T_0, 0 < t$$
$$u(x, 0) = T_0 + S(a - x), 0 < x < a$$

17 . اعط التفسير الفيزياوي للمسألة وبين لماذا تزداد $u(x, t)$ عندما تزداد t (افرض ان S ثابت وموجب) .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = S, \quad 0 < t$$
$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < a$$

18 . بين ان $v(x, t) = (S/2a)(x^2 + 2kt)$ تحقق معادلة الحرارة والشروط الحدودية للمسألة في التمرين 17 . كذلك جد $w(x, t)$ ، المعرف بـ
$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$$

19 . بين ان الدوال الاربعة الآتية .

$$u_0 = 1,\ u_1 = x,\ u_2 = x^2 + 2kt,\ u_3 = x^3 + 6kxt$$

هي حلول لمعادلة الحرارة . (في بعض الاحيان تسمى حدودية الحرارة)

جد تركيبهما الخطي الذي يحقق الشروط الحدودية :

$$u(0, t) = 0,\ u(a, t) = t$$

20 . لتكن $u(x, t)$ دالة موجبه تحقق

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

بين ان الدالة

$$w(x, t) = -\frac{2}{u}\frac{\partial u}{\partial x}$$

تحقق المعادلة التفاضلية الجزئية غير الخطية والتي تسمى معادلة بيركر (*Burgers' equation*)

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

21 . جد حل معادلة بيركر التي تحقق الشروط

$$w(0, t) = 0, \quad w(1, t) = 0, \quad 0 < t$$
$$w(x, 0) = 1, \quad 0 < x < 1.$$

22 . افرض ان الدالة $u(x, t)$ المعرفة ادناه هي حل لمعادلة الحرارة ($k = 1$) جد الحل w لمعادلة بيركر . بين ان w تحقق معادلة بيركر .

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right)$$

23 . قضيب معدني وماء موضوعان في وعاء مائي ويتبادلان الحرارة بواسطة الحمل . اذا كانت المعادلات التفاضلية الاتية :

$$c_1\frac{du_1}{dt} = h(u_2 - u_1)$$

$$c_2\frac{du_2}{dt} = h(u_1 - u_2).$$

تمثل التوازن الحراري . جد درجات الحرارة $u_1(t)$ و $u_2(t)$ بفرض ان الشروط الابتدائية $u_1(0) = 1$, $u_2(0) = 0$.

24 . حل مسألة القيم الذاتية بفرض ان $\phi(\rho) = \psi(\rho)/\rho$:

$$\frac{1}{\rho^2}(\rho^2\phi')' + \lambda^2\phi = 0, \quad 0 < \rho < a$$

$$\phi(0) \text{ مقيدة} \qquad , \quad \phi(a) = 0.$$

هل ان هذه هي مسألة سترم ـ ليوفلي المنتظمة ؟ وهل ان الدوال الذاتية متعامدة ؟

25 . حل المسألة الاتية للتوصيل الحراري في كرة . (تلميح : نفرض ان $u(\rho, t) = v(\rho, t)/\rho$.)

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < \rho < a, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) \text{ مقيدة}, \quad u(a, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(\rho; 0) = T_0, \quad 0 < \rho < a$$

26 . اذكر ثم حل معادلة القيم الذاتية المقترنة مع

$$e^{-x}\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = 0.$$

27 . جد حل حالة الاستقرار للمسألة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma^2(T(x) - u) = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = T_0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = 0, \quad 0 < t$$

حيث : $T(x) = T_0 + Sx$.

28 . حدد فيما اذا كانت $\lambda = 0$ هي مسألة القيم الحدودية لـ

$$\phi'' + \lambda^2 x\phi = 0, \quad 0 < x < a$$
$$\phi'(0) = 0, \quad \phi(a) = 0.$$

29 . اعد التمرين 28 بالشروط الحدودية :

$$\phi'(0) = 0, \quad \phi'(a) = 0.$$

30 . برهن المتطابقة الاتية :

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_b^a \exp\left[-\frac{(\xi - x)^2}{4kt}\right] d\xi = \frac{1}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{b - x}{\sqrt{4kt}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{a - x}{\sqrt{4kt}}\right)\right]$$

31 . في التمرين 6 بند (10) ، بين ان الدالة

$$w(x, t; \omega) = e^{-px} \sin(\omega t - px)$$

حيث $p = \sqrt{\omega/2k}$, تحقق معادلة الحرارة وكذلك الشرط الحدودي

$$w(0, t; \omega) = \sin \omega t.$$

بين كيف نختار المعامل $B(\omega)$ بحيث ان الدالة

$$u(x, t) = \int_0^\infty B(\omega) e^{-px} \sin(\omega t - px)\, d\omega$$

تحقق الشرط الحدودي

$$u(0, t) = f(t), \quad 0 < t$$

لدالة ملائمة t.

32 . استخدم الفكرة في تمرين 31 لايجاد الحل لـ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = h(t), \quad 0 < t,$$

حيث :

$$h(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T, \\ 0, & T < t. \end{cases}$$

33 . لتكن $u(x, t)$ درجة الحرارة في بحيرة منجمدة ، وان x هي المسافة تحت السطح . فإذا تجاهلنا الانصهار والحمل وبفرض ان k هي نفسها للماء والجليد ، فان u تخضع للمسألة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = -10, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = 5, \quad 0 < x.$$

جد u بدلالة دالة الخطأ .

34 . استخدم جدول القيم لدالة الخطأ . لايجاد $x(t)$ المعرف بالمعادلة $u(x, t)$ $u = 0,$ كما في تمرين 33 . هذه تعطي موقع الحد الفاصل بين الماء والجليد .

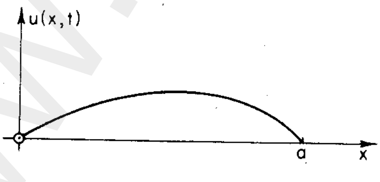
الفصل الثالث

معادلة الموجة

THE WAVE EQUATION

1 . السلك المهتز . THE VIBRATING STRING

من الامثلة البسيطة لمعادلة الموجة ، حركة السلك الذي تكون احدى نهايتيه مثبتة . لذا نضع الاحداثيات كما مبين في الشكل (1 ـ 3) ، والازاحة $u(x, t)$ للسلك غير معلومة . ولكي نجد معادلة حركة السلك ، نعتبر قطعة قصيرة تكون نهايتاها عند x and $x + \Delta x$ ثم نطبق قانون نيوتن الثاني في الحركة . ان قطعة السلك من يمين ويسار العنصر تسلط قوى عليه مسببة التعجيل

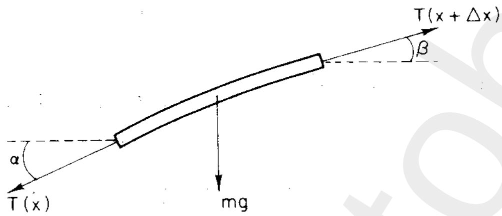


شكل (1 ـ 3) سلك مثبت من نهايتيه

الافتراض (1) : عندما يكون السلك مرناً بشكل كامل ، يؤدي الى عدم وجود مقاومة للانحناء . وهذا يعني ان القوى المبذولة على العنصر تمس الخط الوسطي عند النقاط الخاضعة للتأثير .

وعلى اساس هذا الافتراض فان القوى على العنصر تظهر كما في الشكل (2ـ3). وبتطبيـــق قانون نيوتن الثاني في الاتجاه-x (افرض ان الجاذبية تؤثر عمودياً على الاتجاه-x) فان مجموع القوى هو .

$$-T(x)\cos\alpha + T(x+\Delta x)\cos\beta.$$



شكل (2 ـ 3) . مقطع من السلك بيْن القوى المؤثرة عليه

الافتراض (2) : النقطة في السلك تتحرك فقط بالاتجاه الشاقولي . وهذ يعني ان مجموع القوى اعلاه يساوي 0 . وهذا يكافيء الافتراض ان المركبة الافقية للشد تكون ثابتة . وفي اية من الحالتين نجد ان :

$$-T(x)\cos\alpha + T(x+\Delta x)\cos\beta = 0,$$

او $\quad T(x)\cos\alpha = T(x+\Delta x)\cos\beta = T$ (ثابت)

وفي غياب القوى الخارجية عدا الجاذبية ، فان قانون نيوتن في الاتجاه الشاقولي يؤدي الى :

$$-T(x)\sin\alpha + T(x+\Delta x)\sin\beta - mg = m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t).$$

(وكون u تقيس الازاحة في الاتجاه الشاقولي ، فان $\partial^2 u/\partial t^2$ هو التعجيل .)

وبالتعامل مع السلك ، فمن المناسب ان نعطي الكثافة الخطية ρ ، $[\rho] = m/L$.
لذلك ، فان كتلة العنصر هي $\rho\,\Delta x$ والان :

$$T(x) = \frac{T}{\cos\alpha}, \quad T(x + \Delta x) = \frac{T}{\cos\beta}$$

حيث ان T ثابت . وبهذا فان المعادلة اعلاه يمكن كتابتها بالشكل الآتي :

$$-T\tan\alpha + T\tan\beta - \rho\,\Delta x\, g = \rho\,\Delta x\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

والكمية $\tan\alpha$ هي ميل السلك عند x, و $\tan\beta$ هي ميل السلك عند $x + \Delta x$اي ان :

$$\tan\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t), \quad \tan\beta = \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t).$$

وبتعويض هذه في المعادلة اعلاه ، نحصل على

$$T\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right) = \rho\Delta x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + g\right).$$

وبالقسمة على Δx ، فان قسمة الفرق في الطرف الايسر تكون :

$$\frac{T}{\Delta x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right) = \rho\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + g\right)$$

وعندما يكون $\Delta x \to 0$ ، فان قسمة الفرق تصبح مشتقه جزئية بالنسبة لـ x ،
وبهذا يصبح قانون نيوتن الثاني بالشكل الاتي :

$$T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho g, \tag{1}$$

او

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} g \tag{2}$$

حيث $c^2 = T/\rho$. اذا كانت c^2 كبيرة جداً (عادة تساوي 10^5 م٢/ ثا٢) ، فاننا نهمل الحد الاخير ، فنحصل على معادلة السلك المهتز

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t. \tag{3}$$

ولكي نصف حركة الجسم ، فان ذلك لا يتطلب معادلة الحركة فقط وانما يتطلب ايضاً الموقع الابتدائي والسرعة . في الشروط الحدودية للسلك يجب ان نذكر الازاحة الابتدائية لكل جسيم ـ اي ان $u(x, 0)$ ـ والسرعة الابتدائية لكل جسيم ، $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$.

والسلك المهتز كما وصفناه ، فان شروطه الحدودية ذات ازاحة صفرية عند نهايته ، لذلك فان مسألة القيم الحدودية ـ القيم الابتدائية للسلك هي :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad 0 < x < a, \quad 0 < t \tag{4}$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(a, t) = 0, \quad 0 < t \tag{5}$$

$$u(x, 0) = f(x), \qquad 0 < x < a \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \qquad 0 < x < a \tag{7}$$

تحت الافتراضات المذكورة ، ومع افتراض ان الجاذبية مهملة .

تمارين

1 . جد ابعاد كل من الكميات الآتية . استخدم حقيقة ان القوة تكافيء mL/t^2 ، وإن بعد الشد هو F (قوة) :
$u, \partial^2u/\partial x^2, \partial^2u/\partial t^2, c, g/c^2$. افحص بُعد كل حد في المعادلة (2) .

2 . افرض ان القوة الشاقولية الموزعة $F(x, t)$ (موجبة للاعلى) تؤثر على السلك . اشتق معادلة الحركة :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{T}F(x, t).$$

بُعد القوة الموزعة هو F/L . (اذا اخذ وزن السلك بنظر الاعتبار كقوة موزعة وانه القوة الوحيدة ، فسيكون لدينا $F(x, t) = -\rho g$. افحص الابعاد والاشارات) .

3 . جد حل $v(x)$ في المعادلة (2) بشروط حدودية معادلة (5) والتي تكون مستقلة عن الزمن . (هذه تقابل « حل حالة ــ الاتزان » ، ولكن كلمة « حالة ــ الاتزان » لم تعد ملائمة . « حل التوازن » يعتبر اكثر دقة .

2 . حل مسألة السلك المهتز .

SOLUTION OF THE VIBRATING STRING PROBLEM

مسائل القيم الحدودية ــ القيم الابتدائية التي تصف ازاحة السلك المهتز .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad 0 < x < a, \quad 0 < t \tag{1}$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(a, t) = 0, \qquad 0 < t \tag{2}$$

$$u(x, 0) = f(x), \qquad 0 < x < a \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \qquad 0 < x < a \tag{4}$$

تشمل معادلة تفاضلية جزئية متجانسة وخطية ، وكذلك شروط حدودية متجانسة وخطية . ثم تطبق طريقة فصل المتغيرات . اذا فرضنا ان* $u(x, t) = \phi(x)$ $T(t)$ معادلة (1) تصبح

$$\phi''(x)T(t) = \frac{1}{c^2}\phi(x)T''(t).$$

وبالقسمة على ϕT، نحصل على

$$\frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = \frac{T''(t)}{c^2T(t)}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t.$$

ولكي تتحقق المساواة ، فان طرفي المعادلة يجب ان يساويا ثابتاً . نكتب هذا الثابت $-\lambda^2$ وبفصل المعادلة اعلاه الى معادلتين تفاضلتين اعتياديتين مرتبطتين بوسيط مشترك λ^2.

$$T'' + \lambda^2c^2T = 0, \quad 0 < t \tag{5}$$

$$\phi'' + \lambda^2\phi = 0, \quad 0 < x < a. \tag{6}$$

وبهذا تصبح الشروط الحدودية :

$$\phi(0)T(t) = 0, \quad \phi(a)T(t) = 0, \quad 0 < t$$

وكون $T(t) \equiv 0$ تعطي الحل التافه لـ $u(x, t)$ ، نحصل على :

$$\phi(0) = 0, \quad \phi(a) = 0. \tag{7}$$

مسألة القيم الذاتية في المعادلتين (6) و (7) هي بالضبط الحالة نفسها التي تم حلها سابقاً . (لاحظ فصل 2 ، نبد 3) من المعلوم ان القيم الذاتية والدوال الذاتية هي

---

* T لم تعد ترمز للشد .

$$\lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad \phi_n(x) = \sin(\lambda_n x), \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

المعادلة (5) هي من المعادلات المعروفة . وان حلها هو :

$$T_n(t) = a_n \cos \lambda_n ct + b_n \sin \lambda_n ct$$

حيث b_n و a_n اختيارية . (بكلمات اخرى ، يوجد حلان مستقلان) لاحظ ، انه يوجد فرق جوهري بين T التي تظهر هنا ، و T التي وجدناها في مسألة التوصيل الحراري . والفرق المهم بينهما هو سلوكها عندما تقترب t من ∞ في مسألة التوصيل الحراري ، T تؤول الى 0 ، عندما T ليس لها غاية ولكنها هنا تتذبذب دورياً .

لكل $n = 1, 2, 3,$ تكون لدينا الدالة :

$$u_n(x, t) = \sin \lambda_n x[a_n \cos \lambda_n ct + b_n \sin \lambda_n ct]$$

والتي لاي اختيار لـ a_n و b_n، هي حل للمعادلة التفاضلية الجزئية (1) وكذلك تحقق الشروط الحدودية في معادلة (2) . لذلك ، فان التراكيب الخطية لـ $u_n(x, t)$ تحقق ايضاً المعادلتين (1) و (2) . ولكي نكتب التراكيب الخطية فاننا نحتاج لثوابت جديدة ، كون a_n and b_n اختيارية . عندئذ :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \lambda_n x[a_n \cos \lambda_n ct + b_n \sin \lambda_n ct]. \tag{8}$$

ولكي تتحقق الشروط الابتدائية المتبقية ، نأخذ الصيغة :

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = f(x), \qquad 0 < x < a$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi}{a} c \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = g(x), \quad 0 < x < a.$$

افتراضنا هنا ان

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1} \sin \lambda_n x[-a_n\lambda_n c \sin \lambda_n ct + b_n\lambda_n c \cos \lambda_n ct].$$

بعبارة اخرى ، نفرض ان سلسلة u يتم اشتقاقها حدا بعد حد) وكلا الشرطين الا بتدائيين ياخذان صيغة مسائل سلسلة فوريه ؛ الدالة المعلومة يتم نشرها بالسلسلة الجيبية . في كل الحالات ، والثابت $\sin(n\pi x/a)$ يجب ان يكون معامل فوريه الجيبي للدالة المعلومة . لذلك نجد ان ؛

$$a_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx, \tag{9}$$

و

$$b_n\frac{n\pi}{a}c = \frac{2}{a}\int_0^a g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx$$

او

$$b_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^a g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx. \tag{10}$$

اذا كانت الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ ملسائتان مقطعياً في الفترة $0<x<a$, فان الشروط الابتدائية تتحقق، عدا عند نقاط محتملة والتي يكون فيها الدالتان f و g. غير مستمرتين . وحسب طبيعة المسألة ، نتوقع ان تكون f, مستمرة في الاقل وتحقق $f(0)=f(a)=0$ لذلك نتوقع ان تكون سلسلة f متقاربة بانتظام . دعنا نأخذ شروطاً حدودية معينة لنلاحظ كيفية حل المثال ، اذا رفع السلك من الوسط ثم حرر ، فان الشروط الابتدائية المناسبة هي :

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} h \cdot \dfrac{2x}{a}, & 0 < x < \dfrac{a}{2} \\ h\left(2 - \dfrac{2x}{a}\right), & \dfrac{a}{2} < x < a \end{cases} \tag{11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \qquad 0 < x < a.$$

لذلك ، فان $b_n = 0$ $n = 1, 2, 3, \ldots$ ، وان

$$a_n = \frac{2}{a}\left[\int_0^{a/2} h \cdot \frac{2x}{a} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx + \int_{a/2}^{a} h\left(2 - \frac{2x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx\right]$$

$$= \frac{8h}{\pi^2} \frac{\sin(n\pi/2)}{n^2}.$$

وبهذا فان الحل الكامل هو :

$$u(x, t) = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{a}\right). \tag{12}$$

ورغم ان الحل اعلاه يعتبر صحيحاً ، لكن من الصعوبة ان نرى بالصيغة الحالية، بسبب طبيعة شكل السلك الذي يأخذه في اوقات متعددة . من الناحية الاخرى ، وبسبب بساطة الجيب وجيب التمام ، فمن الممكن ان نعيد كتابة الحل بطريقة تحدد $u(x, t)$ دون جمع السلسلة .

وباستخدام المتطابقة المثلثية :

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}[\sin(A - B) + \sin(A + B)]$$

يمكن ان نعبر عن $u(x, t)$ بالشكل الاتي :

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\left[\frac{8h}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n^2} \sin \frac{n\pi(x - ct)}{a} + \frac{8h}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n^2} \sin \frac{n\pi(x + ct)}{a}\right].$$

من المعلوم ان السلسلة :

$$\frac{8h}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

تكون متقاربة الى توسيع الدورية الفردية ، بدورة $2a$, للدالة $f(x)$.

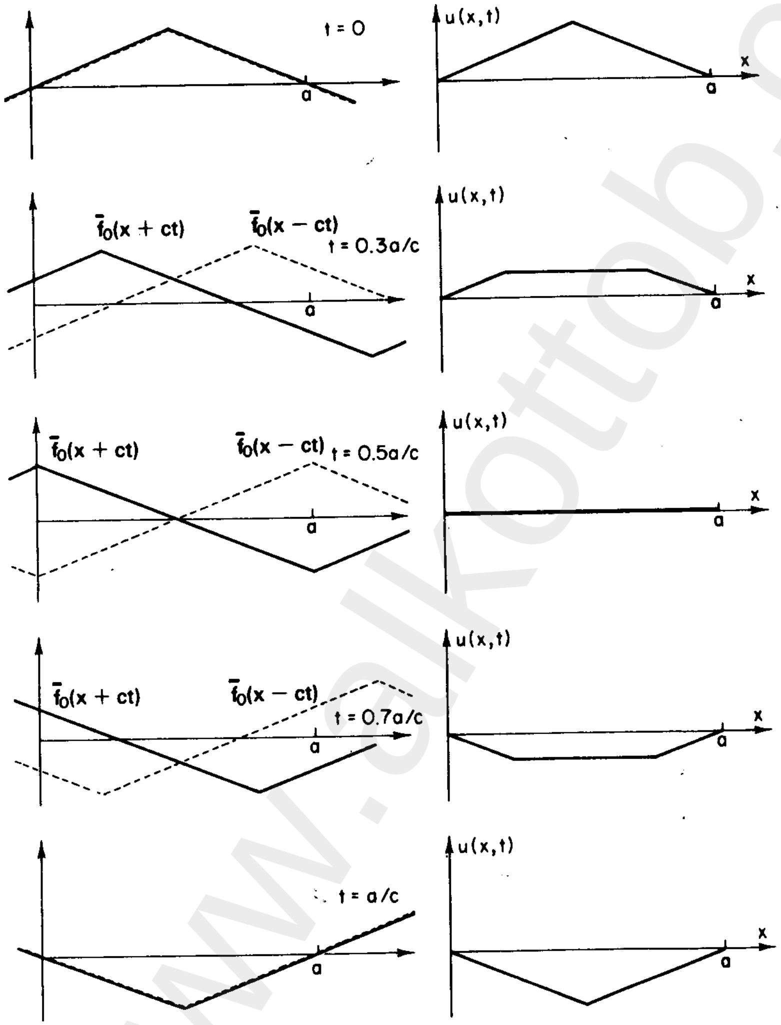
دعنا نفرض التوسيع $\bar{f}_o(x)$ وملاحظة انه معرف لجميع القيم في وباستخدام هذه الملاحظة . يمكن ان نعبر عن $u(x, t)$ بصيغة ابسط .

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\bar{f}_o(x - ct) + \bar{f}_o(x + ct)]. \tag{13}$$

في هذه الصيغة ، الحل $u(x, t)$ يمكن تخطيطه بقيم مختلفة . t, وان مخطط $\bar{f}_o(x+ct)$ يشبه مخطط $\bar{f}_o(x)$ ولكنه منقول بـ ct وحدة الى اليسار . وكذلك ، مخطط

$\bar{f}_o(x-ct)$ هو مخطط $\bar{f}_o(x)$ منقولاً بـ ct وحدة الى اليمين . عندما نرسم مخططي $\bar{f}_o(x-ct)$ و $\bar{f}_o(x+ct)$ على المحورين نفسهما ، يمكن ايجاد معدليهما بيانياً لاجل الحصول على مخطط $u(x, t)$.

في الشكل (3 ـ 3) مخططات $\bar{f}_o(x+ct), \bar{f}_o(x-ct)$ ،



شكل (3-3.)

الطرف الايسر يمثل مخططات $\bar{f}_o(x-ct)$ و $\bar{f}_o(x+ct)$ لقيم ct والطرف الايمن يمثل مخطط $u(x, t)$ في الفترة $0<x<a$, وهو معدل المخططات في اليسار .

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\bar{f}_o(x + ct) + \bar{f}_o(x - ct)]$$

في المثال الذي تم شرحة هنا بقيم مختلفة t الازاحة $u(x, t)$ تكون دورية في الزمن بدورة $2a/c$.

خلال دورية النصف الثاني (غير مبين) فان السلك يعود الى الموقع الابتدائي خلال المواقع المبينة . ان سرعة الاجزاءات الشاقولية للسلك لاتساوي 0 والمعادلة (12) يمكن استخدامها لايجاد $u(x, t)$ لاي من x t. المعلومتين . فمثلاً ، اذا اخذنا $x = 0.2a$ و $t = 0.9a/c$، نجد ان ؛

$$\begin{aligned} u\left(0.2a, 0.9\frac{a}{c}\right) &= \frac{1}{2}[\bar{f}_o(-0.7a) + \bar{f}_o(1.1a)] \\ &= \frac{1}{2}[(-0.6h) + (-0.2h)] \\ &= -0.4h. \end{aligned}$$

أن قيم الدالة يمكن قراءتها مباشرة من مخطط $f(x)$.

تمارين

في التمارين (1 ـ 3) ، حل مسألة السلك المهتز ، المعادلات (1) ـ (4) بشروط ابتدائية معلومة

.1 $f(x) = 0, \quad g(x) = 1, \quad 0 < x < a.$

2 $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right), \quad g(x) = 0, \quad 0 < x < a.$

.3

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \dfrac{a}{4} \\ \dfrac{a}{2} - x, & \dfrac{a}{4} < x < \dfrac{3a}{4} \\ x - a, & \dfrac{3a}{4} < x < a \end{cases}$$

$$g(x) \equiv 0, \quad 0 < x < a.$$

.4 لتكن :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \bar{f}_o(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \overline{G}_e(x)$$

بين ان $u(x, t)$ كما اعطي في المعادلة (8) يمكن كتابته بالشكل

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\bar{f}_o(x - ct) + \bar{f}_o(x + ct)) + \frac{1}{2}(\overline{G}_o(x - ct) - \overline{G}_e(x + ct)).$$

حيث $\overline{G}_e(x)$ و $\bar{f}_o(x)$ دوريه بدوره $2a$.

5 . اذا كان ضغط الهواء في انبوب ارغن يحقق المعادلة التالية :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t$$

وبشروط حدودية

.a $p(0, t) = p_0, p(a, t) = p_0$ اذا كان الانبوب مفتوحاً ، او :

.h $p(0, t) = p_0, \dfrac{\partial p}{\partial x}(a, t) = 0$ اذا كان الانبوب مغلقا عند $x = a$.

جد القيم الذاتية والدوال والذاتية المقترنة مع معادلة الموجة لكل مجموعة من الشروط الحدودية .

6 . جد اوطأ ذبذبة لاهتزاز الهواء في انبوب ارغن المعطاة في تمرين 5 a ، b.

7 . اذا كان السلك يهتز في وسط مقاوم للحركة ، فان مسألة الازاحة في السلك تكون

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(a, t) = 0, \quad 0 < t$$

زائداً الشروط الابتدائية .
جد الدوال الذاتية ، والقيم الذاتية وحلول الجداء لهذه المسألة . (k صغيرة وموجبة .)

8 . ارسم مخطط $u_1(x, t)$ و $u_2(x, t)$ بدلالة x لبعض قيم t .
افرض ان $a_1 = a_2 = 1$, و $b_1 = b_2 = 0$ (تسمى حلول $u_n(x, t)$ الموجات المقاومة .)

9 . الازاحة $u(x, t)$ لقضيب رقيق منتظم تحقق :

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{-1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t.$$

واذا ثبت القضيب عند طرفية ، فان الشروط الحدودية تكون :

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = 0, \quad u(a, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a, t) = 0.$$

جد خلول الجداء لهذه المسألة ؟ ماهي ذبذبات الاهتزاز ؟

10 . بين ان $u_n(x, t)$ تحقق المعادلتين (1) و (2) .

11 . هل ان سلسلة معادلة (12) متقاربة بانتظام ؟

في التمارين (12 ـ 14) ، جد الحل بطريقة فصل المتغييرات .

.12
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2k\frac{\partial u}{\partial t}\right), \quad 0 < x < a, \quad 0 < t$$
$$u(0, t) = 0, \quad u(a, t) = 0, \quad 0 < t$$
$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 < x < a,$$
حيث $f(x)$ هو كما في المعادلة (11) . (افرض ان k صغيرة وموجبة)

.13
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma^2 u, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t$$
$$u(0, t) = 0, \quad u(a, t) = 0, \quad 0 < t$$
$$u(x, 0) = h, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 < x < a$$

حيث h و γ^2 ثابتان .

.14

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 1, \quad 0 < x < a.$$

3 ـ حل دالمبرت D'ALEMBERT'S SOLUTION

لاحظنا طريقة بسيطة للتعبير عن حل مسألة السلك المهتز في حالات خاصة . (في الحقيقة ، ان معادلة الموجة في بعد واحد هي واحدة من اهم المعادلات التفاضلية الجزئية التي لها حل بسيط معلوم .) يظهر لنا ان $w = x + ct$ و $z = x - ct$ هي متغييرات ذات دلالة ، لذلك نعبر عن معادلة الموجة بدلالة المتغييرات الجديدة . لتكن $u(x, t) = v(w, z)$.

وباستخدام قاعدة السلسلة (chain rule) ، نحسب

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial w} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial v}{\partial w} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial w} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial^2 v}{\partial w^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial w\,\partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

وبالطريقة نفسها :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial w^2} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial w} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right).$$

(فرضنا ان $\partial^2 v/\partial w\partial z \quad \partial^2 v/\partial z\partial w$) اذا كانت $u(x, t)$ تحقق المعادلة ، فان :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

بدلالة الدالة v والمتغيرات المستقلة ، فان هذه المعادلة تصبح

$$\frac{\partial^2 v}{\partial w^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial w} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial w^2} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial w} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

او

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial w} = 0.$$

من الممكن ان نجد الحل العام للمعادلة الاخيرة . نضعها بصيغة اخرى .

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial w}\right) = 0$$

وهذا يعني ان $\partial v/\partial w$ مستقلة عن z ، او

$$\frac{\partial v}{\partial w} = \theta(w).$$

وباخذ تكامل هذه المعادلة ، نجد ان :

$$v = \int \theta(w)\,dw + \phi(z).$$

هنا $\phi(z)$ تلعب دوراً « ثانياً » للتكامل . ذلك لان تكامل $\theta(w)$ هو ايضا دالة ـ w ، ويمكن ان نكتب الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية اعلاه بالصيغة :

$$v(w, z) = \psi(w) + \phi(z)$$

حيث ان ψ و ϕ دالتان اختياريتان ذات مشتقات مستمرة . وبارجاع التعويض بدلالة المتغيرات الاصلية ، نحصل على :

$$u(x, t) = \psi(x + ct) + \phi(x - ct) \qquad (1)$$

وهي صيغة للحل العام لمعادلة الموجة ذات البعد الواحد . وتعرف هذه باسم « حل دالمبرت » .

الان دعنا ننظر لمسألة السلك المهتز :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad 0 < x < a, \quad 0 < t \tag{2}$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(a, t) = 0, \quad 0 < t \tag{3}$$

$$u(x, 0) = f(x), \qquad 0 < x < a \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \qquad 0 < x < a. \tag{5}$$

نعرف الان صيغة u. فالمسألة اذن هي ان نختار ψ و ϕ بطريقة تجعل الشروط الابتدائية والحدودية متحققة . نفرض ان

$$u(x, t) = \psi(x + ct) + \phi(x - ct).$$

الشروط الابتدائية هي :

$$\psi(x) + \phi(x) = f(x), \quad 0 < x < a \tag{6}$$

$$c\psi'(x) - c\phi'(x) = g(x), \quad 0 < x < a.$$

واذا قسمنا المعادلة الثانية على c واخذنا التكامل ، تصبح المعادلة

$$\psi(x) - \phi(x) = G(x) + A, \quad 0 < x < a \tag{7}$$

حيث

$$G(x) = \frac{1}{c}\int_0^x g(y)\, dy \tag{8}$$

و A ثابت اختياري . والمعادلتان (6) و (7) يمكن حلهما انياً لتحديد :

$$\psi(x) = \frac{1}{2}(f(x) + G(x) + A), \quad 0 < x < a$$

$$\phi(x) = \frac{1}{2}(f(x) - G(x) - A), \quad 0 < x < a.$$

هاتان المعادلتان تعطيان ϕ و ψ فقط للقيم بين 0 و a. ولكن $x \pm ct$ يمكن ان تأخذ اية قيمة . لذلك يجب ان نوسع هذه الدوال لنعرفها لاي قيم اختيارية لمتغيراتها ، وبهذه الطريقة تتحقق الشروط الحدودية . والشروط الحدودية هي :

$$u(0, t) = \psi(ct) + \phi(-ct) = 0, \qquad t > 0 \tag{9}$$

$$u(a, t) = \psi(a + ct) + \phi(a - ct) = 0, \quad t > 0. \tag{10}$$

والمعادلة الاولى تعني ان :

$$\bar{f}(ct) + \bar{G}(ct) + A + \bar{f}(-ct) - \bar{G}(-ct) - A = 0$$

او

$$\bar{f}(ct) + \bar{f}(-ct) + \bar{G}(ct) - \bar{G}(-ct) = 0$$

($\bar{f}$ و $\bar{G}$ هما الدالتان الموسعتان لـ f و G اللتان نبحث عنهما) . ولان هاتين المعادلتين صحيحيتان لاي دالتين اختياريتين f و G (لان الدالتين لا تعتمد الواحدة على الاخرى) ، وبهذا نحصل على :

$$\bar{f}(ct) = -\bar{f}(-ct), \quad \bar{G}(ct) = \bar{G}(-ct). \tag{11}$$

اي ان ، $\bar{f}$ فردية و $\bar{G}$ زوجية .

عند النقطة الطرفية الثانية ، الحسابات نفسها تبين ان

$$\bar{f}(a + ct) + \bar{f}(a - ct) + \bar{G}(a + ct) - \bar{G}(a - ct) = 0.$$

ومرة اخرى ، استقلالية f و G تؤدي الى :

$$\bar{f}(a + ct) = -\bar{f}(a - ct), \quad \bar{G}(a + ct) = \bar{G}(a - ct). \tag{12}$$

فردية $\bar{f}$ وزوجية $\bar{G}$ يمكن استخدامهما لتحويل الطرف الايمن . لذلك

$$\bar{f}(a + ct) = \bar{f}(-a + ct), \quad \bar{G}(a + ct) = \bar{G}(-a + ct).$$

هذه المعادلات تبين ان $\bar{f}$ و $\bar{G}$ دورية ذات دورة $2a$، وكون متغيراتها المستقلة $2a$ لا تغير قيمة الدالة . نحتاج الان لدورية فردية موسعة لـ f ، ودورية زوجية موسعة لـ G وبالرموز نفسها التي استعملت في الفصل الاول ، فان التعبير الضمني لـ ψ و ϕ يكون :

$$\psi(x + ct) = \frac{1}{2}(\bar{f}_o(x + ct) + \overline{G}_e(x + ct) + A)$$

$$\phi(x - ct) = \frac{1}{2}(\bar{f}_o(x - ct) - \overline{G}_e(x - ct) - A).$$

واخيراً ، نصل الى صيغة الحل لـ $u(x, t)$:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\bar{f}_o(x + ct) + \bar{f}_o(x - ct)] + \frac{1}{2}[\overline{G}_e(x + ct) - \overline{G}_e(x - ct)]. \quad (13)$$

هذه الصيغة من الحل للمعادلات (2) ـ (5) تجعلنا نرى بسهولة كيف ان البيانات الابتدائية تؤثر على الحل في اوقات لاحقة . ومن وجهة النظر العملية ، فمن الممكن ان نحسب $u(x, t)$ عند x و t وكذلك رسم مخطط u كدالة بمتغير واحد مستقل لاجل قيمة ثابتة للآخر . والخطوات الاتية تساعدنا في رسم مخطط $u(x, t)$ كدالة بدلالة x وتثبيت $t = t^*$، عندما يكون $g(x) \equiv 0$ في الشرط الابتدائي (5) . من السهولة ان نتعامل مع الحالات الاخرى .

1 . ارسم مخطط توسيع الدورية الفردية لـ f فـ وسمها $\bar{f}_o(q)$. (نستخدم q كمتغيير مستقل لتجنب اقترانه مع x او t .)
2 . ارسم مخطط $\bar{f}_o(x + ct^*)$ بدلالة x ; وهذا هو مخطط $\bar{f}_o$ منقول ct^* وحدة نحو اليسار .
3 . ارسم مخطط $\bar{f}_o(x - ct^*)$ بدلالة x على المحو نفسه . هذا المخطط هو نفسه $\bar{f}_o$ ولكنه منقول ct^* وحدة نحو اليمين .
4 . جد معدل المخططين في كلتي الحالتين السابقتين . وبين ان الشروط الحدودية تتحقق .

تمارين

1 . لتكن $u(x, t)$ حلاً للمعادلات (2) ـ (5) وان $g(x) \equiv 0$ والدالة $f(x)$ التي مخططها مثلث متساوي الساقين بعمق a وارتفاع h جد $u(x, t)$ لـ $x=0.25a$ و $x=0.5a$ وان $t = 0, 0.2a/c, 0.4a/c, 0.8a/c, 1.4a/c$.

2 . ارسم مخطط $u(x, t)$ في تمرين (1) كدالة بدلالة x للازمنة المعطاة . قارن النتائج مع الشكل (3 ـ 3) .

3 . لتكن $u(x, t)$ هي حل للمعادلات (2) ـ (5) وان $f(x) \equiv 0$ و $g(x) = \alpha c$ ، $0 < x < a$. جد $u(x, t)$ عند : $x = 0, t = 0.5a/c; x = 0.2a, t = 0.6a/c;$ $x = 0.5a, t = 1.2a/c$.

4 . ارسم مخطط $u(x, t)$ في تمرين 3 كدالة بدلالة x في زمن $t = 0, 0.25a/c, 0.5a/c, a/c$.

5 . جد الدالة $G(x)$ المقابلة لـ (لاحظ معادلة (8))

$$g(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 0.4a \\ 5c, & 0.4a < x < 0.6a \\ 0, & 0.6a < x < a. \end{cases}$$

6 . برر الوصف البديل للدالة $G(x)$ المعادلة (8) ، G هو حل مسألة القيم الابتدائية :

$$\frac{dG}{dx} = \frac{1}{c} g(x), \quad 0 < x$$

$$G(0) = 0.$$

7 . استخدم المعادلة (8) أو تمرين 6 ، لرسم مخطط الدالة $G(x)$ في تمرين 5 .

8 . ليكن $u(x, t)$ حلاً لمسألة السلك المهتز ، المعادلات (2) ـ (5) حيث $f(x) \equiv 0$ و $g(x)$ كما معرفة في تمرين 5 . ارسم مخطط $u(x, t)$ كدالة لـ x وللازمنة $ct = 0, 0.2a, 0.4a, 0.5a, a, 1.2a$.

تلميح : ارسم مخطط $\overline{G}_e(x + ct)$ و $-\overline{G}_e(x - ct)$; ، ثم جد معدل مخططيها .

9 . لتكن $u(x, t)$ دالة كما في تمرين 1 . ارسم مخططاً محورياً x و t ، وعين المنطقة $0 < x < a, 0 < t$ ارسم بعض منحنيات استوائية لـ $u(x, t)$.

(المنحني الاستوائي هو المحل الهندسي للنقاط (x, t) حيث $u(x, t)$ لها قيمة ثابتة .)

10 . معادلة قوة الاهتزاز لسلك هي :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{-1}{T}F(x, t) \qquad (*)$$

(لاحظ بند (1) ، تمرين (2) . وبتبديل المتغييرات الى

$$w = x + ct, \quad z = x - ct, \quad u(x, t) = v(w, z), \quad f(w, z) = F(x, t),$$

تصبح المعادلة :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial w\, \partial z} = \frac{-1}{4T}f(w, z).$$

بين ان الحل العام لهذه المعادلة هو :

$$v(w, z) = \frac{-1}{4T}\iint f(w, z)\, dw\, dz + \psi(w) + \phi(z).$$

11 جد الحل العام للمعادلة (*) تمرين (10) بدلالة x و t ، اذا كان $F(x, t) = T\cos t.$

12 . بين بشكل مباشر ان $u(x, t)$ المعطاة في المعادلة (1) هي حل لمعادلة الموجة (2) اذا كانت ϕ و ψ قابلتين للاشتقاق مرتين في الاقل .

13 . ارسم مخطط الحل لمسألة السلك المهتز ، المعادلات (2) - (5) في الازمنة $ct = 0, 0.1a, 0.3a, 0.4a, 0.5a, 0.6a,$ و اذا كان $g(x) = 0$ وان :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 0.4a \\ 10h(x - 0.4), & 0.4a < x < 0.5a \\ 10h(0.6 - x), & 0.5a < x < 0.6a \\ 0, & 0.6a < x < a \end{cases}$$

٤ . تعاميم لمعادلة الموجة ذات البعد الواحد

GENERALITIES ON THE ONE-DIMENSIONAL WAVE EQUATION

كما في معادلة الحرارة ذات البعد الواحد ، يمكن ان نعطي تعميماً لمعادلة الموجة ذات البعد الواحد . وللحصول على هذا التعميم ، نفرض ان بعض صفات عدم الانتظام موجودة ، ولغرض التبسيط ، نفرض ان المعادلة تكون متجانسة ، وليس فيها u . ان مسألة القيم الحدودية ـ القيم الابتدائية ستكون ؛

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(s(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{p(x)}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad l < x < r, \quad 0 < t \tag{1}$$

$$\alpha_1 u(l, t) - \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = c_1, \qquad 0 < t \tag{2}$$

$$\beta_1 u(r, t) + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial x}(r, t) = c_2, \qquad 0 < t \tag{3}$$

$$u(x, 0) = f(x), \qquad l < x < r \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \qquad l < x < r. \tag{5}$$

نفرض كذلك ان الدالتين $s(x)$ و $p(x)$ موجبتان عند $l \le x \le r$ ولان هاتين الدالتين تمثلان الخواص الفيزياوية ؛ اي p و s' و s تكون مستمرة ، وان s و p ليس لهما ابعاد . كذلك نفرض ان كلاً من المعاملات α_1, α_2 ، β_1, β_2 تكون غير سالبة .

ولكي نحصل على شروط حدودية متجانسة يمكن ان نكتب ؛

$$u(x, t) = v(x) + w(x, t)$$

وكما في السابق . ففي معادلة الموجة . فان الاسماء «حل حالة الاستقرار» ، «حل الانتقال» لم تعد ملائمة ؛ لانه ، كما سنرى ، لا توجد حالة استقرار ، او حالة

الغاية ، ولا يوجد جزء من الحل يقترب من الصفر عندما تؤول t الى ∞. وعلى كل حال ، v تمثل حل التوازن ، ومن المفيد من وجهة النظر الرياضية ان نعتبر u كما في الصيغة اعلاه .

الدالة $v(x)$ تتطلب ان تحقق الشروط الاتية ،

$$(sv')' = 0, \quad l < x < r$$

$$\alpha_1 v(l) - \alpha_2 v'(l) = c_1$$

$$\beta_1 v(r) + \beta_2 v'(r) = c_2.$$

لذلك فان $v(x)$ يكافىء (حل حالة الاستقرار » المعطى في معادلة الحراره .

والدالة $w(x, t)$ وهي الفرق بين $u(x, t)$ and $v(x)$, وتحقق مسألة القيم الحدودية القيم الابتدائية ،

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(s(x)\frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{p(x)}{c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \qquad l < x < r, \quad 0 < t \qquad (6)$$

$$\alpha_1 w(l, t) - \alpha_2 \frac{\partial w}{\partial x}(l, t) = 0, \qquad 0 < t \qquad (7)$$

$$\beta_1 w(r, t) + \beta_2 \frac{\partial w}{\partial x}(r, t) = 0, \qquad 0 < t \qquad (8)$$

$$w(x, 0) = f(x) - v(x), \quad l < x < r \qquad (9)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = g(x), \qquad l < x < r. \qquad (10)$$

وكون المعادلة والشروط الحدودية متجانسة وخطية ، لذلك سوف نحاول الحل بطريقة فصل المتغييرات . واذا كان $w(x, t) = \phi(x)T(t)$ ونجد بالطريقة الاعتيادية ان عامل الدالتين ϕ و T يجب ان يحقق

$$T'' + c^2\lambda^2 T = 0, \quad 0 < t \qquad (11)$$

$$(s(x)\phi')' + \lambda^2 p(x)\phi = 0, \quad l < x < r \qquad (12)$$

$$\alpha_1\phi(l) - \alpha_2\phi'(l) = 0 \qquad (13)$$

$$\beta_1\phi(r) + \beta_2\phi'(r) = 0. \qquad (14)$$

مسألة القيم الذاتية المتمثلة في المعادلات الثلاثة الاخيرة هي مسألة سترم ـ ليوفلي المنتظمة ، وبسبب الفرضيات على $s, p,$ ، وعلى المعاملات . نعرض بأنه يوجد عدد غير منته من القيم الذاتية غير السالبة $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots$ والدوال الذاتية المقابلة $\phi_1, \phi_2, \ldots$ والتي لها خاصية التعامد:

$$\int_l^r \phi_n(x)\phi_m(x)p(x)\,dx = 0, \quad n \neq m.$$

ان حل المعادلة بدلالة T هو :

$$T_n(t) = a_n \cos \lambda_n ct + b_n \sin \lambda_n ct.$$

وبعد ان قمنا بحل المسائل المساعدة التي تظهر بعد فصل المتغييرات ، نبدأ بتجميع الحل . الدالة w تكون بالصيغة .

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)(a_n \cos \lambda_n ct + b_n \sin \lambda_n ct)$$

والشرطان الابتدائيان اللذان يتحققان هما :

$$w(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n(x) = f(x) - v(x), \quad l < x < r$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\lambda_n c\phi_n(x) = g(x), \qquad l < x < r.$$

وباستخدام التعامدية لـ ϕ_n، فإن المعاملات b_n و a_n تعطى بـ

$$a_n = \int_l^r [f(x) - v(x)]\phi_n(x)p(x)\,dx/I_n$$

$$b_n = \int_l^r g(x)\phi_n(x)p(x)\,dx/I_n\lambda_n c$$

حيث ان :

$$I_n = \int_l^r \phi_n^2(x)p(x)\,dx.$$

أخيراً فان $u(x, t) = v(x) + w(x, t)$ هو حل للمسألة الاصلية . وان كل جزء من اجزائهِ قد تم تحديده بشكل كامل . ومن صيغة $w(x, t)$, يمكن ان نقوم ببعض المشاهدات حول u .

1 . $u(x,t)$ ليس لها غاية عندما تكون $t \to \infty$. كل حد من صيغة سلسلة w ، يكون دورياً في الزمن وبهذا فانهُ لا يتلاشى .

2 . عدا بعض الحالات الخاصة جداً . فأن القيم الذاتية λ_n^2 ليست مرتبطة مع بعضها . وبشكل عام ، اذا كانت u اهتزاز الصوت . فالنتيجة ليست موسيقية في الهواء . (الصوت يكون موسيقياً اذا كانت $\lambda_n = n\lambda_1$ كما في حالة السلك المنتظم) .

3 . بشكل عام . فان $u(x, t)$ليست دورية زوجية في الزمن وبالرغم من ان كل حد في سلسلة w يكون دورياً . الحدود ليس لها دورة مشتركة (عدا في بعض الحالات الخاصة) ، وبهذا لا يكون المجموع دورياً .

تمارين

1 . جد صيغ a_n و b_n . تحت اي من الشروط على f و g يمكن القول ان الشروط الابتدائية تتحقق ؟

2 . افحص العبارة ، $v(x)$ هو نفسه في مسألة الانتقال الحراري والمسألة المعطاة في هذا البند .

3 . جد دورة $T_n(t)$ والذبذبة المقترنة ؟

4 . بالرغم من ان $u(x, t)$ ليس لها غاية عندما $t \to \infty$. بين ان تعميم الغاية الاتية يتحقق بالاتي ،

$$v(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T u(x, t)\, dt .$$

(تلميح ، خذ التكامل والغاية حداً بعد حد) .

5 . حل المسألة

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(s(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{p(x)}{c^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma\frac{\partial u}{\partial t}\right) + q(x)u, \quad l < x < r, \quad 0 < t$$

بالشروط الحدودية في المعادلتين (2) و (3) والشروط الابتدائية في المعادلتين (4) و (5) ، أعتبر γ ثابتة .

6 . بين ان $w(x, t)$ يحقق المعادلة التفاضلية والشروط الحدودية للمعادلات (6) ـ (8) .

7 . بالرجوع الى الملاحظات في نهاية البند ، برهن العبارة الآتية في حلول الجداء للمسألة في المعادلات (6) ـ (8) جميعها لها دورة مشتركة في الزمن اذا كانت القيم الذاتية للمسألة في المعادلات (12) ـ (14) تحقق العلاقة :

$$\lambda_n = \alpha(n + \beta)$$

حيث β عدد نسبي

8 . جد حل فصل المتغيرات للمسألة :

$$\frac{\partial u^2}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma^2 u\right), \quad 0 < x < a, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(a, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, t) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < a.$$

وهل هذا هو مثلٌ للمسألة في هذا البند ؟ ان اياً من الملاحظات في نهاية البند تحقق الحل لهذه المسألة .

5. تخمين القيم الذاتية : ESTIMATION OF EIGENVALUES

في العديد من الامثلة ، قد لا نكون راغبين في ايجاد الحل الكامل لمعادلة الموجة ، ولكن فقط في الذبذبات المحتملة للاهتزاز والتي يمكن ان تظهر . فمثلاً من الاهمية بمكان ان الجسور ، واجنحة الطائرات وهياكل اخرى يجب ان لا تهتز . لذلك فمن المهم ان نعرف الذبذبات التي تحصل في حالةاهتزاز الهيكل ، ولكي نتجنب ذلك . وبتدقيق الحل لتعميم معادلة الموجة ، التي درسناها في البند السابق ، يمكن ان نلاحظ ان ذبذبات الاهتزاز هي $\lambda_n c/2\pi$, $n=1, 2, 3, \ldots$ لذلك يمكن ان نجد القيم الذاتية λ_n^2 لكي نعين ذبذبات الاهتزاز .

خذ مسألة سترم ـ ليوفلي الاتية :

$$(s(x)\phi')' - q(x)\phi + \lambda^2 p(x)\phi = 0, \quad l < x < r \tag{1}$$

$$\phi(l) = 0, \quad \phi(r) = 0 \tag{2}$$

حيث q, s, s'، و p مستمرة ، وان s و p موجبة في الفترة $l \leq x \leq r$ (لاحظ انة توجد لدينا معادلة تفاضلية عامة اخرى ، ولكن بشروط حدودية خاصة جداً) .

واذا كانت ϕ_1 هي الدالة الذاتية التي تقابل اصفر قيمة ذاتية λ_1^2، فان ϕ_1 تحقق المعادلة (1) عند $\lambda = \lambda_1$. وبشكل مرادف يمكن ان نكتب ،

$$-(s\phi_1')' + q\phi_1 = \lambda_1^2 p\phi_1, \quad l < x < r.$$

وبضرب هذه المعادلة بـ ϕ_1 وبأخذ التكامل من l الى r نحصل على ،

$$\int_l^r -(s\phi_1')'\phi_1\, dx + \int_l^r q\phi_1^2\, dx = \lambda_1^2 \int_l^r p\phi_1^2\, dx.$$

اذا اجرينا التكامل الاول بالتجزئة يصبح

$$-s\phi_1'\phi_1\Big|_l^r + \int_l^r s\phi_1'\phi_1'\, dx.$$

ولكن $\phi_1(l) = \phi_1(r) = 0$ لذلك فان الحد الاول يتلاشى ، ويبقى لدينا ،

$$\int_l^r s[\phi_1']^2\, dx + \int_l^r q\phi_1^2\, dx = \lambda_1^2 \int_l^r p\phi_1^2\, dx.$$

وكون $p(x)$ موجبة في الفترة $l \leq x \leq r$ فان التكامل في الطرف الايمن يكون موجباً . ويمكن ان نعرف λ_1^2 بالصيغة الاتية ،

$$\lambda_1^2 = \frac{\int_l^r s[\phi_1']^2\, dx + \int_l^r q\phi_1^2\, dx}{\int_l^r p\phi_1^2\, dx} = \frac{N(\phi_1)}{D(\phi_1)}. \tag{3}$$

ومن حساب الاهتزاز يمكن بيان انهُ اذا كانت $y(x)$ اي دالة والتي مشتقاتها الاولى والثانية مستمرة$(l \le x \le r)$والتي تحقق $y(l) = y(r) = 0,$ فان :

$$\lambda_1^2 \le \frac{N(y)}{D(y)}. \qquad (4)$$

وبهذا ، فانه باختيار اية دالة مناسبة y تتحقق هذه الشروط ، يمكن ان نخمن ان λ_1^2 . اعتيادياً فان التخمين جيد ونضع في الاعتبار ان $\phi_1(x)$ لا تقطع محور x بين l و r . لذلك ، فان y لا تقطع المحور ايضاً .

مثال . خمّن القيمة الذاتية الاولى لـ :

$$\phi'' + \lambda^2\phi = 0, \quad 0 < x < 1$$
$$\phi(0) = \phi(1) = 0.$$

واذا فرضنا ان $y(x) = x(1 - x)$ فان $y'(x) = 1 - 2x$ وان :

$$N(y) = \int_0^1 [y'(x)]^2\, dx = \int_0^1 (1 - 2x)^2\, dx = \frac{1}{3},$$

$$D(y) = \int_0^1 y^2(x)\, dx = \int_0^1 x^2(1 - x)^2\, dx = \frac{1}{30}.$$

لذلك فان $N(y)/D(y) = 10$ من المعلوم ان $\phi_1(x) = \sin \pi x,$ وان :

$$N(\phi_1) = \int_0^1 \pi^2 \cos^2 \pi x\, dx = \frac{\pi^2}{2}$$

$$D(\phi_1) = \int_0^1 \sin^2 \pi x\, dx = \frac{1}{2}$$

وبهذا يكون $N(\phi_1)/D(\phi_1) = \lambda_1^2 = \pi^2 < 10$ ، وهذا يؤكد المعادلة (4) .

مثال . خمّن القيمة الذاتية الاولى لـ :

$$(x\phi')' + \lambda^2 \frac{1}{x} \phi = 0, \quad 1 < x < 2$$

$$\phi(1) = \phi(2) = 0.$$

التكاملات المطلوب حسابها هي :

$$N(y) = \int_1^2 x(y')^2\,dx, \quad D(y) = \int_1^2 \frac{1}{x}\,y^2\,dx.$$

الجدول ادناه يعطي النتائج لبعض دوال الاختبار . ومن المعلوم ان القيمة الذاتية الاولى والدوال الذاتية هي :

$$\lambda_1{}^2 = \left(\frac{\pi}{\ln 2}\right)^2 = 20.5423$$

$$\phi_1(x) = \sin\left(\frac{\pi \ln x}{\ln 2}\right)$$

الخطأ لأفضل دالة اختيار هي حوالي 1.44 % .

$y(x)$	$\sqrt{x}(2-x)(x-1)$	$(2-x)(x-1)$	$\dfrac{(2-x)(x-1)}{x}$
$\dfrac{N(y)}{D(y)}$	23.7500	22.1349	20.8379

ان طريقة تخمين القيمة الذاتية الاولى تسمى طريقة رايلي *(Rayleigh's method)* والنسبة $N(y)/D(y)$ تسمى نسبة رايلي . في بعض الانظمة الميكانيكية ، نسبة رايلي يمكن تفسيرها على انها النسبة بين الطاقتين الكامنة والحركية . وتوجد طرق اخرى لتخمين القيم الذاتية وتحسين هذا التخمين .

تمارين

1 . باستخدام المعادلة (3) ، بين انه اذا كان $q \ge 0$ فان $\lambda_1{}^2 \ge 0$ ايضاً .

2 . جد النتائج لواحد في الاقل من دوال الاختبار باستخدام المثال الثاني .

3 . خمّن القيمة الذاتية للمسألة :

$$\phi'' + \lambda^2(1 \quad\quad \phi = 0, \quad 0 < x < 1$$

$$\phi(0) = \phi(1) = 0.$$

4 . بين ان الحل العام للمعادلة التفاضلية ادناه هو ؛
$ax \cos(\lambda/x) + bx \sin(\lambda/x)$ ثم حل مسألة القيم الذاتية

$$\phi'' + \frac{\lambda^2}{x^4}\phi = 0, \quad 1 < x < 2$$

$$\phi(1) = 0, \quad \phi(2) = 0.$$

5 . خمّن اوطأ قيمة ذاتية للمسألة في تمرين 4 باستخدام $v = (x - 1)(2 - x)$

6 . معادلة الموجة في مناطق غير مقيدة
WAVE EQUATION IN UNBOUNDED REGIONS

عندما نريد حل معادلة الموجة لـ$0 < x$او$-\infty < x < \infty$ سوف نبدأ كما فعلنا في حل معادلة الحرارة في منطقة غير مقيدة . اي نقوم بفصل المتغييرات ونستخدم تكامل فوريه لربط حلول الجداء .

خذ المسألة ؛

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < t, \quad 0 < x \qquad (1)$$

$$u(x, 0) = f(x), \qquad 0 < x \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \qquad 0 < x \qquad (3)$$

$$u(0, t) = 0, \qquad 0 < t. \qquad (4)$$

بالاضافة الى ذلك يجب ان يكون الحل $u(x, t)$ مقيدا عندما $x \to \infty$
وبفصل المتغييرات . نجعل$u(x, t) = \phi(x)T(t)$ثم نبين ان العوامل تحقق المعادلات الاتية ؛

$$T'' + \lambda^2 c^2 T = 0, \quad 0 < t$$

$$\phi'' + \lambda^2\phi = 0, \quad 0 < x$$

$$\phi(0) = 0, \quad |\phi(x)| \text{ مقيدة}$$

والحلول يمكن ايجادها بسهولة على انها ؛

$$\phi(x; \lambda) = \sin \lambda x, \quad T(t) = A \cos \lambda ct + B \sin \lambda ct$$

ونربط الجداءات $\phi(x; \lambda)T(t)$ في تكامل فوريه

$$u(x, t) = \int_0^\infty (A(\lambda) \cos \lambda ct + B(\lambda) \sin \lambda ct) \sin \lambda x \, d\lambda. \qquad (5)$$

وبهذا تصبح الشروط الحدودية .

$$u(x, 0) = f(x) = \int_0^\infty A(\lambda) \sin \lambda x \, d\lambda, \qquad 0 < x$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) = \int_0^\infty \lambda c B(\lambda) \sin \lambda x \, d\lambda, \quad 0 < x.$$

والمعادلتان هما تكاملاً فورية . لذلك فان دوال المعاملات هي :

$$A(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \sin \lambda x \, dx, \quad B(\lambda) = \frac{2}{\pi \lambda c} \int_0^\infty g(x) \sin \lambda x \, dx.$$

ومن الضروري ان يكون كلاً من $\int_0^\infty |g(x)| dx$ $\int_0^\infty |f(x)| \, dx$ منتهياً لكي نضمن وجود A ، B.

ان القصور في صيغة تكامل فورية للحل المعطى في معادلة (5) هو عدم وجود فكرة عن ماهية $u(x, t)$ ، وحل دالمبرت لمعادلة الموجة يقدم لنا المساعدة . من المعلوم ان حل المعادلة (1) يكون بالصيغة الاتية :

$$u(x, t) = \psi(x + ct) + \phi(x - ct).$$

الان ، الشروط الابتدائية هي :

$$\psi(x) + \phi(x) = f(x), \qquad 0 < x$$

$$\psi(x) - \phi(x) = G(x) + A, \quad 0 < x.$$

وكما في الحالة المنتهية ، نعرف

$$G(x) = \frac{1}{c} \int_0^x g(y) dy$$

وان A هو اي ثابت .

ومن الشرطين الابتدائيين نحصل على :

$$\psi(x) = \frac{1}{2}(f(x) + G(x) + A), \quad x > 0$$

$$\phi(x) = \frac{1}{2}(f(x) - G(x) - A), \quad x > 0.$$

وكل من f ، G معروف لكل $x > 0$ وبالتالي فان :

$$\psi(x + ct) = \frac{1}{2}(f(x + ct) + G(x + ct) + A)$$

معرفة لكل $x > 0$ ، $t \geq 0$ ولكن $\phi(x - ct)$ ليست معرفة عند $x - ct < 0$ وهذا يتطلب ان نوسع الدالتين f G بالطريقة التي نعرف بها ϕ للمتغيرات المستقلة السالبة وكذلك تحقق الشروط الحدودية . الشرط الحدودي الوحيد (sole boundary condition) في معادلة (4) ، يصبح

$$u(0, t) = 0 = \psi(ct) + \phi(-ct).$$

بدلالة $\bar{f}$ ، $\bar{G}$ ، توسيع f ، G ، هما

$$0 = f(ct) + G(ct) + A + \bar{f}(-ct) - \bar{G}(-ct) - A.$$

وكون f ، G غير معتمدة على بعضها البعض ، فسيكون لدينا :

$$f(ct) + \bar{f}(-ct) = 0, \quad G(ct) - \bar{G}(-ct) = 0.$$

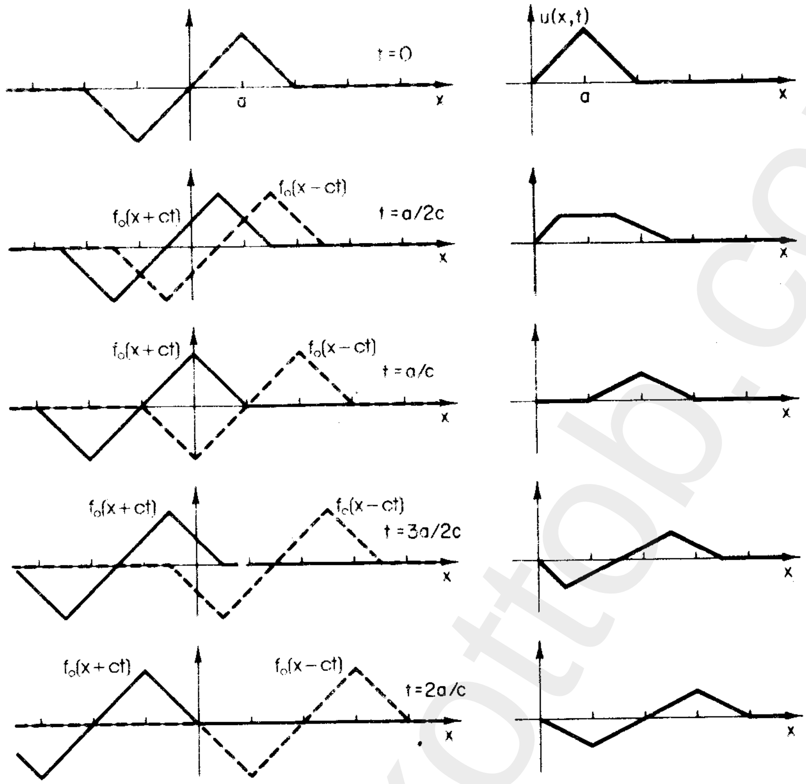
اي ان ، $\bar{f}$ هو f_o ، التوسع الفردي لـ f ، $\bar{G}$ هو G_e التوسع الزوجي لـ G

اخيراً نصل الى صيغة للحل

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f_o(x + ct) + G_e(x + ct)] + \frac{1}{2}[f_o(x - ct) - G_e(x - ct)]. \quad (6)$$

الان اذا اعطيت الدالتان $f(x)$، $g(x)$ ، فمن السهولة ان نحصل على f_o ، G_e كذلك مخطط $u(x, t)$ كدالة لاحد المتغييرين او حسابهما لقيم معلومة لـ x و t . والشكل (4 ـ 3) يبين الحل للمعادلات (1) ـ (4) كدالة لـ x عند ازمنة متعددة للدالة $f(x)$ ، $g(x) \equiv 0$

وتوجد مسألة مهمة اخرى يمكن معالجتها بطريقة دالمبرت ، والتي يكون فيها الشرط الحدودي دالة بدالة الزمن . للسهولة نأخذ الشروط الابتدائية مساوية للصفر . وبهذا تصبح مسألتنا هي :



شكل (4 ـ 3) . لكل المعادلات (١) (4) و $g(x) = 0$ في اليسار هي المخططات لـ $f_o(x + ct)$ وان $f_o(x - ct)$ في الازمنة المبينة . وفي اليمين مخططات لـ $u(x, t)$ لـ $0 < x$, والتي انشئت من معدل المخططات في اليسار.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad 0 < x, \quad 0 < t \tag{7}$$

$$u(x, 0) = 0, \qquad 0 < x \tag{8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \qquad 0 < x \tag{9}$$

$$u(0, t) = h(t), \qquad 0 < t. \tag{10}$$

ولكي تكون u حلاً لمعادلة الموجة ، يجب ان تأخذ الصيغة

$$u(x, t) = \psi(x + ct) + \phi(x - ct). \tag{11}$$

والشرطان الابتدائيان في المعادلتين (8) ، (9) ، يمكن معالجتهما كما في المسألة الاولى بالطبع $G(x) \equiv 0$ ، والثابت A ، اختياريان ، ويمكن ان يكونا 0 . وبهذا نستنتج ان :

$$\psi(x) = 0, \quad \phi(x) = 0, \quad 0 < x$$

وكون كل من x ، t موجب في هذه المسألة . نلاحظ ان $\psi(x + ct) = 0$ دائماً . وبهذا تبسط المعادلة (11) الى :

$$u(x, t) = \phi(x - ct). \qquad (12)$$

الشرط الحدودي معادلة (10) يخبرنا عن كيفية حساب ϕ للمتغيرات المستقلة السالبة . المعادلة هي :

$$u(0, t) = \phi(-ct) = h(t), \quad 0 < t \qquad (13)$$

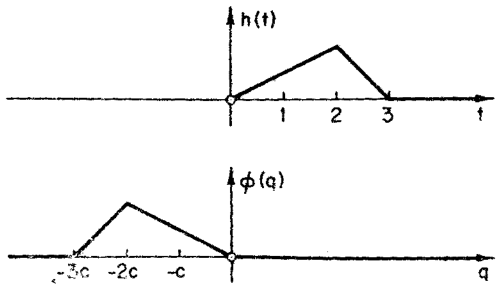
والان نضع جميع ما نعرفه عن الدالة ϕ :

$$\phi(q) = \begin{cases} 0, & q > 0 \\ h\left(-\dfrac{q}{c}\right), & q < 0. \end{cases} \qquad (14)$$

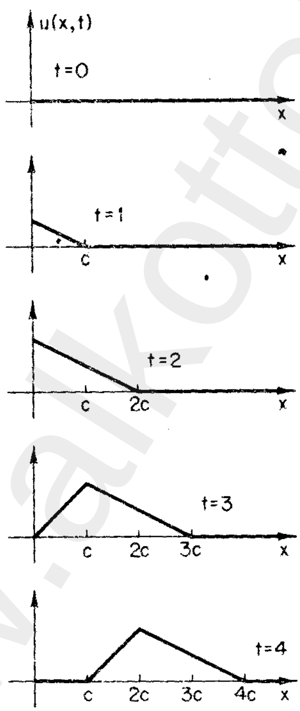
المتغير المستقل q وهمي ، ويستخدم لتجنب الالتباس مع x او t . المعادلتان (12) ، (14) تحددان حل $u(x, t)$ بشكل كامل .

وكمثال على ذلك ، نأخذ $h(t)$ كما في الشكل (5 ــ 3) . يوجد مخطط لـ $\phi(q)$ ايضاً . لاحظ ان مخطط ϕ للمتغيرات المستقلة السالبة هو انعكاس لـ h .

المخططات في الشكل (6 ــ 3) تبين $u(x, t)$ كدالة بدلالة x لعدة قيم لـ t . ومن الواضح من كل المخططات وصيغة التشويش المتسبب بواسطة الشرط الحدودي المتغير تصل الى نقطة ثابتة x عند زمن x/c . لذلك فان التشويش يتماشى مع السرعة c ، سرعة الموجة



شكل (5 ـ 3) . مخططي $\phi(q)$, $h(t)$ لسلك شبه غير منته مع زمن يغير الشروط الحدودية



شكل (6 ـ 3) مخططات $u(x, t)$

معادلة الموجة اللازمة للشروط الابتدائية غير الصفرية والشروط الحدودية للزمن المتغير يمكن حلها عن طريق تحويلها الى مسألتين . الاولى تشبه المعادلات

(1) ـ (4) بشرط حدودي صفري ، والثانية تشبه المعادلات (7) ـ (10) بشروط ابتدائية صفرية .

تمارين

1 . اشتق صيغة مشابهة للمعادلة (6) في الحالة التي يستبدل بها الشرط الحدودي في معادلة (4) بـ

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad 0 < t.$$

2 . اشتق معادلة (6) من المعادلة (5) باستخدام المتطابقات المثلثية لـ $\sin \lambda x \cdot \cos \lambda ct,$ ... الخ ، وميز تكاملات فورية .

3 . ارسم مخطط الحل للمعادلات (1) ـ (4) كدالة بدلالة x عند ازمنة $t = 0,\ 1/2c,\ 1/c,\ 2/c,\ 3/c$ ، اذا كانت $g(x) = 0$ لكل x و $f(x)$ هي الموجه النابضة المستطيلة :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \\ 0, & 2 < x. \end{cases}$$

4 . كما في تمرين 3 ، ولكن $f(x) = 0$ ، $g(x)$ هي الموجة النابضة المستطيلة :

$$g(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1 \\ c, & 1 < x < 2 \\ 0, & 2 < x. \end{cases}$$

5 . ارسم مخطط الحل للمعادلات (7) ـ (10) عند الازمنة . $t = 0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2,\ 2\pi,\ 5\pi/2,$ ، اذا كان $h(t) = \sin t$.

6 . ارسم مخطط الحل للمعادلات (7) ـ (10) عند الازمنة $t = 0,\ 1/2,\ 3/2,\ 0 =$ $5/2$ اذا كان $c = 1$ وان :

$$h(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 1 \\ 1, & 1 < t < 2 \\ 0, & 2 < t. \end{cases}$$

7 . استخدم حل دالمبرت لمعادلة الموجة لحل المسألة :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

7 . تعليقات ومصادر . COMMENTS AND REFERENCES

تعتبر معادلة الموجة من اقدم المسائل في الفيزياء الرياضية . أويلر وبرنولي ودالمبرت جميعهم حلوا مسألة السلك المهتز حوالي عام 1750 ، واستخدموا اما فصل المتغيرات واما ما يسمى بطريقة دالمبرت . واصبح هذا لاحقاً حالة خاصة من طريقة المميز ، (characteristics, method) ، وهي في جوهرها طريقة تشخيص متغيرات مستقلة لها دلالة خاصة . وكتاب

1973, Street's *Analysis and Solution of Partial Differential Equations*,

فيه فصل يتناول طريقة المميز ، وتضم استخدام الحلول العددية .

وبسبب وجود عدة ظواهر فيزياوية توصف بمعادلة الموجة هي جزء من تجاربنا اليومية ـ صوت الالات الموسيقية ، مثلاً ـ والتي تأخذ عادة شكل التفسيرات في الفيزياء الرياضية . وكتاب ديفيد وهيرج ، 1981 ، يشرح الموجات المقاومة (حلول الجراء) ومبدأ التطابق بطريقة مبسطة . والمصدر المهم الاخر هو كتاب *The Physics of Music*, ، 1978 ، ويحوي على مجموعة من المقالات من « المجلة العلمية الامريكية » . وبالطبع ، فان عدة ظواهر اخرى يمكن وصفها بواسطة معادلة الموجة . واهم هذه الظواهر في حياتنا المعاصرة هي الموجات الكهربائية والمغناطيسية والتي تعتبر كحالات خاصة من معادلات حقل ماكسويل .

وان فرق الجهد V بين داخل وخارج المحور العصبي يمكن وضع نموذج له تقريباً بواسطة معادلات فتزو ـ ناكومو(Fitzhugh–Nagumo

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + V - \frac{1}{3}V^3 - R$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = k(V + a - bR).$$

هنا R تمثل التاثير المتجدد و a, b, k ثوابت . للوهلة الاولى ، نتوقع ان يكون سلوك V مشابهاً لحل معادلة الحرارة . لكن حل الموجة ـ المتحركة :

$$V(x, t) = F(x - ct), \quad R(x, t) = G(x - ct),$$

لهاتين المعادلتين يمكن ايجاده ليتبين عدة قضايا مهمة في نبضات الاعصاب وثمة تفصيلات اخرى يمكن ايجادها في كتاب *Biological Engineering,* تأليف Schwan 1969 . وتطبيقات بايولوجية اخرى يمكن الاطلاع عليها في كتاب «*Partial Differential Equations in Biology*» تأليف Peskin 1975 .

وللحصول على معلومات اخرى حول قسمة رايلت وتخمين القيم الذاتية يمكن مراجعة كتاب« *Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics,* »ل تأليف Sagan ، 1966 ومن المصادر التقليدية للقيم الذاتية والمعادلات التفاضلية الجزئية في الفيزياء الرياضية بشكل عام كتاب «*Mathematical Physics,*» تأليف Courant ، Hilbert.

تمارين متنوعة

في التمارين 5 ـ 1 اشر الى المسألة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad 0 < x < a, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = 0, \; u(a, t) = 0, \qquad 0 < t$$

$$u(x, 0) = f(x), \; \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \qquad 0 < x < a.$$

1 . خذ $f(x)=1$ ، $0 < x < a$ ، $g(x) \equiv 0$ (يعتبر هذا غير واقعي اذا كانت $u(x, t)$ هي الازاحة للسلك المهتز) . جد (بفضل المتغيرات) سلسلة الحل .

2 . ارسم مخطط $u(x, t)$ تمرين (1) كدالة بدلالة x في اوقات مختلفة خلال دورة واحدة .

3 . الحل $u(x, t)$ في تمرين (1) يأخذ فقط ثلاثة قيم 1 ، 0 او 1 ـ ارسم مخطط المنطقة $0 < x < a, 0 < t$ وعين الاماكن عندما تأخذ u جميع القيم .

4 . اذا كانت $g(x) = 0$ ، $f(x)$ هي الدالة :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3hx}{2a}, & 0 < x < \dfrac{2a}{3} \\ \dfrac{3h(a-x)}{a}, & \dfrac{2a}{3} < x < a. \end{cases}$$

مخطط f يكون مثلثين قمته عند $x = 2a/3$ جد سلسلة حل $u(x, t)$.

5 . ارسم مخطط $u(x, t)$ في تمرين 4 كدالة بدلالة x في زمن من 0 الى a/c بفترات $a/(6c)$

6 . جد الحل (التكامل) التحليلي لمسألة الموجة ،

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

$$, \quad g(x) = 0 \qquad f(x) = \begin{cases} h, & |x| < \epsilon \\ 0, & |x| > \epsilon. \end{cases}$$

7 . ارسم مخطط الحل للمسألة في تمرين 6 في الازمنة $t = 0, \epsilon/c\ 2\epsilon/c, 3\epsilon/c$

8 . اعد التمرين 7 ، ولكن $f(x) = 0$ ،.

$$g(x) = \begin{cases} c, & |x| < \epsilon \\ 0, & |x| > \epsilon. \end{cases}$$

9 . لتكن $u(x, t)$ هي حل المسألة ،

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad 0 < x, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = 0, \qquad 0 < t$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 < x.$$

ارسم مخطط الحل $u(x, t)$ كدالة بدلالة x في الازمنة $t = 0, a/6c,$ $a/2c, 5a/6c, 7a/6c.$ استخدم $g(x) = 0$ وان

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3hx}{2a}, & 0 < x < \dfrac{2a}{3} \\ \dfrac{3h(a - x)}{a}, & \dfrac{2a}{3} < x < a \\ 0, & a < x \end{cases}$$

10 . اعد التمرين 9 ولكن

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < \pi \\ 0, & \pi < x \end{cases}$$

$g(x) = 0$. ارسم المخطط في الازمنة $t = 0, \pi/4c, \pi/2c, 3\pi/4c, \pi/c, 2\pi/c$

11 . لتكن $u(x, t)$ حلاً لمعادلة الموجة في الفترة شبه المنتهية $0 < x < \infty$ وان وكلا من الشرطين الابتدائيين يساوي 0 ، والشرط الحدودي للزمن المتغير هو :

$$u(0, t) = \begin{cases} \sin \dfrac{ct}{a}, & 0 < t < \dfrac{\pi a}{c} \\ 0, & \dfrac{\pi a}{c} < t. \end{cases}$$

أرسم مخطط $u(x, t)$ كدالة بدلالة x وفي ازمنة مختلفة .

12 . اعد التمرين (11) ، ولكن بالشرط الحدودي $u(0, t) = h$ لكل $0 < t$

13 . اعد التمرين (11) ، ولكن بالشرط الحدودي والذي هو :

$$u(0, t) = \begin{cases} \dfrac{hct}{a}, & 0 < t < \dfrac{a}{c} \\ \dfrac{h(2a - ct)}{a}, & \dfrac{a}{c} < t < \dfrac{2a}{c} \\ 0, & \dfrac{2a}{c} < t. \end{cases}$$

14 . خمّن اوطأ قيمة ذاتية للمسألة :

$$(e^{\alpha x}\phi')' + \lambda^2 e^{\alpha x}\phi = 0, \quad 0 < x < 1$$

$$\phi(0) = 0, \quad \phi(1) = 0.$$

(هذه المسألة يمكن حلها بالضبط)

15 خمّن اوطأ قيمة ذاتية للمسألة :

$$\phi'' - \frac{3}{4x^2}\phi' + \lambda^2\phi = 0, \quad \frac{1}{4} < x < \frac{5}{4},$$

$$\phi\left(\frac{1}{4}\right) = 0, \quad \phi\left(\frac{5}{4}\right) = 0.$$

16 . بين ان معادلة الموجة غير الخطية هي ؛

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

(تسمى معادلة كورتيج ـ ديفرز) ولها حل واحد هو ؛

$$u(x, t) = 12a^2 \operatorname{sech}^2(ax - 4a^3 t).$$

17 . الحل في تمرين (16) يكون بالصيغة $u(x, t) = f(x - ct)$. ما هو حل f ؟ وما هو انطلاق الموجة c ؟

18 . لاجل $t < 0$. ينساب الماء باتزان خلال انبوب طويل مربوط عند $x = 0$ بخزان ومعرض للهواء عند $x = a$ عندما $t = 0$ فإن الصمام عند $x = a$ ينغلق فجأة . التعبيران المقبولان لحفظ العزوم والكتلة هما

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t \qquad \text{(A)}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -c^2\frac{\partial u}{\partial x}, \quad 0 < x < a, \text{ لكل } t \qquad \text{(B)}$$

حيث p هي مقياس الضغط ، u هو معدل انسياب الكتلة . هنا $c^2 = K/\rho$ هي نسبة معامل الحجم الى كثافة الماء . بين ان كلًا من u و p يحقق معادلة الموجة .

19 . اعطينا دالة v مع التعريف $u = \partial v/\partial x, p = -\partial v/\partial t$. بين ان (A) تصبح متطابقة وان (B) تصبح معادلة الموجة لـ v .

20 . الشروط الابتدائية والحدودية المقبولة لـ p و u هي ؛

$$p(x, 0) = -kx, \qquad 0 < x < a$$

$$p(0, t) = 0, \qquad \text{لكل } t$$

$$u(a, t) = 0, \qquad t > 0.$$

اعد صياغة هذه الشروط كشروط على v . بينْ ان المعادلتين الاولى والثالثة يمكن استبدالهما بـ

$$v(x, 0) = U_0 x, \quad 0 < x < a$$

$$v(0, t) = 0, \quad \text{لكل } t.$$

21 . حل المسألة الموجودة في تمرين (20) ، وجد صيغة السلسلة لـ $v(x, t)$

22 . في بعض المسائل التي تشمل انسياب المائع ، يظهر التركيب

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x}$$

(يسمى مشتقة ستوك *Stokes derivative*) . هنا V تمثل انطلاق المائع في اتجاه x . اذا كانت V تساوي u او تعتمد عليها ، فإن هذا المؤشر يكون غير خطي ومن الصعوبة التعامل معه . دعنا نفرض ان V ثابت ، لذلك فإن المؤثر يكون خطياً . الآن يمكن ان نعرف متغييرات جديدة

$$\xi = x + Vt, \quad \tau = x - Vt, \quad u(x, t) = v(\xi, \tau).$$

بين ان :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} = 2V \frac{\partial v}{\partial \xi}.$$

23 . افرض ان $u(x, y, t)$ بصيغة الجداء كما ادناه . افصل المتغييرات في المعادلة التفاضلية الجزئية المعلومة .

$$u(x, y, t) = \psi(x + Vt)\phi(x - Vt)Y(y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{k}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

24 . مائع ينساب بين صفيحتين ثبتت درجة حرارتهما عند الصفر . وفي الداخل درجة حرارة المائع T_0 ، وكانت درجة الحرارة الابتدائية للمائع T_1 . فاذا كان V هو انسياب المائع في اتجاه ـ x ، فإن المسألة التي تصف درجة الحرارة $u(x, y, t)$ هي :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{k}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad 0 < y < b, \quad 0 < x, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0, t) = 0, u(x, b, t) = 0, \quad 0 < x, \quad 0 < t$$

$$u(0, y, t) = T_0, \quad 0 < y < b, \quad 0 < t$$

$$u(x, y, 0) = T_1, \quad 0 < x, \quad 0 < y < b.$$

افصل المتغيرات كما في تمرين (23) . واذكر ثم حل مسألة القيم الذاتية لـ Y . بين ان

$$u_n(x, y, t) = \phi_n(x - Vt) \exp(-\lambda_n^2 k(x + Vt)/2V) \sin \lambda_n y$$

تحقق المعادلة التفاضلية الجزئية والشروط الحدودية عند $y = 0$ و $y = b$ دون وضع اية قيود على ϕ_n (عدا قابلية الاشتقاق) .

25 . حقق الشروط الابتدائية والداخلية للمسألة في تمرين (24) ، وكوّن مجموع خلول الجداء واختر بشكل صحيح ϕ_n .

26 . في خط ارسال كهربائي منتظم ، ممتد طوله محور ـ x من $x = 0$ الى $x = a$، التيار والفولتية نسبة الى الارض تمثل بـ $i(x, t)$ و $e(x, t)$. والخط يتميز بالمتغيرات الوسيطية التي كلها في الطول . المقاومة R ، معامل الحث L ، وتسرب التوصيل G والسعة C . مقطع من الخط يقع بين x و $x + \Delta x$ له دائرة كهربائية مكافئة لتلك المبينة في الشكل 7 ـ 3 . تطبيق قوانين كرشوف على الدائرة الكهربائية يؤول الى المعادلتين الآتيتين :

$$i(x, t) = i(x + \Delta x, t) + G\,\Delta x\, e(x, t) + C\,\Delta x \frac{\partial e}{\partial t}(x, t)$$

$$e(x, t) = e(x + \Delta x, t) + R\,\Delta x\, i(x, t) + L\,\Delta x \frac{\partial i}{\partial t}(x, t).$$

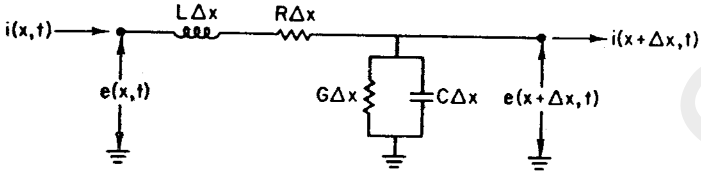


Figure 3 — 7

وباعادة ترتيب الحدود واخذ الغاية عندما $\Delta x \to 0$ ، اشتق المعادلات التفاضلية الجزئية :

$$\frac{\partial i}{\partial x} + Ge + C\frac{\partial e}{\partial t} = 0 \qquad \text{(C)}$$

$$\frac{\partial e}{\partial x} + Ri + L\frac{\partial i}{\partial t} = 0. \qquad \text{(D)}$$

27 . في خطوط الهاتف ، تسرب التوصيل ومعامل الحث مهملان . خذ $G = 0$ و $L = 0$, واربط المعادلتين (C) و (D) لتحصل على معادلة تفاضلية جزئية واحدة من المرتبة الثانية لـ $i(x, t)$. اعمل الشيء نفسه لـ $e(x, t)$.

28 . في حالات اخرى ، المقاومة وتسرب التوصيل مهملان . خذ $G= 0$ و $R = 0$. وبين ان كلاً من e و i تحققان معادلة الموجة (« معادلات الذبذبات العالية ») مع $c = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$

29 . جد حلول (بصيغة السلسلة) المعادلتين (C) و (D) حيث $G= 0$ و $R = 0$ ومع شروط مساعدة هي :

$e(x, 0) = \ldots, \quad i(x, 0) = 0, \quad 0 < x < a$

$$e(0, t) = 0, \quad e(a, t) = 0, \quad 0 < t.$$

(الشروط الحدودية تسمى شروط الدائرة ـ القصيرة) .

30 . احصل على الحل بطريقة دالمبرت للمسألة في تمرين (29) .

31 . جد حلول السلسلة للمعادلتين (C) و (D) للحالة التي يكون فيها $G = 0$ و $L = 0$ والشروط الابتدائية والحدودية هي

$$e(0, t) = V_0, \quad e(a, t) = 0, \quad 0 < t$$
$$e(x, 0) = V_0, \quad i(x, 0) = 0, \quad 0 < x < a.$$

32 . حل المعادلتين (C) و (D) حيث $G = 0$ و $R = 0$ اذا كان التيار والفولتية الابتدائية تساويان 0 في $t = 0$ وطبقت فولتية ثابتة V عند $x = 0$ بينما النهاية عند $x = a$ هي دائرة ـ قصيرة .

33 . حل المعادلتين (C) و (D) حيث $R = 0$ و $G = 0$ بفرض ان الخط ممتد من $x = 0$ الى ∞ . خذ الشروط الابتدائية والحدودية .

$$e(x, 0) = Ve^{-\alpha x}, \quad i(x, 0) = 0, \quad 0 < x$$
$$e(0, t) = V, \qquad 0 < t.$$

34 . جد جميع الدوال ϕ بحيث يكون $u(x, t) = \phi(x - ct)$ حلاً لمعادلة الحرارة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}.$$

35 . خذ الثابت $c = (1+i)\sqrt{\omega k/2}$ في تمرين 34 وبين ان الدالتين هما :

$$u(x, t) = e^{-px} \sin(\omega t - px)$$

و

$$u(x, t) = e^{-px} \cos(\omega t - px)$$

ويمكن الحصول عليهما من $\phi(x - ct)$ و $\phi(x - \bar{c}t)$. (هنا $p = \sqrt{\omega/2k}$ و $\bar{c}$ هو المرافق المعقد لـ c . لاحظ 6 فصل 2 ، بند 10) .

36 . بعض المعادلات غير الخطية يمكن ان تنتج من « حلول الموجة المتحركة » $u(x, t) = \phi(x - ct)$. بين ان معادلة فشر

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} - u(1 - u),$$

لها حل بهذه الصيغة اذا حققت ϕ المعادلة التفاضلية غير الخطية

$$\phi'' + c\phi' + \phi(1 - \phi) = 0$$

37 . بيّن ان الدالة u ادناه هي حل للمسألة :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(a, t) = \sin \omega t, \quad 0 < t,$$

شريطة ان يكون $\sin(\omega a/c) \neq 0$

$$u(x, t) = \frac{\sin(\omega x/c) \sin \omega t}{\sin(\omega a/c)}.$$

38 . اذا كان $\omega = \pi c/a$ ، فإن مقام الدالة في تمرين (37) هو 0 . بين ان القيم ω هذه ، تكون الدالة (التي تحقق) معادلة الموجة والشروط الحدودية المعطاة هي :

$$u(x, t) = -ct \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi ct}{a}\right) - x \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi ct}{a}\right).$$

الفصل الرابع

معادلة الجهد .

THE POTENTIAL EQUATION

1 . معادلة الجهد :

معادلة توزيع درجة حرارة الحالة المستقرة في بعدين (لاحظ فصل 5) هي :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

والمعادلة نفسها تصف توازن ـ الزمن مستقل ـ الازاحات لغشاء ثنائي البعد ، وعليه فهي الجزء المهم المشترك في معادلتي الحرارة والموجة في بعد ثنائي وتوجد ظواهر فيزياوية اخرى ـ كجهد الجذب والجهد الكهربائي وانسياب المائع ـ وانماط مهمة من الدوال يمكن وصفها بهذه المعادلة ، مما تجعلها مهمة جداً في الرياضيات والفيزياء والهندسة . والمعادلة المشابهة لها في بعد ثلاثي هي :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

وان أياً من المعادلتين يمكن كتابتها $\nabla^2 u = 0$ وبشكل عام تسمى معادلة الجهد ، او معادلة لابلاس(Laplace's equation)

وحلول معادلة الجهد (تسمى دوال توافقية) ولها عدة صفات مهمة . والشيء المهم الذي يمكن فهمهُ بديهياً هو ما يسمى بـ القاعدة العظمى (maximum principle) ، اذا كان $\nabla^2 u = 0$ في منطقة . فأن u لا يمكن ان تكون لها قيمة عظمى او صغرى نسبية داخل المنطقة ما لم تكن u ثابتة . (وعليه ، اذا كان كل من $\partial u/\partial x$ و $\partial u/\partial y$ يساوي 0 عند نقطة ما ، فأنها تسمى نقطة سرج (saddle point) . واذا اعتبرنا u على انها دالة توزيع حرارة الحالة المستقرة في صفيحة معدنية . فمن الواضح ان درجة الحرارة لا يمكن ان تكون اكبر عند نقطة واحدة مما هي عليه في كافة النقاط المجاورة . لانه اذا حدث هذا ، فأن الحرارة تنساب من النقطة الحارة الى النقطة الباردة المجاورة ، وهذا يعني انخفاض درجة الحرارة عند النقطة الحارة . ولهذا فان درجة الحرارة سوف لا تكون متغيرة مع الزمن . وسوف نعود الى مثل هذه الحالة في البند ـ (4) .

ان مسائل القيم الحدودية الكاملة تتضمن معادلة الجهد في المنطقة زائداً الشروط الحدودية ، وهذه يمكن ان تكون في احدى حالات ثلاث هي :

$$\text{معلومة } u \quad \text{معلومة } \frac{\partial u}{\partial n} \quad (\text{او}) \quad \text{معلومة } \alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial n}$$

وحول اي مقطع من الحدود . ($\partial u/\partial n$ تعني المشتقة الاتجاهية في اتجاه عمود او عمود على الحدودية .) وعندما نجدد u حول كل الحدودية فإن المسألة تصبح مسألة دايرلت واذا حددنا $\partial u/\partial n$ حول كل الحدودية ، تصبح المسألة مسألة نيومان . حلول مسألة نيومان ليست وحيدة ، لانه اذا كان u حلاً ، فان u زائد ثابت تكون حلاً كذلك :

وعادة نعبر عن معادلة الجهد باحداثيات اخرى . ومن اهم هذه الاحداثيات هي الاحداثيات القطبية ، التي متغيراتها هي :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = r\cos\theta$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \quad y = r\sin\theta.$$

وفي العادة ، يتطلب ان يكون ، $r \geq 0$. سوف نعرف

$$u(x, y) = u(r\cos\theta, r\sin\theta) = v(r, \theta)$$

ثم نجد التعبير اللابلاسي لـ u ،

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

بدلالة v ومشتقتة باستخدام قاعدة السلسلة . الحسابات بسيطة ، ولكنها مملة . (لاحظ تمرين 7 .) . النتائج والتي هي :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos^2\theta \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta\,\partial r} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin^2\theta \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta\,\partial r} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\theta}.$$

من هذه المعادلات نجد بسهولة ان معادلة الجهد في الاحداثيات القطبية هي

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2} = 0.$$

اما في الاحداثيات الاسطوانية (r, θ, z) ، فأن معادلة الجهد هي :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0.$$

تمارين

1 . جد علاقة بين معاملات متعددة الحدود .

$$p(x, y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$$

التي تجعلها تحقق معادلة الجهد . اختر متعددة حدود معينة بحيث تحقق المعادلة وبين انه ، اذا كان $\partial p/\partial x$ و $\partial p/\partial y$ وكلاهما يساوي 0 عند نقطة ما ، فأن السطح هنالك سيكون بشكل سرج .

2 . بيّن ان $u(x, y) = x^2 - y^2$ و $u(x, y) = xy$ حلين لمعادلة لابلاس . ارسم السطح $z = u(x, y)$. ما هي الشروط الحدودية التي تحقق هذه الدوال على المستقيمات $x = 0$ ، $x = a$ ، $y = 0$ ، $y = b$ ؟

3 . اذا كان الحل لمعادلة الجهد في المربع $0 < x < 1$ و $0 < y < 1$ بالصيغة $u(x, y) = Y(y) \sin \pi x$ ، فما هي صيغة الدالة Y ؟ .
جد الدالة Y التي تجعل $u(x, y)$ تحقق الشروط الحدودية $u(x, 0) = 0$, $u(x, 1) = \sin \pi x$

4 . جد دالة $u(x)$ ، مستقلة عن y ، التي تحقق معادلة الجهد .

5 . ما هي الدوال $v(r)$ ، المستقلة عن θ ، التي تحقق معادلة الجهد بالاحداثيات القطبية ؟

6 . بين ان كلًا من $r^n \sin n\theta$ و $r^n \cos n\theta$ تحقق معادلة الجهد بصيغة الاحداثيات القطبية $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

7 . جد تعبيراً للمشتقة الجزئية لـ u بالنسبة الى x و y بدلالة مشتقات v بالنسبة الى r و θ .

8 . اذا كانت u و v المركبتين x و y لسرعة مائع ، فيمكن ان نبين (تحت بعض الشروط) ان هاتين الدالتين تحققان المعادلتين :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \text{(A)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \qquad \text{(B)}$$

بين ان تعريف دالة جهد السرعة بالمعادلتين

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\phi}{\partial y}$$

تجعل (B) متحققاً تطابقياً وتحول (A) الى معادلة الجهد .

2 . الجهد في مستطيل . POTENTIAL IN A RECTANGLE

من ابسط واشهر المسائل في الفيزياء الرياضية مسألة دايرلت في مستطيل . ولاخذ حالة بسيطة . نتأمل المسألة التي لها شرطان حدوديان غير صفريين فقط :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \tag{1}$$

$$u(x, 0) = f_1(x), \quad 0 < x < a \tag{2}$$

$$u(x, b) = f_2(x), \quad 0 < x < a \tag{3}$$

$$u(0, y) = 0, \qquad 0 < y < b \tag{4}$$

$$u(a, y) = 0, \qquad 0 < y < b. \tag{5}$$

واذا فرضنا ان $u(x, y)$ بصيغة الجداء $u = X(x)\,Y(y)$، فان المعادلة (1) تصبح :

$$X''(x)\,Y(y) + X(x)\,Y''(y) = 0.$$

وهذه المعادلة يمكن فصلها وذلك بالقسمة على $X\,Y$ والتي تؤدي الى :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}. \tag{6}$$

الشروط غير المتجانسة في المعادلتين (2) و (3) ، ليست بشكل عام ، شروطاً على X او Y ، لكن الشروط المتجانسة في المعادلتين (4) و (5) ، تتطلب كالعادة

$$X(0) = 0, \quad X(a) = 0. \tag{7}$$

والان ، فأن كلا طرفي المعادلة (6) يجب ان يكون ثابتاً ، ولكن اشارة الثابت ليست مباشرة . واذا حاولنا اخذ الثابت الموجب (لنقل μ^2) ، فأن المعادلة (6) تمثل معادلتين اعتياديتين

$$X'' - \mu^2 X = 0, \quad Y'' + \mu^2 Y = 0.$$

وتكون حلول هاتين المعادلتين هي :

$$X(x) = A \cosh \mu x + B \sinh \mu x, \quad Y(y) = C \cos \mu y + D \sin \mu y.$$

ولكي نجعل X تحقق الشروط الحدودية ، معادلة (7) ، فأن كلًا من A و B يجب ان يساوي 0 وهذا يؤدي الى الحل $u(x, y) = 0$. وعليه نحاول الاحتمال الأخر بالنسبة للاشارة ، فنأخذ طرفي معادلة (6) مساوياً لـ $-\lambda^2$.

تحت هذه الشروط الجديدة ، فأن المعادلة (6) تنفصل الى

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad Y'' - \lambda^2 Y = 0. \tag{8}$$

المعادلة الاولى ، مع الشروط الحدودية يمكن تمييزها على انها مسألة القيم الذاتية ، والتي حلها هو :

$$X_n(x) = \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2.$$

الدوال Y المرافقة لـ Xs هي :

$$Y_n(y) = a_n \cosh \lambda_n y + b_n \sinh \lambda_n y.$$

وان as و bs في الوقت الحالي غير معلومتين .

ونلاحظ ان $X_n(x)\, Y_n(y)$ هو حل لمعادلة الجهد ، والمعادلة (1) ، والتي تحقق الشروط المتجانسة في المعادلتين (4) و (5) . مجموع هذه الدوال يجب ان يحقق الشروط نفسها مع المعادلة ، لذلك فأن u تأخذ الصيغة

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cosh \lambda_n y + b_n \sinh \lambda_n y) \sin \lambda_n x. \tag{9}$$

ان الشروط الحدودية غير المتجانسة في المعادلتين (2) و (3) يجب أن تتحقق . واذا كانت u بالصيغة اعلاه ؛ فأن الشرط الحدودي في معادلة (2) يصبح

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = f_1(x), \quad 0 < x < a. \qquad (10)$$

وهذه هي سلسلة فورية المعاملات a_n يجب ان تكون معاملات فورية الجيبية لـ $f_1(x)$

$$a_n = \frac{2}{a}\int_0^a f_1(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx.$$

والشرط الحدودي الثاني هو :

$$u(x, b) = \sum_{1}^{\infty} (a_n \cosh \lambda_n b + b_n \sinh \lambda_n b) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$
$$= f_2(x), \quad 0 < x < a.$$

وهذه ايضاً مسألة سلسلة فورية . الثابت

$$a_n \cosh \lambda_n b + b_n \sinh \lambda_n b$$

يجب ان يكون معامل فورية الجيبي النوني لـ f_2 . كون a_n معلومة ، فأن b_n يمكن تحديدها باجراء الحسابات التالية :

$$a_n \cosh \lambda_n b + b_n \sinh \lambda_n b = \frac{2}{a}\int_0^a f_2(x) \sin \lambda_n x \, dx = c_n$$

$$b_n = \frac{c_n - a_n \cosh \lambda_n b}{\sinh \lambda_n b}.$$

اذا استخدمنا التعبير الاخير لـ b_n وبالتعويض في معادلة (6) ، نجد الحل :

$$u(x, y) =$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ c_n \frac{\sinh(n\pi y/a)}{\sinh(n\pi b/a)} + a_n \left[\cosh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) - \frac{\cosh(n\pi b/a)}{\sinh(n\pi b/a)} \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\right]\right\} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right). \qquad (11)$$

لاحظ ان الدالة المضروبة بـ c_n تساوي 0 عندما $y = 0$ و 1 عندما $y = b$.
كذلك الدالة المضروبة بـ a_n تساوي 1 عندما $y = 0$ و 0 عندما $y = b$. وابسط طريقة لكتابة الدالة الاخيرة هي :

$$\frac{\sinh \lambda_n(b - y)}{\sinh \lambda_n b}$$

والتي يمكن ايجادها بسهولة باستخدام متطابقات الدوال الزائدية .
دعنا نأخذ مثالاً محدداً لكي نلاحظ بوضوح كيف يكون الحل ؟ نفرض ان f_1 و f_2 بالشكل :

$$f_1(x) = f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{a}, & 0 < x < \dfrac{a}{2} \\ 2\left(\dfrac{a - x}{a}\right), & \dfrac{a}{2} < x < a. \end{cases}$$

فأن :

$$c_n = a_n = \frac{8}{\pi^2}\frac{\sin(n\pi/2)}{n^2}.$$

لذا فحل معادلة الجهد مع هذه الشروط الحدودية هو :

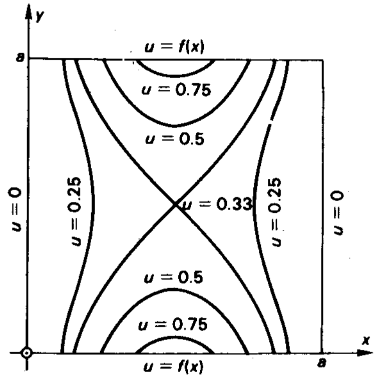
$$u(x, y) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi/2)}{n^2}\left\{\frac{\sinh[(n\pi/a)y] + \sinh[(n\pi/a)(b - y)]}{\sinh[(n\pi/a)b]}\right\} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right).$$

والشكل (1 ـ 4) هو مخطط لمنحنيات استوائية ، ثابت = $u(x, y)$ ، في الحالة عندما $a = b$.

تأمل المسألة

$$\nabla^2 u = 0, \qquad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \tag{12}$$

$$u(x, 0) = f_1(x), \quad 0 < x < a \tag{13}$$



شكل (1 ـ 4)

منحنيات استوائية لحل معادلة الجهد في مربع

$$u(x, b) = f_2(x), \quad 0 < x < a \tag{14}$$

$$u(0, y) = g_1(y), \quad 0 < y < b \tag{15}$$

$$u(a, y) = g_2(y), \quad 0 < y < b. \tag{16}$$

ليكن $u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y).$ سوف نضع شروطاً على u_1 و u_2 لكي نتمكن من ايجادهما مباشرة ، ومنهما يمكن ان نضع u . وابسط هذه الشروط هي :

$$\begin{array}{ll} \nabla^2 u_1 = 0, & \nabla^2 u_2 = 0 \\ u_1(x, 0) = f_1(x), & u_2(x, 0) = 0 \\ u_1(x, b) = f_2(x), & u_2(x, b) = 0 \\ u_1(0, y) = 0, & u_2(0, y) = g_1(y) \\ u_1(a, y) = 0, & u_2(a, y) = g_2(y). \end{array}$$

ومن المؤكد ان $u_1 + u_2$ هو حل للمسألة الاصلية في المعادلات (12) ـ (16) . كذلك ، كل من u_1 و u_2 لهُ شروط متجانسة على الحدود المتوازية . بعد ان حددنا صيغة u_1 ، فأن الدالة الاخرى تكون بالصيغة :

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \mu_n y \left[\frac{A_n \sinh \mu_n x + B_n \sinh \mu_n(a-x)}{\sinh \mu_n a}\right] \qquad (17)$$

حيث ان $\mu_n = n\pi/b$ ، وأن :

$$A_n = \frac{2}{b}\int_0^b g_2(y) \sin \mu_n y \, dy$$

$$B_n = \frac{2}{b}\int_0^b g_1(y) \sin \mu_n y \, dy.$$

ان طريقة فصل المتغيرات تعتبر ملائمة في المسائل المنفردة لـ . u_1 و u_2 لأن الشــروط على الاضلاع المتوازية للمستطيل يمكن تحويلها الى شروط على احد عوامل الدوال

تمارين

1 . بيّن ان $\sinh \lambda y$ و $\sinh \lambda(b-y)$ هما حلين مستقلين لـ $Y'' - \lambda^2 Y = 0$ وتركيب هاتين الدالتين يمكن ان يحل محل تركيب sinh و cosh كحل عام للمعادلة التفاضلية .

2 . بيّن ان حل مسألة المثال يمكن ان تكتب كالاتي :

$$u(x, y) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n^2} \frac{\cosh\left(\frac{n\pi}{a}(y - \frac{1}{2}b)\right)}{\cosh(n\pi b/2a)} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right).$$

3 . استخدم الصيغة اعلاه لحساب u في مركز المستطيل في الحالات الثلاث : $b = a$ ، $b = 2a$ ، $b = a/2$. (تلميح : تحقق من قيم الحدود)

4 . بيّن ان كل حد في المعادلة (9) هو حل للمعادلات (1) و (4) و (5) .

5 . حل المسألة

$$\begin{aligned} &\nabla^2 u = 0, && 0 < x < a, \quad 0 < y < b \\ &u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, && 0 < y < b \\ &u(x, 0) = 0, \quad u(x,b) = f(x), && 0 < x < a \end{aligned}$$

حيث f كما في المثال . ارسم بعض المنحنيات لـ $u(x, y)$

6 . بيّن ان المعادلة (17) هي حل لمسألتها (اي انها تحقق المعادلة التفاضلية الجزئية والشروط الحدودية)

7 . حل مسألة معادلة الجهد في المستطيل $0 < x < a$, و $0 < y < b$ لكل من مجموعات الشروط الحدودية الآتية :

a. $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0$; $u = 1$ on the remainder of the boundary;

b. $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(a, y) = 0$; $u(x, 0) = 0$, $u(x, b) = 1$;

c. $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0$, $u(x, b) = 0$; $u(0, y) = 1$, $u(a, y) = 0$.

8 . حل المسألة لـ u_2 . (اي ، اشتق معادلة (17)) .

3 . الجهد في شق — POTENTIAL IN A SLOT

معادلات الجهد ، بالاضافة الى معادلات الحرارة والموجة ، يمكن حلها في مناطق غير محددة . تأمل المسألة الآتية التي فيها المنطقة المشمولة هي شريط شاقولي نصفي ، او شق :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y \tag{1}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < a \tag{2}$$

$$u(0, y) = g_1(y), \quad 0 < y \tag{3}$$

$$u(a, y) = g_2(y), \quad 0 < y. \tag{4}$$

كالعادة ، نحتاج ان تبقى $u(x, y)$ مقيدة عندما $y \to \infty$

ولكي نقوم بعملية فصل المتغيرات ، يجب ان نحول هذه المسألة الى مسألتين

وباتباع النموذج نفسه في البند السابق ، نضع $u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y)$
ونطلب ان يحقق الجزئان للمسألتين القابلتين للحل :

$$\begin{array}{lll}
\nabla^2 u_1 = 0, & \nabla^2 u_2 = 0, & 0 < x < a, \quad 0 < y \\
u_1(x, 0) = f(x), & u_2(x, 0) = 0, & 0 < x < a \\
u_1(0, y) = 0, & u_2(0, y) = g_1(y), & 0 < y \\
u_1(a, y) = 0, & u_2(a, y) = g_2(y), & 0 < y.
\end{array}$$

نعالج المسألة بالنسبة لـ u_1 ، وذلك بفرض صيغة الجداء وفصل المتغيرات :

$$u_1(x, y) = X(x)\, Y(y), \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda^2.$$

اشارة الثابت $-\lambda^2$ تُحدد بالشروط الحدودية عند $x = 0$ و $x = a$ ، والتي تصبح شروطاً متجانسة على العامل $X(x)$:

$$X(0) = 0, \quad X(a) = 0 \tag{5}$$

(يمكن ملاحظة ان الشرط الواجب تحققة حول $y = 0$ يتطلب دوالاً بدلالة x التي تسمح بتمثيل الدالة الاختيارية)

الشروط الحدودية ، معادلة (5) ، مع المعادلة التفاضلية

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \tag{6}$$

التي تنتج من فصل المتغيرات ، تُشكل مسألة قيم ذاتية مشهورة والتي حلها هو :

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad \lambda_n^{\,2} = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, n = 1, 2, 3, \ldots .$$

ومعادلة Y هي :

$$Y'' - \lambda^2 Y = 0, \quad 0 < y.$$

بالاضافة الى تحقيقه المعادلة التفاضلية ، فأن Y تبقى مقيدة عندما $y \to \infty$ ان حلول المعادلة هو $e^{\lambda y}$ و $e^{-\lambda y}$. وكون الحل الاول غير مقيد ، لذلك

$$Y_n(y) = \exp(-\lambda_n y).$$

واخيراً ، يمكن ان نكتب حل المسألة الاولى بالشكل

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \exp\left(\frac{-n\pi y}{a}\right). \tag{7}$$

الثوابت a_n تُحدد من الشرط عند $y = 0$.

اما حل المسألة الثانية فأنهُ يختلف بعض الشيء . مرة اخرى نبحث عن حلول صيغة الجداء $u_2(x, y) = X(x)\, Y(y)$. الشرط الحدودي المتجانس عند $y = 0$ وشروط الحدود تصبح شروطاً على $Y(y)$:

$Y(y)$ مقيدة عندما $y \to \infty$ و $Y(0) = 0,$

عندئذ تصبح معادلة الجهد

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0, \tag{8}$$

وكلا النسبتين يجب ان تكونا ثابتتين اذا كانت Y''/Y موجبة ، فان قوة الشروط المساعدة Y تساوي 0 . لذلك ، نأخذ $Y''/Y = -\mu^2$ او $Y'' + \mu^2 Y = 0$ ثم نجد ان الحل الذي يحقق الشروط المساعدة هو

$$Y(y) = \sin \mu y,$$

لاي $\mu > 0$. والحل العام للمعادلة $X''/X = \mu^2$ هو :

$$X(x) = A\,\frac{\sinh \mu x}{\sinh \mu a} + B\,\frac{\sinh \mu(a - x)}{\sinh \mu a}.$$

اخترنا هذه الصيغة الخاصة من خبرتنا في حل معادلة الجهد في المستطيل . كون μ وسيط مستمر ، فنربط حلول الجداء بدلالة التكامل ، لنجد

$$u_2(x, y) = \int_0^{\infty} \left[A(\mu)\,\frac{\sinh \mu x}{\sinh \mu a} + B(\mu)\,\frac{\sinh \mu(a - x)}{\sinh \mu a}\right] \sin \mu y \, d\mu. \tag{9}$$

والشروط الحدودية غير المتجانسة عند $x = 0$ و $x = a$ تتحقق اذا كان

$$u_2(0, y) = \int_0^\infty B(\mu) \sin \mu y \, d\mu = g_1(y), \quad 0 < y$$

$$u_2(a, y) = \int_0^\infty A(\mu) \sin \mu y \, d\mu = g_2(y), \quad 0 < y.$$

وببساطة فان هاتين المعادلتين هما مسألتان تكامل فوريه ، وبهذا نستطيع ان نحدد المعاملات $A(\mu)$ و $B(\mu)$.

ومعادلة الجهد يمكن حلها في الشريحة $(0 < x, \; -\infty < y < \infty)$ ربع مستوى $(0 < x, \; 0 < y)$ ، او نصف مستوى $(0 < x \; -\infty < y < \infty)$ حول كل خط حدودي وذلك بفرض الشرط الحدودي ، اما الحل فيتطلب ان يبقى مقيداً في قطعة من المنطقة . عموماً ، تكامل فوريه يستعمل في الحل ، لان ثابت الفصل هو وسيط مستمر ، كما في المسألة الثانية هنا .

تمارين

1 . جد صيغة للثوابت a_n في معادلة (7) .

2 . بين ان $u_1(x, y)$ في الصيغة المعطاة في معادلة (7) تحقق معادلة الجهد والشروط الحدودية المتجانسة .

3 . جد صيغ لـ $A(\mu)$ و $B(\mu)$ للمعادلة (9) .

4 . بين انه ، اذا كان ثابت الفصل قد تم اختياره مثل $-\mu^2$ بدلا من μ^2 في حل u_2 (يؤدي الى $Y'' - \mu^2 Y = 0$). فان الدالة الوحيدة التي تحقق المعادلة التفاضلية ، تحقق الشرط $Y(0) = 0$ وتبقى مقيدة عندما $y \to \infty$ ، هي $Y(y) \equiv 0$

5 . جد الحل للمسألة المعطاة في هذا البند ، افرض ان $f(x) = 0$, $g_1(y) = 0,$ $g_2(y) = e^{-y}$.

6 . بين ان $u(x, y) = x$ هو الحل لمعادلة الجهد في شق تحت الشروط الحدودية ، $f(x) = x,$ $g_1(y) = 0$, $g_2(y) = a$ هل يمكن ايجاد هذا الحل بالطريقة التي اعطيت في هذا البند ؟

7 . حل مسألة الجهد في شق تحت الشروط الحدودية

$$u(x, 0) = 1, \quad u(0, y) = u(a, y) = e^{-y}.$$

8 . بين ان الدالة $v(x, y)$ التي ادناه تحقق معادلة الجهد والشروط الحدودية على وصول الجوانب في تمرين 7 ، شريطه ان يكون $\cos(a/2) \neq 0$

$$v(x, y) = \frac{\cos(x - \frac{1}{2}a)}{\cos(\frac{1}{2}a)} e^{-y}$$

ما هي المعادلة التفاضلية الجزئية والشروط الحدودية التي تتحقق بـ $w(x, y) = u(x, y) - v(x, y)$ ، اذا كانت u هي الدالة في تمرين 7 ؟

9 . حل معادلة الجهد في الشق $0 < y < b, \; 0 < x$ لكل من مجموعات الشروط الحدودية ادناه :

a. $$u(0, y) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < a \\ 0, & a < x \end{cases}$$

b. $$u(0, y) = 0, \quad u(x, 0) = e^{-x}, \quad u(x, b) = 0.$$

10 . جد حلول الجداء لمسألة الجهد في الشريط :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad -\infty < y < \infty$$

نسبة الى شروط التقييد ، فان $u(x, y)$ تكون مقيدة عندما $y \to \pm\infty$

11. حل مسألة الجهد التي تتكون من المعادلة والشروط الحدودية من تمرين 10 والشروط الحدودية :

$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = e^{-|y|}, \quad -\infty < y < \infty.$$

12 . بين كيف نحل مسألة الجهد في تمرين (10) مع الشروط الحدودية

$$u(0, y) = g_1(y), \quad u(a, y) = g_2(y), \quad -\infty < y < \infty,$$

حيث ان g_1 و g_2 دالتان مناسبتان .

13 . جد حلول الجداء لمسألة الجهد في ربع مستوي :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad 0<x, \quad 0<y$$

$$u(0, y)=0, \quad u(x, 0)=f(x).$$

لاحظ ان $u(x, y)$ تبقى مقيدة عندما $x \to \infty$ او عندما $y \to \infty$

14 . حل معادلة الجهد في ربع مستوي $x>0, y>0$ ، بموجب الشروط الحدودية الاتية :

$$u(0, y)=e^{-y}, \quad y>0; \quad u(x, 0)=e^{-x}, \quad x>0.$$

15 . جد حلول الجداء لمعادلة الجهد في نصف مستوي $y>0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad -\infty<x<\infty, \quad 0<y<\infty$$

$$u(x, 0)=f(x), \quad -\infty<x<\infty.$$

ما هي شروط التقييد التي يجب ان تحققها الدالة $u(x, y)$

16 . حل المسألة في تمرين (15) اذا كانت الدالة الحدودية هي :

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<a, \\ 0, & |x|>a.\end{cases}$$

4 . الجهد في قرص POTENTIAL IN A DISK

اذا اردنا حل معادلة الجهد في قرص دائري $x^2+y^2<c^2$ فمن الطبيعي ان نستخدم الاحداثيات القطبية r, θ التي بدلالتها يوصف القرص بـ $0<r<c$ ان مسألة دايرلت في القرص هي :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}=0, \qquad 0<r<c, \quad -\pi<\theta\le\pi \tag{1}$$

$$v(c,\theta)=f(\theta), \quad -\pi<\theta\le\pi. \tag{2}$$

وكون θ, $2\pi+\theta$ تمثل الزاوية نفسها . فسوف نقيد θ في الفترة من $-\pi$ الى π . من الناحية الاخرى ، الشعاع $\theta=\pi$ ليس « حدودياً » بالمعنى الذي نستخدمه ، لان المجال الخارجي لا يؤثر على v في ت تلك النقطة . ولكي نضمن أن اعطاء حدودية كاذبة لا يؤدي الى الانقطاع في v وكذلك مشتقاتها ، نحتاج الى :

$$v(r,\pi)=v(r,-\pi), \qquad 0<r<c$$

$$\frac{\partial v}{\partial\theta}(r,\pi)=\frac{\partial v}{\partial\theta}(r,-\pi), \quad 0<r<c.$$

وسوف نسمح لـ θ لتأخذ اية قيمة ولكن $v(r,\theta)$ $f(\theta)$ يجب ان تكون دورية في θ بدورة قدرها 2π

وبفرض $v(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$ يمكن ان نفصل المتغييرات . وبهذا تصبح معادلة الجهد

$$\frac{1}{r}(rR')'\Theta+\frac{1}{r^2}R\Theta''=0.$$

وبالقسمة على $R\Theta/r^2$ ، يصبح الفصل فعالاً :

$$\frac{r(rR'(r))}{R(r)}+\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}=0.$$

الشرط الحدودي في معادلة (2) يجب ان يتحقق بالتركيب الخطي للحلول ولذلك نختار $\Theta''/\Theta=-\lambda^2$. والشرطان (3) و (4) يصبحان شرطين لـ Θ . والمسائل المنفردة للدالتين R و Θ هي

$$\Theta''+\lambda^2\Theta=0, \qquad -\pi<\theta\le\pi \tag{5}$$

$$\Theta(-\pi)=\Theta(\pi) \tag{6}$$

$$\Theta'(-\pi)=\Theta'(\pi) \tag{7}$$

$$r(rR')'-\lambda^2 R=0, \qquad 0<r<c. \tag{8}$$

واذا كانت $\lambda \neq 0$ فان الحل العام للمعادلة (5) هو :

$$\Theta(\theta) = A\cos\lambda\theta + B\sin\lambda\theta. \tag{9}$$

واذا كتبنا المعادلتين (6) و (7) بدلالة الدالة Θ للمعادلة (9) وباستخدام خواص الجيب وجيب التمام ، يكون لدينا :

$$A\cos\lambda\pi - B\sin\lambda\pi = A\cos\lambda\pi + B\sin\lambda\pi$$

$$\lambda A\sin\lambda\pi + \lambda B\cos\lambda\pi = -\lambda A\sin\lambda\pi + \lambda B\cos\lambda\pi.$$

وباجراء بعض التحويرات البسيطة ، تصبح المعادلتين

$$B\sin\lambda\pi = 0, \quad \lambda A\sin\lambda\pi = 0.$$

وان كلاً من A و B لا تساوي 0 ، لان ذلك يؤدي الى $\Theta(\theta)\ 0$ ، لذلك ، يكون $\sin\lambda\pi = 0$ $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$. اذا كانت $\lambda = 0$ فان المعادلة (5) تصبح $\Theta'' = 0$. وحلها العام هو $\Theta = A + B\theta$ الشرطان (6) و (7) يتطلبان ان يكون $B = 0$ واحتمالية الحصول على حلول غير صفرية للمعادلتين (5) و (7) هو :

$$\lambda = 0, \qquad \Theta = 1$$

$$\lambda = 1, 2, 3, \ldots, \quad \Theta = \cos\lambda\theta \quad \text{or} \quad \sin\lambda\theta.$$

والان وجدنا ان القيمة الذاتية $\lambda^2 = 0$ تقابل الدالة الذاتية $\Theta = 1$ (ثابت) ، وان القيم الذاتية $\lambda_n^2 = n^2$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ كل منهما تقابل دالتين ذاتيتين مستقلتين : $\cos n\theta$ and $\sin n\theta$ و

وبعد ان عرفنا ان $\lambda_n^2 = n^2$، فمن السهولة ان نجد $R(r)$. وبهذا فان المعادلة لاجل R تصبح :

$$r^2R'' + rR' - n^2R = 0, \quad 0 < r < c$$

حيث ان الاشتقاقات المؤشرة قد أنجزت.

هذه هي معادلة كوشي – اويلر (Cauchy–Euler equation) ، والتي حلولها تأخذ الصيغة $R(r) = r^\alpha$، حيث α ثابت . وبالتعويض $R = r^\alpha$، $R' = \alpha r^{\alpha-1}$، $R'' = \alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}$ وفي المعادلة نحصل على :

$$(\alpha(\alpha - 1) + \alpha - n^2)r^\alpha = 0, \quad 0 < r < c.$$

وكون r^α لا تساوي 0 ، فان العامل الثابت داخل القوسين يجب ان يساوي 0 – اي ان $\alpha = \pm n$، الحل العام للمعادلة التفاضلية هو اي تركيب من r^n و r^{-n} . الاخير ، غير مقيد عندما تقرب r من 0 ، لذلك سوف نتخلى عن هذا الحل ، عن هذا الحل ، ونحتفظ بـ $R_n(r) = r^n$. في حالة خاصة عندما $n = 0$، فان الحلين هما الدالة الثابتة 1 و $\ln r$. سوف نتخلى عن اللوغارتم بسبب سلوكهِ عندما $r = 0$.

الان نجمع حلنا ، فان جميع الدوال

$$r^0 \cdot 1 = 1, \quad r^n \cos n\theta, \quad r^n \sin n\theta$$

هي حلول لمعادلة الجهد ، لذلك ، فان التركيب الخطي العام لهذه الحلول سيكون حلًا ايضاً . وبهذا ، فان $v(r, \theta)$ يمكن ان يأخذ الصيغة

$$v(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^n \sin n\theta. \qquad (10)$$

عند الحدودية $r = c$ ، الشرط الحدودي هو

$$v(c, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c^n(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) = f(\theta), \quad -\pi < \theta \leq \pi.$$

هذه هي مسألة سلسلة فوريه ، تم حلها باختيار :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, d\theta,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi c^n}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta\, d\theta, \quad b_n = \frac{1}{\pi c^n}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta\, d\theta. \qquad (11)$$

وكمثال ، تأمل المسألة المتكونة من معادلة الجهد في قرص ، معادلة (1) بشروط حدودية .

$$v(c, \theta) = f(\theta) = \begin{cases} 0, & -\pi < \theta < \frac{-\pi}{2}, \\ 1, & \frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} < \theta < \pi. \end{cases}$$

الحل هو كما في معادلة (10) ، شريطة ان يتم اختيار المعاملات حسب المعادلة (11) . وكون $f(\theta)$ هي دالة زوجية ، $b_n = 0$ ، وان

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)d\theta = \frac{1}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi c^n}\int_0^{\pi} f(\theta)\cos n\theta\, d\theta = \frac{2\sin(n\pi/2)}{n\pi^2 c^n}$$

لذلك ، فان حل المسألة هو :

$$v(r,\theta) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin(n\pi/2)}{n\pi^2}\frac{r^n}{c^n}\cos n\theta.$$

الان وبعد ان حصلنا على صيغة للمعادلة (10) لحل معادلة الجهد ، يمكن ان نلاحظ بعض الخواص الهامة للدالة $v(r, \theta)$. بشكل خاص ، عند فرض $r = 0$ فنحصل على

$$v(0,\theta) = a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(c,\theta)\, d\theta.$$

وهذا يعني ان حل معادلة الجهد في مركز القرص يساوي معدل القيم عند حافات القرص . ومن السهولة ان نبيِّن ان :

$$v(0,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(r,\theta)\, d\theta \qquad (12)$$

لاي r بين 0 و c ! وهذا النوع من حلول معادلة الجهد يسمى خاصية القيمة الوسطى (*mean value property*) . ومن خاصية القيمة الوسطى ، تبقى خطوة واحدة لبرهان مبدأ الاعظمية الذي عرضناهُ في البند الاول حول القيمة الوسطى للدالة الواقعة بين القيم الصغرى والعظمى ، والتي لا تساوي أياً منهما ما لم تكن الدالة ثابتة .

ومن النتائج المهمة لمبدأ الاعظمية ــ وكذلك لخاصية القيمة الوسطى ــ هو برهان الوحدانية لحل مسألة دايرلت . افرض ان u و v هما الحل لمعادلة الجهد في منطقة R وان لهما القيم نفسها على الحدود R ، فان الفرق بينهما $w = u - v$ هو ايضاً حل لمعادلة الجهد في R ولهُ قيمة 0 حول الحدود R . وباستخدام مبدأ الاعظمية ، فان w لها قيم صغرى وعظمى 0 ، وبهذا فان $w \equiv 0$ خلال R . اي ان $u \equiv v$

تمارين

1 . حل معادلة الجهد في القرص $0 < r < c$ اذا كان الشرط الحدودي هو

$$v(c, \theta) = |\theta|, \ -\pi < \theta \le \pi.$$

2 . اعد التمرين (1) بفرض ان $v(c, \theta) = \theta$ ، $-\pi < \theta < \pi$. هل ان الشرط الحدودي يتحقق عند $\theta = \pm\pi$ ؟

3 . احسب قيمة الحل لمعادلة الجهد عند $r = 0$ للحالات المعطاة في التمرينين (1) و (2) .

4 . تحقق من صحة معادلة (12) وذلك بأخذ تكامل السلسلة في معادلة (10) حداً ـ بعد ـ حد .

5 . اذا كانت الدالة $f(\theta)$ في معادلة (2) مستمرة ، ملساء قطعياً ، وتحقق $f(-\pi+) = f(\pi-)$ ، فماذا يمكن القول حول تقارب السلسلة لاجل $v(c, \theta)$ ؟

6 . بين ان :

$$v(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

هو حل لمعادلة لابلاس في المنطقة $r > c$ (خارج القرص) ولها الخاصية وهي ان $|v(r, \theta)|$ مقيدة عندما $r \to \infty$.

7 . اذا كان $v(c, \theta) = f(\theta)$ ، فما هي الصيغ لـ as و bs في تمرين 6 ؟

8 . الحل للمعادلات (1) ـ (4) يمكن كتابتة في صيغة واحدة باستخدام الخواص الاتية :

a . استبدل θ بـ ϕ في معادلة (11) لـ as و bs .

b . استبدل as و bs في معادلة (10) بالتكاملات في فرع **(a)**

c . استخدم المتطابقة المثلثية .

$$\cos n\theta \cos n\phi + \sin n\theta \sin n\phi = \cos n(\theta - \phi);$$

d. خذ التكامل خارج السلسلة

e. اجمع السلسلة (لاحظ فصل (1) بند (10) تمرين 1) . عندئذ $v(r, \theta)$ تعطى بالتكامل الوحيد (صيغة تكامل بوسون) .

$$v(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) \frac{c^2 - r^2}{c^2 + r^2 - 2rc\cos(\theta - \phi)}\, d\phi.$$

9 . حل معادلة لابلاس في القطاع(sector) $0 < \theta < \pi/2$ ، $0 < r < c$ ، بموجب الشروط الحدودية $v(r, 0) = 0$ ، $v(r, \pi/2) = 0$ ، $v(c, \theta) = 1$.

10 . عمم النتائج في تمرين (9) وذلك بحل هذه المسألة :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0, \quad 0 < \theta < \alpha\pi, \quad 0 < r < c$$

$$v(r, 0) = 0, \quad v(r, \alpha\pi) = 0, \quad 0 < r < c,$$

$$v(c, \theta) = f(\theta), \quad 0 < \theta < \alpha\pi.$$

حيث α هي وسيط بين 0 و 2 .

11 . افرض ان $\alpha > 1$ في تمرين 10 . بين انهُ يوجد حل الجداء بالخاصية $\frac{\partial v}{\partial r}(r, \theta)$ ليست مقيدة عندما $r \to 0+$.

12 . بدلاً من تقييد θ بالفترة $-\pi < \theta \leq \pi$ وفرض الشرطين (3) و (4) ، نعتبر θ غير مقيدة وتتطلب ان تكون $v(r, \theta)$ دورية بدورة 2π . بيّن ان فصل المتغيرات يؤدي الى مسألة القيم الذاتية :

$$\Theta'' + \lambda^2\Theta = 0$$

$$\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$$

بدلاً من المعادلات (5) و (6) و (7) . كذلك بيّن ان مسألتي القيم الذاتية لهما الحلول نفسها .

5. تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية وتحديد طريقة الجداء :

CLASSIFICATION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS AND LIMITATIONS OF THE PRODUCT METHOD

لحد الان ، لاحظنا مجموعة من المعادلات والحلول . وركزنا على ثلاث معادلات متجانسة مختلفة (الحرارة ، الموجه والجهد) التي يمكن تلخيص مزاياها النوعية بالجدول الآتي :

المعادلة	السلوك
الحرارة	سلوك اسي في الزمن . وجود حل (حالة الاستقرار) محدود مخطط بياني املس عند $t > 0$.
الموجة	سلوك تذبذب في الزمن (ولا يكون دورياً دائماً) . والحفاظ على الانقطاع عند $t > 0$.
الجهد	سطح املس ، مبدأ الاعظمية . خاصية القيمة الوسطى .

هذه المعادلات الثلاثة ذات المتغييرين تعتبر من اهم التمثيلات لثلاثة انواع من معادلات تفاضلية جزئية خطية من المرتبة الثانية بمتغيرين . والمعادلة العامة التي تلائم هذا الوصف هي :

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + D\frac{\partial u}{\partial \xi} + E\frac{\partial u}{\partial \eta} + Fu + G = 0$$

حيث A ، B ، C ... الخ هي دوال بدلالة ξ و η بشكل عام . استخدمنا الحروف الاغريقية للمتغيرات المستقلة لتجنب علاقات الفضاء او الزمن . معادلة كهذه يمكن تصنيفها حسب اشارة $B^2 - 4AC$:

قطع ناقص $\quad B^2 - 4AC < 0$

قطع مكافيء $\quad B^2 - 4AC = 0$

قطع زائد $\quad B^2 - 4AC > 0$

وكون A ، B و C هي دوال بدلالة ξ و η (وليس u) ، فان تصنيف المعادلة يمكن ان يتغيير من نقطة الى نقطة . ومن السهولة ان نلاحظ ان معادلة الحرارة هي قطع مكافيء ، ومعادلة الموجة هي قطع زائد ، ومعادلة الجهد هي قطع ناقص . ان تصنيف المعادلة يحدد طبيعة الحل ويرشدنا الى الطريقة التي نستخدمها عندما نستخدم التكنيك العددي للحصول على الحل .

والسؤال الذي يطرح نفسهُ فيما اذا كانت طريقة فصل المتغييرات تعمل على جميع المعادلات . الجواب كلا . فمثلاً ، المعادلة :

$$(\xi + \eta^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$$

لا يمكن حلها بطريقة فصل المتغييرات . بشكل عام ، ومن الصعوبة ان نحدد بالضبط المعادلات التي يمكن حلها بهذه الطريقة . من الناحية الاخرى ، فانه من الضروري ان يكون لدينا $B \equiv 0$.

المنطقة التي نجد فيها الحل تقيد تطبيق الطريقة المراد استخدامها ، والتي يجب ان تكون مستطيلاً عاماً . بهذا نعني ان المنطقة مقيدة بمنحينات الاحداثيات لمنظومة الاحداثيات للمعادلة التفاضلية الجزئية . نضع طريقة اخرى ، المنطقة يمكن وصفها بمتباينات على الاحداثيات ، والتي نهاياتها ثابتة . فمثلاً ، استخدمنا مناطق توصف بمجموعة المتباينات الاتية :

$$0 < x < a, \quad 0 < t$$

$$0 < x, \quad 0 < t$$

$$-\infty < x < \infty, \quad 0 < t$$

$$0 < x < a, \quad 0 < y < b$$

$$0 < r < c, \quad -\pi < \theta \leq \pi.$$

كل هذه مستطيلات عامة ، لكن احدهما مستطيل اعتيادي . والمنطقة التي بالشكل L ليست مستطيلاً عاماً ، والطرق التي نستخدمها سوف تصح اذا طبقت على معادلة الجهد ، على سبيل المثال .

يوجد ، كما نعلم ، قيود على الشروط الحدودية . والتي يمكن السيطرة عليها . من الامثلة التي عرضت في هذا الفصل فنجد بوضوح اننا نحتاج لشروط متجانسة او

« شبه متجانسة » للطرف الأخر من المستطيل العام . الامثلة حول الشروط « شبه المتجانسة » هي الشروط التي تجعل الدالة تبقى مقيدة عندما تعتبر بعض المتغيرات من ∞ ، او « الشروط الدورية » عند $\theta = \pm\pi$ (لاحظ بند 4)
اذا كانت دالتان او اكثر تحقق الشروط ، فان حاصل جمعهما يحقق الشروط ايضاً .

بالرغم من اننا نحدد طريقة فصل المتغيرات ، فانها تسري على عدة مسائل مهمة بمتغيرين او اكثر وتزودنا بمعلومات عن طبيعة الحلول . بالاضافة الى ذلك ، من المعروف انه في مثل هذه الحالات التي نستعمل فيها طريقة فصل المتغيرات ، فاننا نجد الحل اذا كان موجوداً .

تمارين

1 . صف المعادلات الاتية :

a . $$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

b . $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2x$$

c . $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2u$$

d . $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

e . $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

2 . بين انه ، في الاحداثيات القطبية ، الطوق ، القطاع وقطاع الطوق كلها مستطيلات عامة .

3 . في اي من المعادلات في تمرين (1) يمكن فصل المتغييرات ؟

4 . ارسم المناطق المعطاة في متن الكتاب على انها مستطيلات عامة .

5 . حل المسائل الثلاث الاتية وقارن الحلول .

a.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < y$$
$$u(x, 0) = f(x), \qquad 0 < x < 1$$
$$u(0, y) = 0, \qquad u(1, y) = 0, \quad 0 < y$$

b.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < y$$
$$u(x, 0) = f(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1$$
$$u(0, y) = 0, \qquad u(1, y) = 0, \quad 0 < y$$

c.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < y$$
$$u(x, 0) = f(x), \qquad 0 < x < 1$$
$$u(0, y) = 0, \qquad u(1, y) = 0, \quad 0 < y$$

6 . بين انه اذا كانت $f_1, f_2, \cdots$ تحقق الشروط الحدودية الدورية
$$f(-\pi) = f(\pi), \quad f'(-\pi) = f'(\pi)$$
فان الدالة $c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots$ تحققها كذلك ، حيث cs ثوابت .

6 . تعليقات ومصادر

COMMENTS AND REFERENCES

بينما تصف معادلة الجهد عدة ظواهر فيزياوية توجد ظاهرة واحدة تجعل حل مسألة دايرلت سهلة التخيل . افرض ان قطعة من سلك قد تم انحناؤها على شكل منحن مغلق او اطار . وعندما يوضح الاطار على سطح مستو ، فان مسقطه هو منحن مستو C يحيط بالمنطقة R . واذا صغنا فلماً في اطار ، وارتفاع الفلم $u(x, y)$ فوق مستوي السطح هو دالة تحقق معادلة الجهد ، عندما نهمل الجاذبية (لاحظ فصل 5) . فان ارتفاع الاطار فوق المنحني C يعطي الشرط الحدودي على u . فمثلاً الشكل (2 ـ 4) يبين السطح المقابل للمسألة التي تم حلها في بند 2 . (المنحنيات الاستوائية لهذا السطح مبينة في الشكل 1 ـ 4 .)

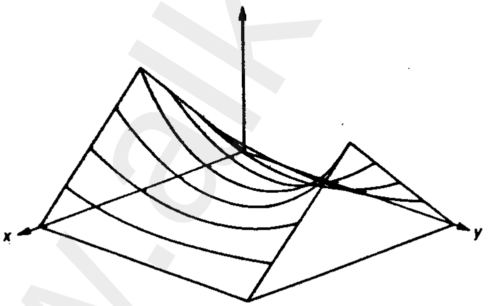
نستنتج ان افضل طريقة لدراسة معادلة الجهد (ليس كل معادلات القطع الناقص) هي استخدام الاعداد المعقدة . العدد المعقد يمكن ان يكتب بالشكل $z = x + iy$ ، حيث ان x ، y عددان حقيقيان وان $i^2 = -1$ وبالمثل دالة z تعرف بـ $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ، u ، v دالتان حقيقيان بمتغييرات حقيقية . اذا كانت f مشتقة بالنسبة z فان كلاً من u و v تحقق معادلة الجهد . من الأمثلة البسيطة ، متعددة الحدود والدوال الاسية تؤدي الى حلول مشهورة :

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y.$$

وكتاب " *Advanced Engineering Mathematics* " تاليف Neil ، 1983 ، يشمل عرضاً كاملاً للتحليل المعقد . وتطبيقات على معادلة الجهد وحقولاً اخرى في الرياضيات التطبيقية وتجدها في الفصلين (18) و (19) .

ان كتاب " *Maximum Principles in Differential Equations* " تاليف Protter و Weinberger ، 1984 فانه يقدم دراسة رائعة لمبدأ الاعظمية لمعادلة الجهد ومعادلات تفاضلية جزئية اخرى .



شكل (2 ـ 4) حل مسألة دايرلت كسطح فوق المستوي

تمارين متنوعة

1 . حل معادلة الجهد في المستطيل $0 < x < a$ و $0 < y < b$، بالشروط الحدودية :

$$u(0, y) = 1, \quad u(a, y) = 0, \quad 0 < y < b$$
$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = 0, \quad 0 < x < a.$$

2 . اذا كان $a = b$ في تمرين (1) فان $u(a/2, a/2) = 1/4$ استخدم التناظر لشرح هذه الحقيقة .

3 . حل معادلة الجهد في المستطيل $0 < x < a$ و $0 < y < b$ بالشروط الحدودية :

$$u(0, y) = 1, \quad u(a, y) = 1, \quad 0 < y < b$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, b) = 0, \quad 0 < x < a.$$

4 اعد التمرين (3) ، ولكن بشرط حدودية هي :

$$u(0, y) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = 0, \quad 0 < y < b$$
$$u(x, 0) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial v}(x, b) = 0, \quad 0 < x < a.$$

5 . اعد التمرين (3) ، ولكن بشروط حدودية هي :

$$u(0, y) = 1, \quad u(a, y) = 1, \quad 0 < y < b$$
$$\frac{\partial u}{\partial v}(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = 0, \quad 0 < x < a.$$

6 . اعد التمرين (3) ، ولكن بشروط حدودية هي :

$$u(0, y) = 1, \quad u(a, y) = 0, \quad 0 < y < b$$
$$u(x, 0) = 1, \quad u(x, b) = 0, \quad 0 < x < a.$$

7 . اعد التمرين (3) ، لكن المنطقة هي مربع $(b = a)$ وان الشروط الحدودية هي :

$$u(0, y) = f(y), \quad u(a, y) = 0, \quad 0 < y < a$$
$$u(x, 0) = f(x), \quad u(x, a) = 0, \quad 0 < x < a,$$

حيث f هي دالة مخططها مثلث متساوي الساقين ارتفاعه h وقاعدته a .

8 . حل معادلة الجهد في المنطقة $0 < y$ ، $0 < x < a$ ، بالشروط الحدودية :

$$u(x, 0) = 1, \qquad 0 < x < a$$
$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \quad 0 < y.$$

9 . جد حل معادلة الجهد على الشريط $0 < y < b$ ، $-\infty < x < \infty$. وفقاً للشروط ادناه . اعط شروط التقييد كلما كان ذلك ضرورياً

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & -a < x < a \\ 0, & -a < |x| \end{cases}$$
$$u(x, b) = 0, \quad -\infty < x < \infty$$

10 . احصل على صيغة لحل معادلة الجهد في النصف العلوي من المستوي

11 . حل المسألة في تمرين (10) أخذاً

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y$$
$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

11 . حل المسألة في تمرين (10) أخذاً $f(x) = \exp(-\alpha|x|)$.

12 . حَور الحل في تمرين (10) الى الصيغة ادناه . لاحظ تمرين (8) بند 4 وبند 11 فصل 2 .)

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \frac{y}{y^2 + (x - x')^2} dx'$$

13 . استخدم الصيغة في تمرين (12) في الحالة التي يكون فيها $f(x) \equiv 1,$
$-\infty < x < \infty$

14 . بين ان الدالة$u(x, y)=\tan^{-1}(y/x)$هي حل لمعادلة الجهد في الربع الاول .
ماهي الشروط التي تحققها u حول الاشعاعات$x = 0$ ،
$y > 0$ و $x > 0, y = 0$

15 . حل معادلة الجهد في قرص نصف قطرة c بالشرط الحدودي

$$u(c, \theta) = \begin{cases} 1, & 0 < \theta < \pi \\ 0, & -\pi < \theta < 0. \end{cases}$$

16 . ماهي قيمة u في مركز القرص ، في تمرين (15) ؟

17 . اعد التمرين 16 ، ولكن بالشرط الحدودي ،
$u(c, \theta) = |\sin \theta|.$

18 . اذا كانت معادلة الجهد لطوق حلقي هي ،

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad a < r < b,$$

بين ان حلول الجداء هو بالصيغة ،

$$r^n(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) + r^{-n}(C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta)$$

او ، $A + B \ln r.$

19 . حل مسألة الجهد لطوق حلقي كما معرف في تمرين (18) للشروط حدودية

$$u(a, \theta) = 1, \quad u(b, \theta) = 0.$$

20 . جد حلول الجداء لمعادلة الجهد على قطاع القرص بشروط حدودية تساوي 0 على حافاته المستقيمة

$$\nabla^2 u = 0, \quad 0 \le r < c, \quad 0 < \theta < \alpha$$
$$u(r, 0) = 0, \quad u(r, \alpha) = 0$$

21 . حل مسألة الجهد في قرص له شق ،

$$\nabla^2 u = 0, \qquad 0 \le r < c, \quad 0 < \theta < 2\pi$$
$$u(r, 0) = 0, \qquad u(r, 2\pi) = 0$$
$$u(r, \theta) = f(\theta), \quad 0 < \theta < 2\pi.$$

22 . بين ان الدالة $u(x, y) = \sin(\pi x/a)\sinh(\pi y/a)$ تحقق مسألة الجهد

$$\nabla^2 u = 0, \qquad 0 < x < a, \quad 0 < y$$
$$u(0, y) = 0,\ u(a, y) = 0, \quad 0 < y$$
$$u(x, 0) = 0, \qquad 0 < x < a.$$

يحذف هذا الحل اذا تطلب ان تكون $u(x, y)$ مقيدة عندما $y \to \infty$.

23 . جد العلاقة بين معاملات متعددة الحدود

$$p(x, y) = A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2$$

بحيث تحقق المعادلة غير المتجانسة

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -1.$$

24 . جد متعددة الحدود $p(x, y)$ التي تحقق المعادلة التفاضلية الجزئية في تمرين (23) وكذلك الشروط الحدودية

$$p(x, 0) = 0, \quad p(x, b) = 0.$$

25 . حل مسائل القيم الحدودية الاتية ،

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -1, \qquad 0 < x < a, \quad 0 < y < b$$
$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = 0, \quad 0 < x < a$$
$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \quad 0 < y < b.$$

26 . المعادلة التي بالصيغة $\nabla^2 u = -f$ حيث f هي دالة لفضاء المتغييرات ، تسمى معادلة بوسون . (لاحظ التمارين 23 ـ 25 .) عندما يعتمد F على متغير واحد فقط ، فمن االسهولة ايجاد الحل . حل هذه المسائل بالاحداثيات القطبية ،

$$\nabla^2 u = -1 \qquad .a$$

$$\nabla^2 u = -\frac{1}{x^2 + y^2} \qquad .b$$

27 . مائع يشغل نصف مستوي $y > 0$ وينساب ماراً (من اليسار الى اليمين ، تقريبياً) . بمحاذاة صفيحة ثبتت قرب محور x - . اذا كانت مركبتا x و y للسرعة هي $U_0 + u(x, y)$ ، و $v(x, y)$ على التوالي ($U_0 =$ سرعة السيل الثابتة) تحت بعض الشروط ، فإن معادلات الحركة ، الاستمرارية ، وحالة المائع يمكن ان تكتب بالشكل

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (1 - M^2)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

تتحقق لكل x و$y > 0$. M هو عدد مائع للسيل الطليق . نعرف جهد السرعة بالمعادلتين$u = \partial\phi/\partial x$ ، $v = \partial\phi/$. بين ان المعادلة الاولى تتحقق مباشرة ، والثانية هي معادلة تفاضلية جزئية ناقصية اذا كان $M < 1$ وزائدية اذا كان $M > 1$.

28 . اذا كان لدينا صفيحة متموجة معادلتها هي $y = \epsilon \cos \alpha x$ ، فإن الشروط الحدودية والتي فيها سرعة المتجه موازية للجدار ، هي

$$v(x, \epsilon \cos \alpha x) = -\epsilon\alpha \sin \alpha x(U_0 + u(x, \epsilon \cos \alpha x)).$$

من المستحيل استخدام هذه المعادلة ، لذلك نستبدلها بـ

$$v(x, 0) = -\epsilon \; U_0 \sin \alpha x$$

بفرض ان ϵ صغيرة و u اصغر بكثير من U_0 . استخدم هذا الشرط الحدودي ، والشرط $u(x, y) \to 0$ عندما $y \to \infty$ ، لصياغة حل مسائل القيم الحدودية الكاملة لـ ϕ ، بفرض $M < 1$

29 . باستخدام مبدأ التطابق للحلول (α من 0 الى ∞) جد الانسياب المار بمحاذاة جدار معادلته هي $y = f(x)$. (تلميح : استخدم الشرط الحدودي

$$v(x, 0) = U_0 f'(x) = \int_0^\infty [A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x] \, d\alpha.)$$

30 . في ديناميك الموائع ، متجه السرعة في مائع هو $v = \text{grad}\, u$ ، حيث u هي حل لمعادلة الجهد . المركبة العمودية للسرعة ، $\partial u/\partial n$ تساوي 0 عند الجدار . لذلك فإن المسألة .

$$\nabla^2 u = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = -1, \quad 0 < x < 1,$$

تمثل الانسياب حول الركن ، ينساب داخلياً عند القمة ، وخارجياً عند اليمين ، الجدران عند اليسار والاسفل . اشرح لماذا ، في مسألة انسياب الموائع ، يجب ان تكون

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = 0 \qquad (*)$$

صحيحة ، اذا كانت u حلاً لمعادلة الجهد في المنطقة R ، $\partial u/\partial n$ هي المشتقة العمودية الخارجية ، C هي حدود المنطقة و s هو طول القوس .

31 . تحت الشروط المذكورة في تمرين (30) ، برهن شرعية (*) . (تلميح : استخدم مبرهنة كرين) .

32 . مسألة نيومان تتكون من معادلة الجهد في المنطقة R والشروط على $\partial u/\partial n$ حول C التي هي حدود R . بين (a) ان :

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = 0$$

هو الشرط الضروري للحل لكي يكون موجوداً ، و (b) اذا كان u حلاً لمسألة نيومان ، فإن $u + c$ كذلك (c ثابت) .

33 . بين ان $u(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ هي حل للمسألة في تمرين (30) .

34 . حل مسألة الجهد في نصف اطار (ارسم مخطط المنطقة) . عند النقطة نفسها ، من الضروري ان نعوض $s = \ln r$.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0, \quad 1<r<e, \quad 0<\theta<\pi$$

$$u(1, \theta)=0, \quad u(e, \theta)=0, \quad 0<\theta<\pi$$

$$u(r, 0)=0, \quad u(r, \pi)=1, \quad 1<r<e$$

الفصل الخامس

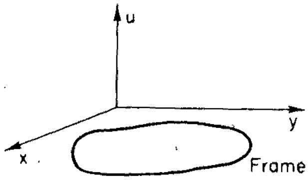
مسائل في عدة ابعاد

PROBLEMS IN SEVERAL DIMENSIONS

1 . اشتقاق معادلة الموجة ذات البعدين .

DERIVATION OF THE TWO-DIMENSIONAL WAVE EQUATION

احد الامثلة لمعادلة الموجة ذات البعدين ، نتأمل غشاءاً ممتداً بشدة فوق اطار مسطح في المستوي ـ xy (شكل 1 ـ 5) . وازاحة الغشاء فوق النقطة (x, y) في زمن t هي $u(x, y, t)$. ولنفرض ان الشد السطحي σ (surface tension) (الابعاد (F/L)) ثابت ومستقل عن الموقع . ولنفرض ايضاً ان الغشاء مرن بشكل كامل . اي انه لا يقاوم الانحناء . (فلم صابون يحقق هذه الفرضيات بدقة كبيرة) دعنا نتصور ان مستطيلاً صغيراً (ابعاده Δx في Δy رصف مع الاحداثيات) قطع من الغشاء ، ثم نطبق قانون نيوتن في الحركة عليه . وعلى كل حافة من المستطيل ، فإن بقية الغشاء يبذل قوة موزعة بقيمة σ (موشر بالاسهم في الشكل (2 ـ 5) ، هذه القوى الموزعة يمكن ان تتحلل الى قوى مركزة بقيمة $\sigma \Delta x$ او $\sigma \Delta y$ ، حسب طول القطعة المشمولة (لاحظ الشكل) (3 ـ 5) .



شكل (1 ـ 5)

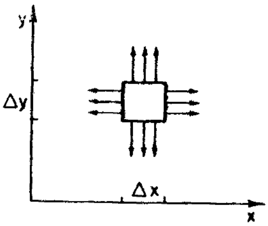


FIGURE 5–2.

شكل (2 ـ 5)

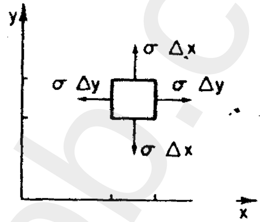
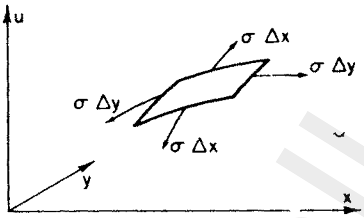


FIGURE 5–3.

شكل (3 ـ 5)



شكل (4 ـ 5) القوى على قطعة من الغشاء

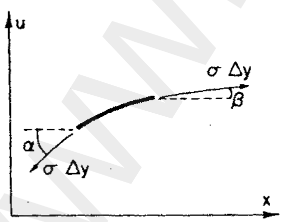


FIGURE 5–5.

شكل (5 – 5)

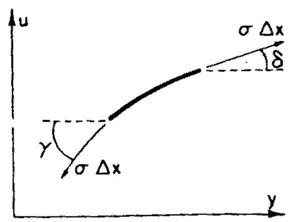


FIGURE 5–6.

شكل (6 ـ 5)

اذا لاحظنا المساقط على المستويين xu- و yu- (الشكلين 5 ـ 5 و 6 ـ 5) ، نرى ان مجموع القوى في الاتجاه σ هو $(\cos\beta - \cos\alpha)$ ومجموع القوى في اتجاه-y هو $\Delta x\,(\cos\delta - \cos\gamma)$ ومن المفضل ان يكون كل من هاتين المجموعتين يساوي او على الاقل مهملاً . لذلك سوف نفرض ان α و β و γ و δ هي زوايا صغيرة . وكوننا نعلم ان :

$$\tan\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tan\gamma = \frac{\partial u}{\partial y}$$

... الخ . عندها نحسب المشتقات عند بعض النقاط المناسبة قرب (x, y) فسوف نفرض ان الانحدارين $\partial u/\partial x$ و $\partial u/\partial y$ للغشاء صغيران جداً .

اذا جمعنا القوى فى الاتجاه الشاقولي ، وبمساواة المجموع الى الكتلة مضروبة في التعجيل (في الاتجاه الشاقولي) نحصل على :

$$\sigma\,\Delta y\,(\sin\beta - \sin\alpha) + \sigma\,\Delta x\,(\sin\delta - \sin\gamma) = \rho\,\Delta x\,\Delta y\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

حيث ρ هي كثافة السطح $[m/L^2]$. وكون الزوايا α ، β ، γ ، δ صغيرة ، فان جيب كل منهما يساوي تقريباً الظل :

$$\sin\alpha \simeq \tan\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, t),$$

... الخ . وباستخدام هذه التقاريب ، فان المعادلة اعلاه تصبح

$$\sigma\,\Delta y\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, y, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, t)\right)$$
$$+\ \sigma\,\Delta x\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x, y + \Delta y, t) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, t)\right) = \rho\,\Delta x\,\Delta y\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

وبالقسمة على $\Delta x \, \Delta y$ ، يمكن ان نميز اثنين من خوارج قسمة الفرق في الطرف الايسر. وبأخذ الغاية ، تصبح هذه مشتقات جزيئة ، وتؤدي الى المعادلة التالية ،

$$\sigma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

فاذا كانت $c^2 = \sigma/\rho$. هذه هي معادلة الموجة ذات البعدين .

فاذا ثبتنا الغشاء في الاطار المسطح ، فان الشرط الحدودي يصبح $u(x, y, t) = 0$ حيث (x, y) تقع على الحدود .

وطبيعياً ، فانه من الضروري ان نعطي الشروط الابتدائية لوصف الازاحة والسرعة في كل نقطة على الغشاء عنده

$$u(x, y, 0) = f(x, y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = g(x, y).$$

تمارين

1 . افرض ان الاطار مستطيلي ، محدد بقطع من المستقيمات $y = 0, x = a, x = 0$ $y = b$ اكتب مسألة القيم الحدودية ـ القيم الابتدائية ، المكملة بالمتباينات ، للغشاء الممتد فوق الاطار

2 . افرض ان الاطار دائري ، معادلته هي $x^2+y^2 = a^2$ اكتب مسائل القيم الحدودية ـ القيم الابتدائية للغشاء على الاطار الدائري . (استخدم الاحداثيات القطبية)

3 . ماذا يمكن ان تكون عليه معادلة الموجة ذات الثلاثة ابعاد ؟

2 . اشتقاق معادلة الحرارة ذات البعدين :

DERIVATION OF THE TWO-DIMENSIONAL HEAT EQUATION

تصور ان صفيحة مسطحة رقيقة تتكون من مادة موصلة للحرارة محصورة بين لوحين عازلين للحرارة. دعنا نفرض ان منظومة الاحداثيات كما في الشكل (7ـ5) وان درجة حرارة الصفيحة تعتمد فقط على الموضع في المستوى -xy والزمن . ثم نطبّق قانون حفظ الطاقة (بصيغة المعدل) على مستطيل صغير ابعادة Δx و Δy (شكل 8 ـ 5)

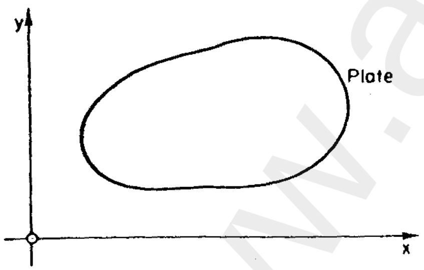
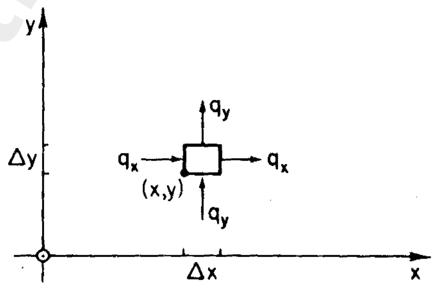


FIGURE 5–7.

شكل (7 ـ 5)



شكل (8 ـ 5)

لتكن $q_x(x, y)$ و $q_y(x, y)$ معدل سريان الحرارة في اتجاه -x واتجاه -y على التوالي . والكميات المطلوبة للتعبير عن حفظ الطاقة هي :

معدل الداخل $q_x(x, y + \frac{1}{2}\Delta y)\theta\,\Delta y + q_y(x + \frac{1}{2}\Delta x, y)\theta\,\Delta x$

معدل الخارج $q_x(x + \Delta x, y + \frac{1}{2}\Delta y)\theta\,\Delta y + q_y(x + \frac{1}{2}\Delta x, y + \Delta y)\theta\,\Delta x$

معدل التوليد : $g\theta\,\Delta x\,\Delta y$

معدل المخزون : $\rho c\theta\,\Delta x\,\Delta y\,\frac{\partial u}{\partial t}$

في هذه المقادير ، θ تمثل سمك الصفيحة ، g هي معدل توليد الحرارة لكل وحدة حجم ، و ρ ، c تمثلان الكثافة وسعة الحرارة .

ان حفظ الطاقة يتطلب الاتي :

معدل الداخل + معدل التوليد = معدل الخارج + معدل المخزون ويمكن كتابة هذه الصيغة بشكل اسهل ، على النحو الآتي :

معدل الداخل – معدل الخارج = معدل المخزون – معدل التوليد .

وبالتعويض عن المقادير الرياضية لكل حد وبالقسمة على θ ، نجد ان

$$[q_x(x, y + \tfrac{1}{2}\Delta y) - q_x(x + \Delta x, y + \tfrac{1}{2}\Delta y)]\,\Delta y +$$
$$[q_y(x + \tfrac{1}{2}\Delta x, y) - q_y(x + \tfrac{1}{2}\Delta x, y + \Delta y)]\,\Delta x = \left(-g + \rho c\frac{\partial u}{\partial t}\right)\Delta x\,\Delta y.$$

وبالقسمة على $\Delta x\,\Delta y$ نرى الاثنين من خوارج القسمة في الطرف الايسر للمعادلة . وباخذ الغاية عندما نقترب Δx و Δy الى الصفر ، تصبحان مشتقتين جزئيتين ، وبهذا نحصل على

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} = -g + \rho c\frac{\partial u}{\partial t}.$$

وجميع الدوال الان يمكن حسابها عند النقطة (x, y) .

نعود الان مرة اخرى الى قانون فورية لكي نحذف المعدلين q_x و q_y . وبهذا تصبح المعادلة اعلاه على النحو الآتي :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa_x \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa_y \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \rho c \frac{\partial u}{\partial t} - g.$$

وعموماً ، فان κ_x ، κ_y يمكن ان تكونا دالتين مختلفتين للموقع . من الناحية الاخرى ، اذا كان $\kappa_x = \kappa_y$ (مادة موحدة الخواص) وان كليهما مستقلين من عن الموقع (مادة منتظمة) ، فان معادلتنا تصبح

$$\kappa\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \rho c \frac{\partial u}{\partial t} - g$$

والتي يقال عادة بأنها معادلة الحرارة ذات البعدين .

احد الشروط الحدودية المحتملة لمعادلة الحرارة ذات البعدين هو تحديد درجة الحرارة u على الحدودية . الشروط الاخرى ــ العزل او التوصيل ، فمثلاً تتضمن معدل سريان الحرارة عمودياً على الحدودية وقانون فورية بصيغة المتجهات يبين ان معدل سريان الحرارة المكتسبة يتناسب مع المشتقة الاتجاهية الخارجية . فمثلاً على الخط المستقيم العمودي $x = 0$ (محور -y) ، المشتقة الخارجية هي $-\partial u/\partial x$.

تمارين

1 . افرض ان الصفيحة تقع في المستطيل $0<x<a$ ، $0<y<b$ اعط مسألة القيم الحدودية القيم الابتدائية الكاملة لدرجة الحرارة في الصفيحة اذا كان

a . لا توجد حرارة متولدة .

b . درجة الحرارة عند T_0 على $x = a$ و $y = 0$.

c . الحافتان عند $x = 0$ ، $y = b$ معزولتان .

2 . جد أبعاد ρ ، c ، κ ، q و g ، ثم بين ان الابعاد للطرفين الايمن والايسر لمعادلة الحرارة متساويان .

3 . اشتق معادلة الحرارة ذات الثلاثة ابعاد لجسم منتظم وموحد الصفات .

4 . افرض ان الصفيحة مستطيلة (كما في تمرين 1) وتقع بين $z = 0$ و $z = \theta$. اذا اعتبرنا ان الصفيحة على شكل جسم ثلاثي الابعاد (منتظم ، وموحد الصفات ، بدون توليد) فان معادلة درجة الحرارة هي :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$v(x, y, t) = \int_0^{\theta} u(x, y, z, t)\, dz$$

وافرض ان $\partial u/\partial z = 0$ عند $z = 0$ و $z = \theta$. بين ان v يحقق معادلة الحرارة ذات البعدين .

3. حل معادلة الحرارة ذات البعدين

SOLUTION OF THE TWO-DIMENSIONAL HEAT EQUATION

لكي نلاحظ تكنيك حل مسألة البعدين ، سوف نتأمل انتشار الحرارة في صفيحة تكون مادتها مستطيلة منتظمة وموحدة الصفات . ان توزيع درجة حرارة حالة الاستقرار هو حل لمعادلة الجهد (لاحظ تمرين 6) وافرض ان مسألة القيم الذاتية الابتدائية لدرجة حرارة الانتقال $u(x, y, t)$ هي :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad 0 < t \tag{1}$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, b, t) = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t \tag{2}$$

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(a, y, t) = 0, \quad 0 < y < b, \quad 0 < t \tag{3}$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \qquad 0 < x < a, \quad 0 < y < b. \tag{4}$$

هذه المسألة تشمل على معادلة تفاضلية جزيئة اعتيادية وشروط حدودية متجانسة . باتباع طريقة فصل المتغييرات ينبغي الحصول على الصيغة .

$$u(x, y, t) = \phi(x, y)T(t).$$

وبالتعويض عن u بصيغة الجداء في المعادلة (1) ، نجد ان

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right)T = \frac{1}{k}\phi T'.$$

ويمكن الحصول على الفصل بالقسمة على ϕT ، وبالتالي يكون

$$\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)\frac{1}{\phi} = \frac{T'}{kT}.$$

وكما هو معلوم فان القيمة المشتركة لهذه المعادلة يجب ان تكون ثابتة ونتوقع ان تكون سالبة $(-\lambda^2)$. وبهذا فان المعادلات التي نحصل عليها هي

$$T' + \lambda^2 kT = 0, \qquad 0 < t \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = -\lambda^2\phi, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b. \tag{6}$$

وبدلالة حلول الجداء ، فان الشروط الحدودية تصبح الاتي :

$$\phi(x, 0)T(t) = 0, \quad \phi(x, b)T(t) = 0$$
$$\phi(0, y)T(t) = 0, \quad \phi(a, y)T(t) = 0.$$

ولكي تتحقق المعادلات الاربع ، فاما $T(t) = 0$ لكل t واما $\phi = 0$ على الحدود . هنا نلاحظ عدة مرات ان اختيارنا لـ $T(t) = 0$ يحقق الحل بشكل كامل . وبهذا فان ϕ تتطلب ان تحقق الشروط .

$$\phi(x, 0) = 0, \quad \phi(x, b) = 0, \quad 0 < x < a \tag{7}$$
$$\phi(0, y) = 0, \quad \phi(a, y) = 0, \quad 0 < y < b. \tag{8}$$

من الملاحظ ان المعادلات (6) ـ (8) تكون جديدة وهي مسألة القيم الذاتية ببعدين . ومن المؤكد ان المعادلة التفاضلية الجزئية والشروط الحدودية تكون خطية ومتجانسة ، لذلك فان طريقة فصل المتغييرات يمكن استخدامها مرة اخرى . افرض ان ϕ بالصيغة .

$$\phi(x, y) = X(x)Y(y)$$

فأن المعادلة التفاضلية الجزئية (6) تصبح :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda^2, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b.$$

وان حاصل جمع دالة x ودالة y ممكن ان يكون ثابتاً اذا كانت هاتان الدالتان ثابتتين .

$$\frac{X''}{X} = \text{ثابت} , \quad \frac{Y''}{Y} = \text{ثابت}$$

وقبل ان نسمي الثابتين ، دعنا نلاحظ الشروط الحدودية على $\phi = XY$:

$$X(x)Y(0) = 0, \quad X(x)Y(b) = 0, \quad 0 < x < a$$

$$X(0)Y(y) = 0, \quad X(a)Y(y) = 0, \quad 0 < y < b.$$

اذا كانت احدى الدالتين X او Y تساوي 0 في الفترة كلها لمتغيرها ، فان الشروط تتحقق بالتأكيد ، ولكن ϕ تساوي 0 تطابقياً . لذلك يتطلب ان تكون كلتا الدالتين X، Y تساوي 0 عند النقطتين الطرفيتين لفترتها .

$$Y(0) = 0, \quad Y(b) = 0 \tag{9}$$

$$X(0) = 0, \quad X(a) = 0. \tag{10}$$

والان ، فمن الواضح ان كلًا من X''/X ، Y''/Y يجب ان يكون ثابتاً سالباً ، ونرمز لهما بـ $-\mu^2$ و $-\nu^2$ على التوالي . وان معادلتي الفصل لـ X و Y هما :

$$X'' + \mu^2 X = 0, \quad 0 < x < a \tag{11}$$

$$Y'' + \nu^2 Y = 0, \quad 0 < y < b. \tag{12}$$

واخيراً ، فان ثابت الفصل $-\lambda^2$ يحدد بـ :

$$\lambda^2 = \mu^2 + \nu^2. \tag{13}$$

كما نلاحظ مسألتين مستقلتين للقيم الذاتية هما : المعادلتان (9) و (12) تكونان احدى المسألتين والمعادلتان (10) و (11) تكونان المسألة الاخرى . وكلاهما من الصيغ المعروفة . وان الحلول هي :

$$X_m(x) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right), \quad \mu_m^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2, m = 1, 2, \ldots,$$

$$Y_n(y) = \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad \nu_n^2 = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, n = 1, 2, \ldots .$$

لاحظ ان الدليلين n و m مستقلان . وهذا يعني ان ϕ لها دليل مزدوج بشكل خاص . وحلول مسألة القيم الذاتية ذات البعدين (6) ـ (8) هي :

$$\phi_{mn}(x, y) = X_m(x)Y_n(y)$$
$$\lambda_{mn}^2 = \mu_m^2 + \nu_n^2$$

وان الدالة المقابلة لـ T هي :

$$T_{mn} = \exp(-\lambda_{mn}^2 kt).$$

سوف نبدأ الان بتجميع الحل . لكل زوج من الادلة m, n $(m = 1, 2, 3, \ldots,$ $n = 1, 2, 3, \ldots)$ وتوجد دالة :

$$u_{mn}(x, y, t) = \phi_{mn}(x, y)T_{mn}(t)$$
$$= \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\exp(-\lambda_{mn}^2 kt)$$

تحقق المعادلة التفاضلية الجزيئة (1) والشروط الحدودية في المعادلتين (2) و (3) . ويمكن ان تكون التراكيب الخطية لهذه الحلول للحصول على حل آخر . واكثر التراكيب الخطية عمومية هي السلسلة المزدوجة (double series)

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\, \phi_{mn}(x, y)T_{mn}(t) \qquad (14)$$

وان اي من هذه التراكيب يجب ان يحقق المعادلات (١) ـ (3) . بقي لدينا تحقيق الشروط الابتدائية في معادلة (4) واذا كانت u بالصيغة اعلاه . فان الشرط الابتدائي يصبح :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \phi_{mn}(x, y) = f(x, y), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b. \qquad (15)$$

ان فكرة التعامدية تكون قابلة التطبيق للمسألة مرة اخرى وذلك باختيار المعاملات a_{mn} . ويمكن ان نجد بالحساب المباشر انه ؛

اذا كان

$$\int_0^b \int_0^a \phi_{mn}(x, y)\phi_{pq}(x, y)\, dx\, dy = \begin{cases} \dfrac{ab}{4} & \text{if } m = p \text{ and } n = q \\ 0, & \text{خلاف ذلك} \end{cases} \qquad (16)$$

وبهذا ، فإن الصيغة المناسبة للمعاملات a_{mn} هي ؛

$$a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx\, dy.$$

واذا كانت f دالة منتظمة ، فإن معادلة السلسلة (15) تكون متقاربة وتساوي $f(x, y)$ في المنطقة المستطيلة $0 < x < a$ ، $0 < y < b$. ويمكن القول الآن ان المسألة قد تم حلها .

ومن الجدير بالذكر ان كل حد في معادلة السلسلة (14) يحتوي على اس قابل للتلاشي ، وبهذا ، فإذا ازدادت t ، فإن $u(x, y, t)$ تقترب من الصفر ، كما هو متوقع .

دعنا الآن نأخذ الشرط الابتدائي المحدد .

$$f(x, y) = xy, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b.$$

المعاملات يمكن ايجادها بسهولة وهي ؛

$$a_{mn} = \frac{4ab}{\pi^2} \frac{\cos m\pi \cos n\pi}{mn}$$

بينما حل هذه المسألة هو ؛

$$u(x, y, t) = \frac{4ab}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos m\pi \cos n\pi}{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \exp(-\lambda_{mn}^2 kt). \quad (17)$$

والسلاسل المزدوجة التي تظهر هنا يمكن تحويلها الى سلسلة احادية . ولعمل ذلك ، نرتب الحدود بشكل متصاعد القيم لـ λ_{mn}^2 . وبهذا تكون الحدود الاولى في السلسلة الاحادية اكثر الحدود اهمية وهي التي تتلاشى بسرعة اقل . فمثلاً ، اذا كان $a = 2b$ ، يكون :

$$\lambda_{mn}^2 = \frac{(m^2 + 4n^2)\pi^2}{a^2},$$

وفيما يلي قائمة بالدليل المزدوج (m, n) المرتب تصاعدياً بالنسبة لقيم λ_{mn}^2 : (1,1) و (2,1) و (3,1) و (1,2) و (2,2) و (4,1) و (3,2) و...

تمارين

1 . اكتب « اول بضعة » حدود من معادلة السلسلة (17) . نعني بـ « اول بضعة » حدود ، الحدود التي تكون فيها λ_{mn}^2 صغيرة . (افرض ان $a = b$ لتحديد قيم مرادفة لـ λ^2)

2 . اعطِ تفاصيل طريقة فصل المتغيرات بالطريقة التي تم فيها اشتقاق المعادلات (9) ـ (13) .

3 . جد ذبذبات الاهتزاز لغشاء مستطيلي . لاحظ بند 1 ، تمرين 1 .

4 . بين ان $u_{mn}(x, y, t)$ تحقق المعادلات (1) ـ (3) .

5 . بين ان $X_m(x) = \cos(m\pi x/a)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ اذا تم استبدال الشروط الحدودية في معادلة (3) بـ

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(a, y, t) = 0, \quad 0 < y < b, \quad 0 < t.$$

ما هي القيم التي تأخذها λ_{mn}^2 ، وما هي صيغة الحل $u(x, y, t)$ ؟

6 . افرض انه بدلاً من الشروط الحدودية في المعادلتين (2) و (3) يكون لدينا

$$u(x, 0, t) = f_1(x), \quad u(x, b, t) = f_2(x), \quad 0 < x < a, \quad 0 < t \qquad (2')$$

$$u(0, y, t) = g_1(y), \quad u(a, y, t) = g_2(y), \quad 0 < y < b, \quad 0 < t. \qquad (3')$$

بين ان حل حالة الاستقرار يشمل على معادلة الجهد ، ثم جد الحل .

7 . حل مسألة التوصيل الحراري ذات البعدين في مستطيل اذا كانت كل الحدود معزولة وان الشرط الابتدائي هو :

a. $u(x, y, 0) = 1$

b. $u(x, y, 0) = x + y$

c. $u(x, y, 0) = xy.$

8 . تحقق من صحة العلاقة التعامدية في معادلة (16) وصيغة a_{mn} .

9 . بين ان ثابت الفصل $-\lambda^2$ يجب ان يكون سالباً وذلك بتبيان ان $-\mu^2$ و $-\nu^2$ يجب ان يكونا سالبين .

4. مسائل في الاحداثيات القطبية .

PROBLEMS IN POLAR COORDINATES

وجدنا سابقاً أن مسألة الحرارة ومسألة الموجة ذات البعد الواحد لهما اهمية مشتركة . اي ان حالة الاستقرار او حلول الزمن ـ المستقل ومسائل القيم الذاتية التي تظهر تكون متطابقة في كلتا الحالتين . كذلك ، عند حل المسائل في منطقة مستطيلة ، لاحظنا ان هاتين الصفتين تشتركان بمعادلتي الحرارة والموجة .

اذا تأملنا الان اهتزاز غشاء دائري او توصيل حراري في صفيحة دائرية ، فسوف نلاحظ صفة مشتركة مرة اخرى . ادناه اعطيت هاتين المسألتين في المنطقة $0 < r < a, \quad -\pi < \theta \leq \pi, \quad 0 < t$

حرارة	موجة
$\nabla^2 v = \dfrac{1}{k}\dfrac{\partial v}{\partial t}$	$\nabla^2 v = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}$
$v(a, \theta, t) = f(\theta)$	$v(a, \theta, t) = f(\theta)$

$$v(r, \theta, 0) = g(r, \theta) \qquad v(r, \theta, 0) = g(r, \theta)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(r, \theta, 0) = h(r, \theta).$$

في كلتا المسألتين نحتاج الى :

$$v(r, -\pi, t) = v(r, \pi, t), \quad 0 < r < a, \quad 0 < t$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta}(r, -\pi, t) = \frac{\partial v}{\partial \theta}(r, \pi, t), \quad 0 < r < a, \quad 0 < t$$

لذلك فسوف لا يوجد انقطاع عند الحدود المصطنعة $\theta = \pm\pi$.
بالرغم من ان تفسيرنا للدالة v مختلفاً في الحالتين ، نلاحظ ان حل المسألة

$$\nabla^2 v = 0, \quad v(a, \theta) = f(\theta)$$

وهو حل حالة السكون او حالة الاستقرار لكلتا المسألتين ، وسوف نحتاجهُ في المسألتين لكي يكون الشرط الحدودي عند $r = a$ متجانساً .

دعنا نفرض الان ، ان حل الزمن المستقل قد وجد ثم حذف ، اي اننا سوف نعوض عن $f(\theta)$ بصفر . لذلك يكون لدينا

$$\nabla^2 v = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \qquad \nabla^2 v = \frac{1}{k}\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$v(a, \theta, t) = 0 \qquad v(a, \theta, t) = 0$$

اضافة الى شروط ابتدائية مناسبة . واذا ما حاولنا الحل بطريقة فصل المتغييرات ، وذلك بوضع $v(r, \theta, t) = \phi(r, \theta)T(t)$ في كلتا الحالتين ، فسوف نجد ان $\phi(r, \theta)$ يجب ان تحقق :

$$\nabla^2\phi = -\lambda^2\phi, \qquad 0 < r < a, \quad -\pi < \theta \leq \pi \tag{1}$$

$$\phi(a, \theta) = 0, \qquad -\pi < \theta \leq \pi \tag{2}$$

$$\phi(r, -\pi) = \phi(r, \pi), \qquad 0 < r < a \tag{3}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta}(r, -\pi) = \frac{\partial \phi}{\partial \theta}(r, \pi), \quad 0 < r < a. \tag{4}$$

والان سوف نركز انتباهنا على حل مسألة القيم الذاتية ذات البعدين واذا كتبنا المعادلة (1) بالصيغة القطبية تصبح :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = -\lambda^2\phi.$$

ويمكن فصل المتغييرات مرة اخرى وذلك بفرض ان $\phi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$. وبعد اجراء بعض العمليات الجبرية ، نجد ان :

$$\frac{(rR')'}{rR} + \frac{\Theta''}{r^2\,\Theta} = -\lambda^2 \tag{5}$$

$$R(a) = 0 \tag{6}$$

$$\Theta(-\pi) = \Theta(\pi) \tag{7}$$

$$\Theta'(-\pi) = \Theta'(\pi). \tag{8}$$

والنسبة Θ''/Θ يجب ان تكون ثابتة لان في خلاف ذلك تكون λ^2 غير ثابتة . فنختار $\Theta''/\Theta = -\mu^2$ ، لنحصل على المسألة الشهيرة

$$\Theta'' + \mu^2\Theta = 0, \quad -\pi < \theta \le \pi \tag{9}$$

$$\Theta(-\pi) = \Theta(\pi) \tag{10}$$

$$\Theta'(-\pi) = \Theta'(\pi). \tag{11}$$

وقد وجدنا في الفصل الرابع ان حلول هذه المسألة هي :

$$\begin{aligned} \mu_0^{\,2} &= 0, \quad \Theta(\theta) = 1 \\ \mu_m^{\,2} &= m^2, \quad \Theta(\theta) = \cos m\theta \quad \text{and} \quad \sin m\theta \end{aligned} \tag{12}$$

حيث $m = 1, 2, 3, \ldots$.
ان المسألة المتبقية من R هي

$$(rR')' - \frac{\mu^2}{r}R + \lambda^2 rR = 0, \quad 0 < r < a \qquad (13)$$

$$R(a) = 0. \qquad (14)$$

يقال للمعادلة (13) معادلة بيسل (*Bessel's equation*) ، وسوف نقوم بحلها في البند القادم .

تمارين

1 . اذكر مسائل القيم الحدودية القيم-الابتدائية الكاملة والتي تكون كنتيجة للمسائل المعطاة اصلاً عندما يُحذف حل حالة الاستقرار او حل الزمن المستقل من v .

2 . تحقق من صحة فصل المتغييرات التي تؤدي الى المعادلتين (1) و (2) .

3 . تعويض $v(r, \theta, t)$ في صيغة الجداء تؤدي الى المسألة في المعادلات (1) ـ (4) للعامل$\phi(r, \theta)$. ما هي المعادلة التفاضلية التي يجب تحقيقها بالعامل $T(t)$ ؟ .

4 . حل المعادلات (11) ـ (9) وتحقق من الحل .

5 . افرض ان المسائل المعطاة اصلاً والتي يجب حلها في نصف قرص هي $0 < r < a$ ، $0 < \theta < \pi$ ، مع الشروط الاضافية

$$v(r, 0, t) = 0, \quad 0 < r < a, \quad 0 < t$$
$$v(r, \pi, t) = 0, \quad 0 < r < a, \quad 0 < t.$$

ما هي مسائل القيم الذاتية التي تظهر في المعادلات (11) ـ (9) ؟ حل هذه المعادلات .

6 . افرض ان الشرط الحدودي هو .

$$\frac{\partial v}{\partial r}(a, \theta, t) = 0, \quad -\pi < \theta \leq \pi, \quad 0 < t$$

قد اعطي بدلاً من $v(a, \theta, t) = f(\theta)$. استخدم الخطوات في طريقة فصل المتغييرات . بين ان التغيير الوحيد في المعادلة (14) ، هو $R'(a) = 0$

7 . احدى نتائج مبرهنة كرين هي علاقة التكامل الاتية .

$$\iint_R (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\, dA = \int_C \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right) ds$$

حيث R هي المنطقة في المستوي ، C وهو منحنٍ مغلق يحيط بـ R ، وان $\partial f/\partial n$ هي المشتقة الاتجاهية في اتجاه عمود على المنحني C . استخدم هذه العلاقة لتبين ان الدوال الذاتية للمسألة

$$\nabla^2\phi = -\lambda^2\phi \quad \text{في} \quad R$$

$$\phi = 0, \quad \text{على} \quad C$$

تكون متعامدة اذا كانت تقابل قيماً ذاتية مختلفة . (تلميح : استخدم $m \neq k,\ g = \phi_m,\ f = \phi_k$)

8 . اعد التمرين نفسة كما رأينا اعلاه ، عدا كون الشرط الحدودي هو

$$\phi + \lambda\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$$

على الحدود .

5 معادلة بيسل BESSEL'S EQUATION

لكي نحل معادلة بيسل

$$(rR')' - \frac{\mu^2}{r}R + \lambda^2 rR = 0 \qquad (1)$$

سوف نستخدم طريقة فروبينس (Frobenius) . افرض ان $R(r)$ بصيغة سلسلة القوى مضروبة بقوة مجهولة لـ r :

$$R(r) = r^{\alpha}(c_0 + c_1 r + \cdots + c_k r^k + \cdots). \qquad (2)$$

وعندما نأخذ مشتقات المعادلة (1) ونضرب المعادلة بـ r تصبح

$$r^2R'' + rR' - \mu^2R + \lambda^2 r^2 R = 0.$$

والآن نعوض السلسلة غير المنتهية من معادلة (2) بـ R :

$$R(r) = c_0 r^{\alpha} + c_1 r^{\alpha+1} + \cdots + c_k r^{\alpha+k} + \cdots$$

وهذه الصيغ تشبه مشتقات R . والحدود الاربعة للمعادلة التفاضلية هي :

$$\begin{aligned}
r^2R'' &= \alpha(\alpha-1)c_0 r^{\alpha} + (\alpha+1)\alpha c_1 r^{\alpha+1} + (\alpha+2)(\alpha+1)c_2 r^{\alpha+2} + \cdots \\
&\qquad + (\alpha+k)(\alpha+k-1)c_k r^{\alpha+k} + \cdots \\
rR' &= \alpha c_0 r^{\alpha} + (\alpha+1)c_1 r^{\alpha+1} + (\alpha+2)c_2 r^{\alpha+2} + \cdots \\
&\qquad + (\alpha+k)c_k r^{\alpha+k} + \cdots \\
-\mu^2 R &= -\mu^2 c_0 r^{\alpha} - \mu^2 c_1 r^{\alpha+1} - \mu^2 c_2 r^{\alpha+2} - \cdots \\
&\qquad - \mu^2 c_k r^{\alpha+k} + \cdots \\
\lambda^2 r^2 R &= \lambda^2 c_0 r^{\alpha+2} + \cdots \\
&\qquad + \lambda^2 c_{k-2} r^{\alpha+k} + \cdots .
\end{aligned}$$

والمقدار لـ $\lambda^2 r^2 R$ يقع على اليمين لكي يجعل قوى r تصطف بشكل عمودي لاحظ ان اقل اس لـ r يظهر في $\lambda^2 r^2 R$ هو $r^{\alpha+2}$. وحاصل جمع الاطراف اليسرى هي ، حسب المعادلة التفاضلية ، تساوي 0 . لذلك فان :

$$\begin{aligned}
0 = c_0(\alpha^2 - \mu^2)r^{\alpha} &+ c_1[(\alpha+1)^2 - \mu^2]r^{\alpha+1} \\
&+ [c_2((\alpha+2)^2 - \mu^2) + \lambda^2 c_0]r^{\alpha+2} \\
&+ \cdots + [c_k((\alpha+k)^2 - \mu^2) + \lambda^2 c_{k-2}]r^{\alpha+k} + \cdots .
\end{aligned}$$

وكل حد في سلسلة القوى يجب ان يساوي 0 لكي تحقق المساواة . لذلك ، فان معامل كل حد يجب ان يساوي 0 :

$$c_0(\alpha^2 - \mu^2) = 0$$

$$c_1((\alpha + 1)^2 - \mu^2) = 0$$

$$\vdots$$

$$c_k((\alpha + k)^2 - \mu^2) + \lambda^2 c_{k-2} = 0. \quad k \geq 2.$$

هنا سوف نأخذ $c_0 \neq 0$. لذلك يكون $\alpha = \pm\mu$. دعنا اذن ندرس الحالة $\alpha = \mu \geq 0$.
نجد ان المعادلة الثانية تصبح الاتي :

$$c_1((\mu + 1)^2 - \mu^2) = 0$$

وهذا يؤدي الى ان $c_1 = 0$ الان ، بشكل عام ، العلاقة هي :

$$c_k = -\frac{\lambda^2 c_{k-2}}{(\mu + k)^2 - \mu^2} = -\lambda^2 \frac{c_{k-2}}{k(2\mu + k)}, \quad k \geq 2 \qquad (3)$$

تبين ان c_k يمكن ايجادها من c_{k-2}. بوجه خاص نجد

$$c_2 = -\frac{\lambda^2}{2(2\mu + 2)} c_0$$

$$c_4 = -\frac{\lambda^2}{4(2\mu + 4)} c_2 = \frac{\lambda^4}{2 \cdot 4 \cdot (2\mu + 2)(2\mu + 4)} c_0$$

الخ . جميع لـ c_k التي دليلها فردي تساوي 0 ، لان كل منهما مضروباً بـ c_1
والصيغة العامة للمعامل الذي دليلة زوجي $k = 2m$ هو :

$$c_{2m} = \frac{(-1)^m}{m!(\mu + 1)(\mu + 2) \cdots (\mu + m)} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2m} c_0. \qquad (4)$$

لقيم التكامل μ ، تم اختيار c_0 لتكون :

$$c_0 = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\mu} \cdot \frac{1}{\mu!}.$$

يُقال لحل المعادلة (4) الذي وجدناه بانهُ دالة بيسل من النوع الاول ومن رتبة μ :

$$J_{\mu}(\lambda r) = \left(\frac{\lambda r}{2}\right)^{\mu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(\mu + m)!} \left(\frac{\lambda r}{2}\right)^{2m} \tag{5}$$

ويوجد حل ثان مستقل لمعادلة بيسل ، والذي يمكن ايجادهُ باستخدام تغيير الوسيط . وهذه الطريقة تؤدي الى الحل بالصيغة الاتية :

$$J_{\mu}(\lambda r) \cdot \int \frac{dr}{r J_{\mu}^{2}(\lambda r)}. \tag{6}$$

والحل الثاني لمعادلة بيسل يسمى بدلالة بيسل من النوع الثاني رتبة μ ويرمز لهُ بـ $Y_{\mu}(\lambda r)$.

والشكل الاكثر اهمية للحل الثاني هو سلوكهُ قرب $r = 0$. عندما تكون r صغيرة جداً ، يمكن ان نقرب $J_{\mu}(\lambda r)$ بواسطة حده الاول من مفكوك سلسلتهِ التي هي :

$$J_{\mu}(\lambda r) \simeq \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\mu} \frac{1}{\mu!} r^{\mu}, \quad r \ll 1.$$

والحل في معادلة (6) يمكن تقريبهُ بالصيغة الاتية :

$$\text{ثابت} \times r^{\mu} \int \frac{dr}{r^{1+2\mu}} = \text{ثابت} \times \begin{cases} \ln r, & \text{عندما } \mu = 0 \\ r^{-\mu}, & \text{عندما } \mu > 0. \end{cases}$$

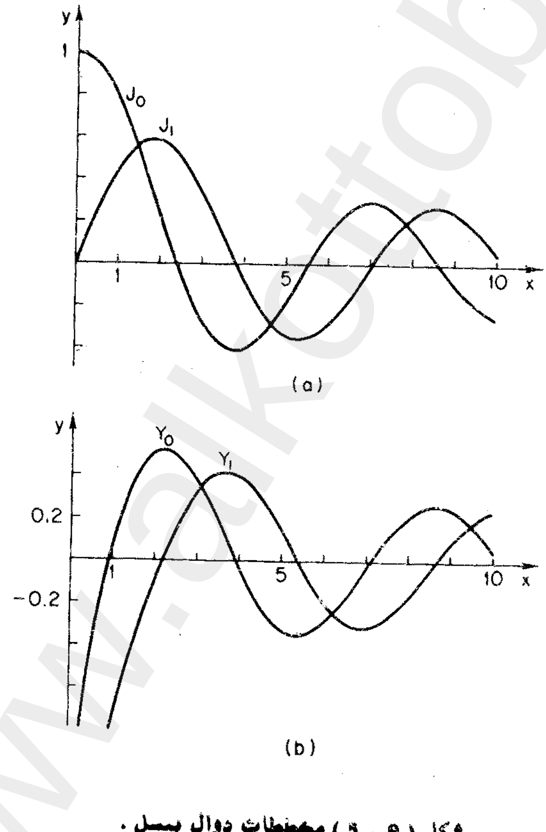
في اي من الحالتين ، من السهولة ان نلاحظ ان :

$$|Y_{\mu}(\lambda r)| \to \infty, \quad \text{عندما } r \to 0.$$

وكلا النوعين في دوال بيسل لهما عدد غير منتهٍ من الاصفار. اي انهُ توجد اعداد غير منتهية من قيم α (و β) بحيث نجد :

$$J_\mu(\alpha) = 0, \quad Y_\mu(\beta) = 0.$$

كذلك ، عندما تكون $r \to \infty$ ، فان كلاً من $J_\mu(\lambda r)$ و $Y_\mu(\lambda r)$ يقترب من الصفر والشكل (9 ـ 5) هو مخططات لبعض دوال بيسل ، وفي الجدول (1 ـ 5) قيم اصفارهما . وللحصول على معلومات اخرى يمكن ايجادها في كتب الجداول .



شكل (9 ـ 5) مخططات دوال بيسل .

الجدول (1 ـ 5)
اصفار دوال بيسل

$m \backslash n$	1	2	3	4
0	2.405	5.520	8.654	11.792
1	3.832	7.016	10.173	13.324
2	5.136	8.417	11.620	14.796
3	6.380	9.761	13.015	16.223

قيم α_{mn} تحقق المعادلة $J_m(\alpha_{mn}) = 0$

الخلاصة : المعادلة التفاضلية الاتية ،

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) - \frac{\mu^2}{r}R + \lambda^2 rR = 0$$

تسمى معادلة بيسل وحلها العام هو :

$$R(r) = AJ_\mu(\lambda r) + BY_\mu(\lambda r)$$

(A ، B ثابتان اختياريان) . والدالتان J_μ و Y_μ تسميان دالتي بيسل من الرتبة μ من النوع الاول والثاني على التوالي ودالة بيسل من النوع الثاني تكون غير مقيدة عند نقطة الاصل .

تمارين

1 . جد قيم الوسيط λ بحيث يكون للمسألة الاتية حل غير صفري ،

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\phi}{dr}\right) + \lambda^2\phi = 0, \quad 0 < r < a$$

$\phi(0)$ مقيدة ، $\phi(a) = 0$

2 . ارسم عدداً من الدوال الذاتية الاولى في تمرين 1 .

3 . بين ان :

$$\frac{d}{dr}J_\mu(\lambda r) = \lambda J_\mu{}'(\lambda r)$$

حيث ((′)) تعني المشتقة بالنسبة لازاحة الزاوية .

4 . بين من السلسلة ان :

$$\frac{d}{dr} J_0(\lambda r) = -\lambda J_1(\lambda r).$$

5 . باستخدام مبرهنة رول ((Rolle's theorem)) ، وبفرض ان $J_0(x) = 0$ لعدد غير منتهٍ من قيم x ، بيّن ان $J_1(x)=0$ لها عدد غير منتهٍ من الحلول .

6 . استخدم تمثيل السلاسل غير المنتهية لدوال بيسل ، لايجاد الصيغ الاتية :

$$\frac{d}{dx}(x^{-\mu}J_\mu(x)) = -x^{-\mu}J_{\mu+1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}(x^{\mu}J_\mu(x)) = x^{\mu}J_{\mu-1}(x).$$

7 . استخدم الصيغة الثانية في تمرين (6) لاشتقاق صيغة التكامل :

$$\int x^{\mu}J_\mu(x)x\,dx = x^{\mu+1}J_{\mu+1}(x).$$

8 . معادلة بيسل المحورة هي :

$$(rR')' - \frac{\mu^2}{r}R - \lambda^2 rR = 0.$$

بين ان سلسلة الحل تشبه بالضبط $J_\mu(\lambda r)$ ، عدا كون اشارات الحدود غير متناوبة . والصيغة القياسية للحل هي :

$$I_\mu(\lambda r) = \left(\frac{\lambda r}{2}\right)^\mu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(\mu + m)!} \left(\frac{\lambda r}{2}\right)^{2m}.$$

9 . استخدم النتيجة في تمرين (8) لحل هذه المسألة لدرجة الحرارة في صفيحة دائرية مع الانتقال (بالحمل) .

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) - \gamma^2(u - T) = 0, \quad 0 < r < a$$

$$u(a) = T_1.$$

10 . استخدم النتيجة في تمرين (4) لحل مسألة القيم الذاتية الاتية :

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\phi}{dr}\right) + \lambda^2\phi = 0, \quad 0 < r < a$$

$$\frac{d\phi}{dr}(a) = 0, \qquad \text{مقيدة} \quad \phi(0)$$

6. درجة الحرارة في اسطوانة :

TEMPERATURE IN A CYLINDER

في البند (4) ، لاحظنا ان كلاً من معادلة الحرارة ومعادلة الموجة لهما اهمية مشتركة ، خاصة في حل التوازن وكذلك في مسألة القيم الذاتية ، ولكي نعزز هذه الملاحظة ، سوف نحل مسألة الحرارة ومسألة الموجة بشروط متشابهة بحيث يمكن ملاحظة النقاط المتشابهة ، هذه الامثلة توضح نقطة جوهرية وهي : ان المسائل التي تكون ذات بعدين في نظام احداثي موحد (مستطيل) يمكن ان تصبح ذات بعد واحد في نظام آخر (الاحداثي القطبي) . ولكي نحصل على هذه الصيغ المبسطة ، سوف نفرض ان الدالة المجهولة $v(r, \theta, t)$، مستقلة عن الاحداثي الزاوي θ . (عندئذ سوف نكتب $v(r, t)$) كنتيجة لهذه الفرضية ، ومؤثر لابلاس ذي البعدين يصبح الآتي :

$$\nabla^2 v = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right).$$

افرض ان درجة الحرارة $v(r, t)$ في اسطوانة كبيرة (نصف قطر a) تحقق المسألة التالية ؛

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{1}{k}\frac{\partial v}{\partial t}, \quad 0 < r < a, \quad 0 < t \tag{1}$$

$$v(a, t) = 0, \qquad 0 < t \tag{2}$$

$$v(r, 0) = f(r), \quad 0 < r < a. \tag{3}$$

ولأن المعادلة التفاضلية (1) والشرط الحدودي (2) متجانسان فاننا سوف نبدأ بطريقة فصل المتغييرات وذلك بفرض $v(r, t) = \phi(r)T(t)$ باستخدام هذه الصيغة لـ v ، لنجد ان المعادلة التفاضلية الجزئية (1) تصبح الآتي ؛

$$\frac{1}{r}(r\phi')'T = \frac{1}{k}\phi T'.$$

وبقسمة المعادلة على ϕT ، نصل الى المساواة التالية ؛

$$\frac{(r\phi'(r))'}{r\phi(r)} = \frac{T'(t)}{kT(t)}. \tag{4}$$

وكلا الطرفين في المعادلة يكون ثابتاً ، وليكن $-\lambda^2$. عندئذ نحصل على معادلتين تفاضليتين هما ؛

$$T' + \lambda^2 kT = 0, \quad 0 < t \tag{5}$$

$$(r\phi')' + \lambda^2 r\phi = 0, \quad 0 < r < a. \tag{6}$$

والشرط الحدودي في معادلة (2) ، يصبح $\phi(a)T(t) = 0$ ، $0 < t$. وهذا سوف يتحقق بالطلب الآتي ؛

$$\phi(a) = 0. \tag{7}$$

ويمكن الآن ملاحظة ان معادلة (6) هي معادلة بيسل وان $\mu = 0$ ، (لاحظ الخلاصة ، بند 5) لذلك ، فان الحل العام يكونَ بالشكل الاتي ؛

$$\phi(r) = AJ_0(\lambda r) + BY_0(\lambda r).$$

واذا كان $B \neq 0$ ، فان $\phi(r)$ يجب ان تصبح غير منتهية عندما تقترب r من الصفر . والتفسير الفيزياوي لهذه الاحتمالية غير مقبول لذلك نحتاج ان يكون $B = 0$. وبالنتيجة اضفنا شرط التقييد :

$$|v(r, t)| \text{ مقيدة عندما } r = 0 \qquad (8)$$

الذي سوف نستخدمه غالباً .

الدالة $\phi(r) = J_0(\lambda r)$ هي حل لـ (6) ، وسوف نختار λ لكي تتحقق (7) . وبهذا سوف نحصل على :

$$J_0(\lambda a) = 0$$

او

$$\lambda_n = \frac{\alpha_n}{a}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

حيث α_n هي اصفار الدالة J_0 . لذلك فان الدوال الذاتية والقيم الذاتية (6) و (7) و (8) هي

$$\phi_n(r) = J_0(\lambda_n r), \quad \lambda_n^2 = \left(\frac{\alpha_n}{a}\right)^2. \qquad (9)$$

وبالعودة الى المعادلة (5) ، سوف نحدد عوامل الزمن T_n وهي :

$$T_n(t) = \exp(-\lambda_n^2 kt).$$

والآن يمكننا تجميع الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية (1) ، تحت الشرط الحدودي (2) وشرط التقييد (8) ، كتركيب خطي عام لحلول الجداء .

$$v(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n r) \exp(-\lambda_n^2 kt). \qquad (10)$$

هنا لم يبق لنا سوى تحديد المعاملات a_n بحيث تحقق الشرط الابتدائي (3) ، والذي يأخذ الآن الصيغة الآتية :

$$v(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n r) = f(r), \quad 0 < r < a. \qquad (11)$$

وكون هذه المسألة ليست تمريناً اعتيادياً في سلسلة فورية ، وليست مسألة ستَرم ـ ليوفِّلي المنتظمة (لاحظ بند (7) فصل (2) ، خصوصاً تمرين (6)) ، وبالرغم من ذلك فأن الدوال الذاتية للمعادلتين (6) و (7) تكون متعامدة ، كما مبين في العلاقة :

$$\int_0^a \phi_n(r)\phi_m(r) r\, dr = 0 \quad (n \neq m)$$

او

$$\int_0^a J_0(\lambda_n r) J_0(\lambda_m r) r\, dr = 0 \quad (n \neq m).$$

والمبرهنة الاتية تعطينا التبرير اللازم للمعادلة (11) .

مبرهنة . اذا كانت $f(r)$ ملساء مقطعياً في الفترة $0 < r < a$، فعند كل نقطة r في هذه الفترة تكون :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n r) = \frac{f(r+) + f(r-)}{2}, \quad 0 < r < a, \qquad (12)$$

حيث λ_n هي حلول لـ $J_0(\lambda a) = 0$، وان :

$$a_n = \frac{\int_0^a f(r) J_0(\lambda_n r) r\, dr}{\int_0^a J_0^2(\lambda_n r) r\, dr}. \qquad (13)$$

والآن نعالج المسألة التي بين ايدينا . اذا كانت الدالة $f(r)$ في الشرط الابتدائي (3) . ملساء مقطعياً ، فأن استخدام المعادلة (13) لاختيار المعاملات a_n يضمن تحقيق المعادلة (11) لاقرب ما يمكن وبهذا فأن الدالة

$$v(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n r) \exp(-\lambda_n^2 kt)$$

تحقق المسألة الممثلة بالمعادلات (1) ، (2) ، (3) و (8) .

وبطريقة المثال ، دعنا الان نفرض ان الدالة $f(r) = T_0$ ، $0 < r < a$، من الضروري ان نحدد المعاملات a_n بالصيغة (13) . والبسط هو التكامل

$$\int_0^a T_0 J_0(\lambda_n r) r \, dr.$$

هذا التكامل يمكن ايجادهُ بدلالة العلاقة (لاحظ تمرين 6 بند 5)

$$\frac{d}{dx}\left(x J_1(x)\right) = x J_0(x). \tag{14}$$

وبهذا ، نجد ان :

$$\int_0^a J_0(\lambda_n r) r \, dr = \frac{1}{\lambda_n} r J_1(\lambda_n r) \Big|_0^a$$

$$= \frac{a}{\lambda_n} J_1(\lambda_n a) = \frac{a^2}{\alpha_n} J_1(\alpha_n). \tag{15}$$

مقام المعادلة (13) يأخذ القيمة (تمرين 5)

$$\int_0^a J_0^2(\lambda_n r) r \, dr = \frac{a^2}{2} J_1^2(\lambda_n a)$$

$$= \frac{a^2}{2} J_1^2(\alpha_n). \tag{16}$$

واذا وضعنا البسط والمقام سوية من المعادلتين (15) و (16) ، نجد ان المعاملات التي نحتاجها هي :

$$a_n = \frac{2T_0}{\alpha_n J_1(\alpha_n)}. \tag{17}$$

وبهذا ، فان حل مسألة التوصيل الحراري هو :

$$v(r, t) = T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\alpha_n J_1(\alpha_n)} J_0(\lambda_n r) \exp(-\lambda_n{}^2 kt). \quad (18)$$

جدول (2 ـ 5) يبين بعض القيم الاولى للنسبة $2/[\alpha_n J_1(\alpha_n)]$

TABLE 5–2

n	α_n	$J_1(\alpha_n)$	$\frac{2}{\alpha_n J_1(\alpha_n)}$
1	2.405	+0.5191	+1.602
2	5.520	−0.3403	−1.065
3	8.654	+0.2715	+0.8512
4	11.792	−0.2325	−0.7295

تمارين

1 . استخدم المعادلة (18) لايجاد تعبير للدالة $v(0, t)/T_0$ ثم جد الدالة ،

$$\frac{kt}{a^2} = 0.1, 0.2, 0.3.$$

(الحدان الاوليان من السلسلة يكونان كافيين)

2 . اكتب الحدود الثلاثة الاولى للسلسلة في المعادلة (18) .

3 . استخدم تمرين (5) لاثبات المعادلة (16)

4 . لتكن $\phi(r) = J_0(\lambda r)$ ، بحيث تحقق $\phi(r)$ معادلة بيسل من الرتبة 0 . اضرب طرفي المعادلة التفاضلية بـ $r\phi'$ واستنتج ان ، ·

$$\frac{d}{dr}[(r\phi')^2] + \lambda^2 r^2 \frac{d}{dr}[\phi^2] = 0.$$

5 . افرض ان λ قد تم اختيارها بحيث يكون $\phi(a) = 0$ ، كامل المعادلة اعلاه في الفترة $0 < r < a$ لايجاد ،

$$\int_0^a \phi^2(r) r\, dr = \frac{1}{2\lambda^2}(a\phi'(a))^2.$$

6. حل مسألة الحرارة المتكونة من المعادلات (1) ـ (3) اذا كانت $f(r)$ هي

$$f(r) = \begin{cases} T_0, & 0 < r < \dfrac{a}{2} \\ 0, & \dfrac{a}{2} < r < a. \end{cases}$$

7 . اهتزازات الغشاء الدائري

VIBRATIONS OF A CIRCULAR MEMBRANE

سوف نحاول الان حل المسألة التي تعبر عن ازاحة غشاء دائري مثبت . عند حافته . ولكي نبدأ بهذا ، سوف نتعامل مع الحالة البسيطة التي تكون فيها الشروط الابتدائية ، مستقلة عن θ . لذلك ، فأن الازاحة $v(r, t)$ تحقق المسألة الاتية ،

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad 0 < r < a, \quad 0 < t \qquad (1)$$

$$v(a, t) = 0, \qquad 0 < t \qquad (2)$$

$$v(r, 0) = f(r), \qquad 0 < r < a \qquad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(r, 0) = g(r), \qquad 0 < r < a. \qquad (4)$$

لذا سوف نستخدم طريقة فصل المتغيرات وذلك بفرض $v(r, t) = \phi(r)T(t)$ وبذلك تصبح المعادلة التفاضلية (1)

$$\frac{1}{r}(r\phi')'T = \frac{1}{c^2}\phi T''$$

والمتغيرات يمكن فصلها ، وذلك بالقسمة على ϕT . لنجد الان ان

$$\frac{(r\phi'(r))'}{r\phi(r)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)}.$$

وان كل طرف يجب ان يساوي ثابتاً (ولنقل $-\lambda^2$) وهذا يؤدي الى المعادلتين إلتفاضليتين الآتيتين ؛

$$T'' + \lambda^2 c^2 T = 0, \quad 0 < t \qquad (5)$$

$$(r\phi')' + \lambda^2 r\phi = 0, \quad 0 < r < a. \qquad (6)$$

والشرط الحدودي في معادلة (2) يتحقق اذا كان :

$$\phi(a) = 0. \qquad (7)$$

وبالطبع ، فأن كون $r = 0$ نقطة شاذة للمعادلة التفاضلية (6) ، فأننا سوف نضيف الشرط الاتي :

$$|\phi(r)| \quad \text{مقيدة} \quad r = 0, \qquad (8)$$

وهذا يكافيء الشرط $|v(r, t)|$ مقيدة عند $r = 0$ والان يمكن ان نميز معادلة (6) على انها معادلة بيسل ، التي فيها الدالة $\phi(r) = J_0(\lambda r)$ وهي حل مقيد عند $r = 0$. ولكي نحقق الشرط الحدودي في معادلة (7) ، يجب ان يكون لدينا :

$$J_0(\lambda a) = 0$$

او : (9)

$$\lambda_n = \frac{\alpha_n}{a}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

حيث α_n هي اصفار الدالة J_0 . وبهذا تكون الدوال الذاتية والقيم الذاتية للمعادلات (6) ـ (8) هي :

$$\phi_n(r) = J_0(\lambda_n r), \quad \lambda_n^2 = \left(\frac{\alpha_n}{a}\right)^2.$$

واذا عدنا الى المعادلة (5) نلاحظ ان :

$$T_n(t) = a_n \cos \lambda_n ct + b_n \sin \lambda_n ct,$$

وعندئذ لكل $n = 1,2,\ldots$ نحصل على حل للمعادلات (1) و (2) و (8)

$$v_n(r, t) = \phi_n(r)T_n(t).$$

والتركيب الخطي العام لـ v_n يكون :

$$v(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0(\lambda_n r)[a_n \cos \lambda_n ct + b_n \sin \lambda_n ct]. \qquad (10)$$

والشروط الابتدائية في معادلتي (3) و (4) تتحقق اذا كان :

$$v(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n r) = f(r), \quad 0 < r < a$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \lambda_n c J_0(\lambda_n r) = g(r), \quad 0 < r < a.$$

وكما في البند السابق ، معاملات هذه السلسلة يمكن ايجادها بصيغ التكامل

$$a_n = \int_0^a f(r)J_0(\lambda_n r)\, r\, dr/I_n, \quad b_n = \int_0^a g(r)J_0(\lambda_n r)\, r\, dr/(\lambda_n c I_n),$$

$$I_n = \int_0^a [J_0(\lambda_n r)]^2 r\, dr.$$

وبهذه المعاملات المحددة بهذه الصيغ ، فأن الدالة المعطاة في معادلة (10) هي حل لمسألة الغشاء المهتز الذي بدأنا به .

وبعد ان تعرفنا على اسهل حالات اهتزازات الغشاء الدائري ، فأننا سوف نعود الى الحالة الاكثر عموماً . المسألة الكاملة هي

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad 0 < r < a, \quad 0 < t,$$

$$-\pi < \theta \le \pi. \qquad (11)$$

$$u(a, \theta, t) = 0, \qquad 0 < t, \quad -\pi < \theta \le \pi \qquad (12)$$

$$|u(0, \theta, t)| \text{ مقيدة} \qquad 0 < t, \quad -\pi < \theta \le \pi \qquad (13)$$

$$u(r, -\pi, t) = u(r, \pi, t), \qquad 0 < r < a, \quad 0 < t$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}(r, -\pi, t) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \pi, t), \qquad 0 < r < a, \quad 0 < t \qquad (14)$$

$$u(r, \theta, 0) = f(r, \theta), \qquad 0 < r < a, \quad -\pi < \theta \le \pi \qquad (15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(r, \theta, 0) = g(r, \theta), \qquad 0 < r < a, \quad -\pi < \theta \le \pi. \qquad (16)$$

اضفنا الشرط (13) لان $r = 0$ نقطة شاذة للمعادلة التفاضلية الجزئية وباتباع الخطوات المقترحة في بند (4) ، سوف نفرض ان u لها صيغة الجداء ،

$$u = \phi(r, \theta)T(t)$$

ونلاحظ الان ان المعادلة (11) تتحول الى معادلتين مرتبطتين هما

$$T'' + \lambda^2 c^2 T = 0, \qquad 0 < t \qquad (17)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = -\lambda^2\phi, \quad 0 < r < a, \quad -\pi < \theta \le \pi. \qquad (18)$$

واذا قمنا بفصل المتغيرات للدالة ϕ وذلك بفرض ان $\phi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ فأن المعادلة (18) تأخذ الصيغة

$$\frac{1}{r}(rR')'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' = -\lambda^2 R\Theta.$$

المتغيرات سيتم فصلها اذا ضربنا بـ r^2 وقسمنا على $R\Theta$. وبهذا تصبح المعادلة اعلاه بالشكل الآتي :

$$\frac{r(rR')'}{R} + \lambda^2 r^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \mu^2.$$

اخيراً سوف نحصل على مسألتين لـ R و θ .

$$\begin{aligned} &\Theta'' + \mu^2\Theta = 0, \quad -\pi < \theta \leq \pi \\ &\Theta(-\pi) = \Theta(\pi) \\ &\Theta'(-\pi) = \Theta'(\pi) \end{aligned} \tag{19}$$

$$(rR')' - \frac{\mu^2}{r}R + \lambda^2 rR = 0, \quad 0 < r < a$$

$$\begin{aligned} &|R(0)| \text{ مقيدة} \\ &R(a) = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

وكما لاحظنا سابقاً ، فأن حلول المسألة (19) هي :

$$\mu^2 = 0, \quad \Theta_0 = 1$$

$$\mu^2 = m^2, \quad \Theta_m = \cos m\theta \quad \text{و} \quad \sin m\theta, \quad m = 1, 2, 3, \ldots .$$

كذلك ، فأن المعادلة التفاضلية معادلة (20) يمكن تمييزها على انها معادلة بيسل ، والحل العام لها (اعتبر $m = \mu$) وهو :

$$R(r) = CJ_m(\lambda r) + DY_m(\lambda r).$$

ولكي يتحقق شرط التقييد في المعادلة (20) ، فأن D يجب ان يساوي صفراً . لذلك سوف نحصل على

$$R(r) = J_m(\lambda r).$$

(كون مضروبات الحل هي حل ايضاً ، لذلك يمكن ان نسقط الثابت C) . والشرط الحدودي في معادلة (20) يصبح

$$R(a) = J_m(\lambda a) = 0$$

وبهذا يكون λa جذراً للمعادلة :

$$J_m(\alpha) = 0.$$

(لاحظ الجدول 1 ـ 5 .) لكل عدد صحيح مثبت m .

$$\alpha_{m1},\quad \alpha_{m2},\quad \alpha_{m3},\quad \ldots$$

وهي الحلول الاولى والثانية والثالثة ..... للمعادلة اعلاه . ان قيم λ ، بحيث تكون $J_m(\lambda r)$ حلولاً للمعادلة التفاضلية وتحقق الشرط الحدودي وهي :

$$\lambda_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{a},\quad m = 0, 1, 2, \ldots,\quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

والان ، بعد ان حددنا الدالتين R و Θ ، يمكن ان نجد ϕ . لكل $m = 1,2,3,\ldots$ و $n = 1,2,3,\ldots\ldots$ ، وكلتا الدالتين

$$J_m(\lambda_{mn}r)\cos m\Theta,\quad J_m(\lambda_{mn}r)\sin m\theta \qquad (21)$$

هما حلان للمسألة في معادلة (18) ، وكلاهما يقابلان نفس القيمة الذاتية λ_{mn}^2 . لكل $m = 0$ و $n = 1,2,3,\ldots.$ ويكون لدينا الدوال

$$J_0(\lambda_{0n}r) \qquad (22)$$

والتي تقابل القيم الذاتية λ_{0n}^2 . (قارن مع الحالة البسيطة .) الدالة $T(t)$ والتي هي للمعادلة (17) هي اي تركيب لـ $\cos\lambda_{mn}ct$ و $\cos\lambda_{mn}ct$.

والان ، حلول المعادلات (11) ـ (14) تكون بأحد الصيغ الأتية :

$$\begin{aligned} &J_m(\lambda_{mn}r)\cos m\theta\cos\lambda_{mn}ct,\quad J_m(\lambda_{mn}r)\sin m\theta\cos\lambda_{mn}ct \\ &J_m(\lambda_{mn}r)\cos m\theta\sin\lambda_{mn}ct,\quad J_m(\lambda_{mn}r)\sin m\theta\sin\lambda_{mn}ct \end{aligned} \qquad \begin{matrix}(23)\\(13)\end{matrix}$$

حيث $m = 1,2,3,\ldots$ و $n = 1,2,3,\ldots$. بالاضافة الى ذلك ، توجد حالة خاصة عندما $m = 0$، وتكون الحلول بالصيغ

$$J_0(\lambda_{0n}r)\cos\lambda_{0n}ct,\quad J_0(\lambda_{0n}r)\sin\lambda_{0n}ct. \qquad (24)$$

والحل العام للمسألة في المعادلات (11) ـ (14) يكون على شكل تركيب خطي من الحلول اعلاه . وسوف تستخدم عدة سلاسل لتكوين التركيب :

$$\begin{aligned} u(r,\theta,t) = \sum_n a_{0n}J_0(\lambda_{0n}r)\cos\lambda_{0n}ct \\ &+ \sum_{m,n} a_{mn}J_m(\lambda_{mn}r)\cos m\theta\cos\lambda_{mn}ct \\ &+ \sum_{m,n} b_{mn}J_m(\lambda_{mn}r)\sin m\theta\cos\lambda_{mn}ct \\ &+ \sum_n A_{0n}J_0(\lambda_{0n}r)\sin\lambda_{0n}ct \\ &+ \sum_{m,n} A_{mn}J_m(\lambda_{mn}r)\cos m\theta\sin\lambda_{mn}ct \end{aligned} \qquad (25)$$

$$+ \sum_{m,n} B_{mn} J_m(\lambda_{mn} r) \sin m\theta \sin \lambda_{mn} ct.$$

عندما $t = 0$ ، المجاميع الثلاثة الاخيرة تختفي ، وان جيب تمام t في المجاميع الثلاثة الاولى يجب ان تساوي 1 . لذلك فأن :

$$u(r, \theta, 0) = \sum_n a_{0n} J_0(\lambda_{0n} r) + \sum_{m,n} a_{mn} J_m(\lambda_{mn} r) \cos m\theta$$

$$+ \sum_{m,n} b_{mn} J_m(\lambda_{mn} r) \sin m\theta \qquad (26)$$

$$= f(r, \theta), \quad 0 < r < a, \quad -\pi < \theta \leq \pi.$$

ونتوقع ان هذه المساواة تتحقق وذلك باختيار as و bs حسب مبدأ التعامدية . وكون كل دالة موجودة في السلسلة هي دالة ذاتية للمسألة :

$$\nabla^2 \phi = -\lambda^2 \phi, \quad 0 < r < a, \quad -\pi < \theta \leq \pi$$

$$\phi(a, \theta) = 0, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

$$\phi(r, -\pi) = \phi(r, \pi), \quad \frac{\partial \phi}{\partial \theta}(r, -\pi) = \frac{\partial \phi}{\partial \theta}(r, \pi), \quad 0 < r < a,$$

ونتوقع ان تكون متعامدة مع بعضها (لاحظ بند (4) تمرين (7)) . وهذه بالحقيقة صحيحة : اي دالة من احد السلاسل تكون عمودية على جميع الدوال في السلاسل الاخرى ، وكذلك بالنسبة لبقية الدوال وسلاسلها . ولتوضيح هذه التعامدية ، لدينا :

$$\int\int_R J_0(\lambda_{0n} r) J_m(\lambda_{mn} r) \cos m\theta \, dA$$

$$= \int_0^a J_0(\lambda_{0n} r) J_m(\lambda_{mn} r) \int_{-\pi}^{\pi} \cos m\theta \, d\theta \, r \, dr = 0, \quad m \neq 0. \quad (27)$$

وتوجد علاقتان اخريتان تشبه هذه العلاقة وتشمل دوالاً ضمن سلسلتين مختلفتين :

فمن المعروف ان الدوال في السلسلة الاولى تكون متعامدة مع بعضها :

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{a} J_0(\lambda_{0n}r)J_0(\lambda_{0q}r)r\,dr\,d\theta = 0, \quad n \neq q.$$

اما في السلسلة الثانية فيجب ان نبين انهُ ، اذا كان $m \neq p$ او $n \neq q$ ، فأن

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{a} J_m(\lambda_{mn}r)\cos m\theta\, J_p(\lambda_{pq}r)\cos p\theta\, r\,dr\,d\theta. \qquad (28)$$

(تذكر ان $r\,dr\,d\theta = dA$ في الصيغة القطبية .) واذا اخذنا التكامل بالنسبة لـ θ اولاً ، نلاحظ ان التكامل يجب ان يساوي صفراً اذا كان $m \neq p$ ، لان $\cos m\theta$ و $\cos p\theta$ متعامدان . واذا كان $m = p$ ، فأن التكامل اعلاه يصبح ؛

$$\pi\int_{0}^{a} J_m(\lambda_{mn}r)J_m(\lambda_{mq}r)r\,dr$$

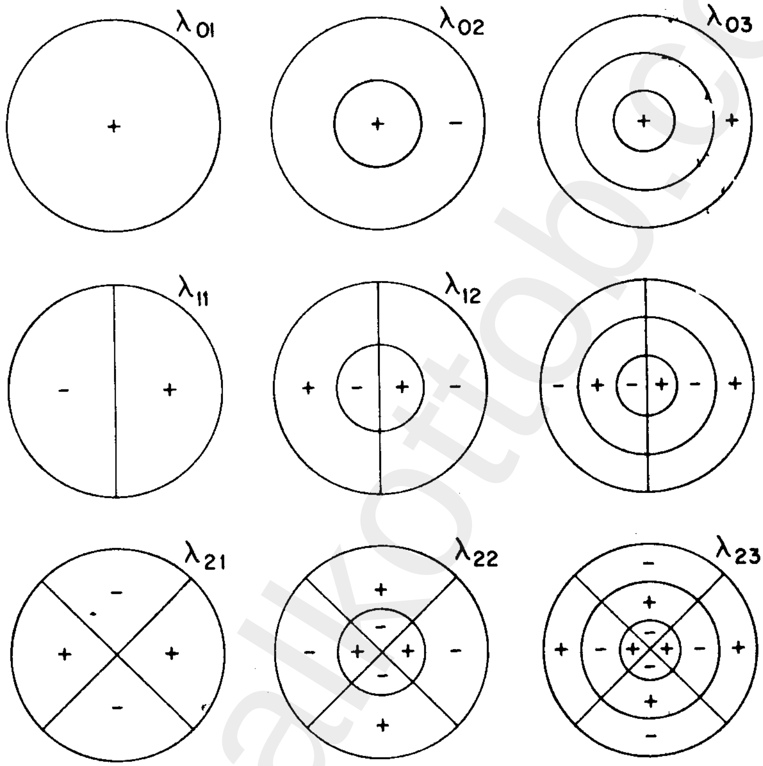
بعد التكامل بالنسبة لـ θ . اخيراً ، اذا كان $n \neq q$ ، فأن هذا التكامل يساوي صفراً . وهذه الخطوات تشبه البرهان الذي استخدم في برهان سترم ـ ليوفلي . نلاحظ الدوال في السلسلة الثانية فأنها تكون عمودية على بعضها . اما بالنسبة للدوال في السلسلة الاخيرة ، فأن برهان التعامدية يتم بشكل مشابه . باستخدام علاقة التعامدية ، ويمكن ان نحدد صيغ لـ as و bs . فمثلاً

$$a_{0n} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{a} f(r,\theta)J_0(\lambda_{0n}r)r\,dr\,d\theta}{2\pi\int_{0}^{a} J_0^2(\lambda_{0n}r)r\,dr}. \qquad (29)$$

As و Bs يمكن حسابهما من الشرط الابتدائي الثاني .

ومن الواضح الان ان حسابات الحل للمسألة الاصلية ممكنة من الناحية النظرية ، ولكنهُ بعيد جداً عن التطبيق . واسوأ هذه الحالات هي الصيغة الاخيرة بحل المعادلة (25) كونها لا تعطي فكرة واضحة عن u . ويمكن القول ، من خلال فحص λs ان النغمة الصادرة ليست موسيقية ـ اي ان u ليست دورية في t . كذلك يمكن رسم بعض الاشكال الاساسية لاهتزازات الغشاء المقابل لبعض

القيم الذاتية (شكل 10ـ 5) . فالمنحنيات تُمثل النقاط التي تكون ازاحتها صفراً في هذه الهيئة (منحنيات عقدية) (nodal curves)



شكل (10 ـ 5). منحنيات عقدية : المنحنيات في هذه المخططات تمثل حلول $\phi_{mn}(r, \theta) = 0$. والمناطق المجاورة لها بروزات عليا وسفلى تبعاً للاشارة . واستخدمت ϕs التي تحتوي على عامل $\cos m\theta$ فقط .

تمارين

1 . بين ان كلاً من الدوال في السلسلة في معادلة (10) تحقق المعادلات (1) ، (2) و (8) .

2 . اشتق صيغ as ، bs للمعادلة (10) .

3 . اذكر اوطأ خمس ذبذبات لتردد الغشاء الدائري .

4 . ارسم مخطط الدالة $J_0(\lambda_n r)$ ، حيث $n = 1, 2, 3$

5 . ما هي الشروط الحدودية التي تحققها الدالة ϕ للمعادلة (18) ؟

6 . برر اشتقاق المعادلتين (19) ، (20) من المعادلات (12) ـ (14) ، (18) .

7 . بين ان :

$$\int_0^a J_m(\lambda_{mn}r)J_m(\lambda_{mq}r)r\,dr = 0, \quad n \neq q$$

واذا كان :

$$J_m(\lambda_{ms}a) = 0, \quad s = 1, 2, \ldots .$$

8 . ارسم مخططات الدوال العقدية للدوال الذاتية معادلة (21) المقابلة لـ $\lambda_{31}, \lambda_{32}, \lambda_{33}$

8 . بعض التطبيقات على دوال بيسل

SOME APPLICATIONS OF BESSEL FUNCTIONS

تعتبر دوال بيسل من الدوال المهمة في الهندسة والفيزياء . وتكمن هذه الاهمية في كون ان هذه الدوال تحل معادلة تفاضلية عامة . فالحل العام لـ

$$\phi'' + \frac{1 - 2\alpha}{x}\phi' + \left[(\lambda\gamma x^{\gamma-1})^2 - \frac{p^2\gamma^2 - \alpha^2}{x^2}\right]\phi = 0 \qquad (1)$$

هو

is

$$\phi(x) = x^{\alpha}[AJ_p(\lambda x^{\gamma}) + BY_p(\lambda x^{\gamma})].$$

وادناه المسائل التي تلعب فيها دوال بيسل دوراً مهماً . تفاصيل فصل المتغيرات ، التي استخدمت بكثرة ، سوف تستخدم بأقل ما يمكن .

A. معادلة الجهد في اسطوانة

POTENTIAL EQUATION IN A CYLINDER

ان توزيع درجة حرارة حالة الاستقرار في اسطوانة دائرية ذات سطح معزول تحدد بالمسألة

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 < r < a, \quad 0 < z < b \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(a, z) = 0, \quad 0 < z < b \qquad (3)$$

$$u(r, 0) = f(r), \quad 0 < r < a \qquad (4)$$

$$u(r, b) = g(r), \quad 0 < r < a \qquad (5)$$

هذا نعتبر الشروط الحدودية ـ مستقلة عن θ ، لذلك ، فان u مستقلة عن θ كذلك .

افرض الان ان ؛ $u = R(r)Z(z)$ فنجد ان ؛

$$(rR')' + \lambda^2 rR = 0, \quad 0 < r < a \qquad (6)$$

$$R'(a) = 0 \qquad (7)$$

$$|R(0)| \quad \text{مقيدة} \qquad (8)$$

$$Z'' - \lambda^2 Z = 0. \qquad (9)$$

واضفنا الشرط (8) لان $r = 0$ نقطة شاذة فحل المعادلات (6) ـ (8) هو ؛

$$R_n(r) = J_0(\lambda_n r) \qquad (10)$$

حيث ان القيم الذاتية λ_n معرفة بالحلول لـ

$$R'(a) = \lambda J_0'(\lambda a) = 0. \qquad (11)$$

وكون $J_0' = -J_1$ فان الـ λs لها علاقة مع اصفار J_1 . والقيم الذاتية الثلاثة الاولى هي ؛ $(3.832/a)^2$, 0, $(7.016/a)^2$ لاحظ ان $R(0) = J_0(0) = 1$ في

وان حل المسألة في المعادلات (2) ـ (5) يمكن وضعها بالصيغة

$$u(r, z) = a_0 + b_0 z + \sum_{n=1}^{\infty} J_0(\lambda_n r)\left[a_n \frac{\sinh \lambda_n z}{\sinh \lambda_n b} + b_n \frac{\sinh \lambda_n (b - z)}{\sinh \lambda_n b}\right].$$

والمعاملات b_s , a_s يمكن تحديدها من المعادلتين (4) , (5) باستخدام العلاقة التعامدية .

$$\int_0^a J_0(\lambda_n r)J_0(\lambda_m r)r\,dr = 0, \quad n \neq m.$$

B الموجات الكروية : SPHERICAL WAVES

في الاحداثيات الكروية (ρ, θ, ϕ)، مؤثر لا بلاس ∇^2 يصبح

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2 \sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{\partial u}{\partial\phi}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}.$$

تأمل مسألة الموجة في كرة عندما تعتمد الشروط الابتدائية على الاحداثيات النصف قطرية (radial coordinate)

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\sigma}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < \rho < a, \quad 0 < t \tag{13}$$

$$u(a, t) = 0, \qquad 0 < t \tag{14}$$

$$u(\rho, 0) = f(\rho), \qquad 0 < \rho < a \tag{15}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\rho, 0) = g(\rho), \qquad 0 < \rho < a. \tag{16}$$

بفرض $u(\rho, t) = R(\rho)T(t)$ ، فنفصل المتغيرات لنحصل على :

$$T'' + \lambda^2 c^2 T = 0 \tag{17}$$

$$(\rho^2 R')' + \lambda^2\rho^2 R = 0, \quad 0 < \rho < a \tag{18}$$

$$R(a) = 0 \tag{19}$$

$$|R(0)| \quad \text{مقيدة} \tag{20}$$

مرة اخرى ، اضفنا الشرط (20) لان $\rho = 0$ نقطة شاذة والمعادلة (18) يمكن وصفها بالشكل :

$$R'' + \frac{2}{\rho}R' + \lambda^2 R = 0$$

وبمقارنتها مع المعادلة (1) يتبين لنا ان $\alpha = -\frac{1}{2}$، $\gamma = 1$ و $\rho = \frac{1}{2}$ وبهذا يكون الحل العام للمعادلة (18) هو :

$$R(\rho) = \rho^{-1/2}[AJ_{1/2}(\lambda\rho) + BY_{1/2}(\lambda\rho)].$$

وكما نعلم فانه بالقرب من $\rho = 0$ يكون ،

$J_{1/2}(\lambda\rho) \sim \rho^{1/2}$ x ثابت

$Y_{1/2}(\lambda\rho) \sim \rho^{-1/2}$ x ثابت

ولكي تتحقق المعادلة(20) فان B يجب ان تساوي صفراً . ومن الممكن ان نبين ان ؛

$$J_{1/2}(\lambda\rho) = \frac{2}{\pi}\frac{\sin\lambda\rho}{\sqrt{\lambda\rho}}, \quad Y_{1/2}(\lambda\rho) = -\frac{2}{\pi}\frac{\cos\lambda\rho}{\sqrt{\lambda\rho}}.$$

وبهذا يكون حل المعادلتين (18) , (20) هو ؛

$$R(\rho) = \frac{\sin\lambda\rho}{\rho} \tag{21}$$

وان المعادلة (19) تتحقق عندما يكون $\lambda_n^2 = (n\pi/a)^2$. وحل المسألة في المعادلات (13) ـ (16) يمكن كتابته بالشكل الاتي ؛

$$u(\rho, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\lambda_n\rho}{\rho}[a_n \cos\lambda_n ct + b_n \sin\lambda_n ct]. \tag{22}$$

والمعاملات as ، bs ، يتم اختيارها بحيث تتحقق الشروط الابتدائية للمعادلتين (15) , (16) .

C ـ الضغط في التحميل PRESSURE IN A BEARING

الضغط داخل طائرة محملة يحقق المسألة

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3\frac{\partial p}{\partial x}\right) + x^3\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -1, \quad a < x < b, \quad -c < y < c \tag{23}$$

$$p(a, y) = 0, \quad p(b, y) = 0, \quad -c < y < c \tag{24}$$

$$p(x, -c) = 0, \quad p(x, c) = 0, \quad a < x < b. \tag{25}$$

(حيث ان b , a ثابتان موجبان وان $b = a + 1$) المعادلة (23) تكون قطعياً ناقصاً وغير متجانسة . ولاختزال هذه المعادلة الى معادلة اكثر شهرة ، نفرض ان $p(x, y) = v(x) + u(x, y)$ ، حيث $v(x)$ تحقق المسألة :

$$(x^3 v')' = -1, \quad a < x < b \tag{26}$$

$$v(a) = 0, \quad v(b) = 0. \tag{27}$$

واذا وجدنا v ، فان u يجب ان تكون حلاً للمسألة :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 \frac{\partial u}{\partial x}\right) + x^3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad a < x < b, \quad -c < y < c \tag{28}$$

$$u(a, y) = 0, \qquad u(b, y) = 0, \quad -c < y < c \tag{29}$$

$$u(x, \pm c) = -v(x), \quad a < x < b. \tag{30}$$

واذا فرضنا الان ان $u(x, y) = X(x)Y(y)$ ، فإن المتغييرات يمكن فصلها :

$$(x^3 X')' + \lambda^2 x^3 X = 0, \quad a < x < b \tag{31}$$

$$X(a) = 0, \quad X(b) = 0 \tag{32}$$

$$Y'' - \lambda^2 Y = 0, \quad -c < y < c. \tag{33}$$

والمعادلة (31) يمكن وضعها بالصيغة الاتية :

$$X'' + \frac{3}{x}X' + \lambda^2 X = 0, \quad a < x < b.$$

وبمقارنتها مع المعادلة (1) نجد ان $\alpha = -1$ ، $\gamma = 1$ ، $p = 1$ ، وان الحل العام للمعادلة (31) هو .

$$X(x) = \frac{1}{x}\left(AJ_1(\lambda x) + BY_1(\lambda x)\right).$$

وكون النقطة $x = 0$ ليست ضمن الفترة $a < x < b$ لذلك لاتوجد مسألة مع التقييد . وبدلاً عن ذلك ، يجب ان نحقق الشروط الحدودية للمعادلة (32) ، وبعد اجراء بعض العمليات الجبرية نجد ان :

$$AJ_1(\lambda a) + BY_1(\lambda a) = 0,$$
$$AJ_1(\lambda b) + BY_1(\lambda b) = 0.$$

ليس كلاً من A وB تساوي صفراً . لذلك فان محدد هاتين المعادلتين يجب ان يساوي صفراً :

$$J_1(\lambda a)Y_1(\lambda b) - J_1(\lambda b)Y_1(\lambda a) = 0.$$

وبعض حلول هذه المعادلة مجدولة لبعض القيم لـ b/a . فمثلاً ، اذا حصل $b/a = 2.5$ ، فان القيم الذاتية الثلاثة الاولى لـ λ^2 هي :

$$\left(\frac{2.156}{a}\right)^2, \quad \left(\frac{4.223}{a}\right)^2, \quad \left(\frac{6.307}{a}\right)^2.$$

والان ، نأخذ X_n على انها :

$$X_n(x) = \frac{1}{x}\left(Y_1(\lambda_n a)J_1(\lambda_n x) - J_1(\lambda_n a)Y_1(\lambda_n x)\right) \qquad (34)$$

لذلك فان حل المعادلات (38) ـ (30) يكون بالصيغة :

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x) \frac{\cosh \lambda_n y}{\cosh \lambda_n c}. \qquad (35)$$

لقد تم اختيار as كي تحقق الشروط الحدودية في معادلة (30) . وباستخدام مبدأ التعامدية :

$$\int_a^b X_n(x)X_m(x)x^3\, dx = 0, \quad n \neq m.$$

نلاحظ ان المعادلتين (31) , (32) تشكل مسألة سترم ـ ليوفلي المنتظمة .

تمارين

1 . جد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$(x^n\phi')' + \lambda^2 x^n \phi = 0$$

حيث $n = 0,1,2,000$

2 . جد حل المعادلة في تمرين (1) الذي يكون مقيداً عند $x = 0$.

3 . جد حلول المعادلة (9) ، التي تشمل الحالة عندما $\lambda^2 = 0$ وبرهن على ان المعادلة (12) ، هي حل للمعادلات (2) ـ (4) .

4 . بيّن ان اية دالة بالصيغة الاتية :

$$u(\rho, t) = \frac{1}{\rho}\left(\phi(\rho + ct) + \psi(\rho - ct)\right)$$

هي حل للمعادلة (13) اذا كانت ϕ , ψ لهما مشتقتين على الاقل .

5 . جد دالتين ϕ , ψ , بحيث تكون $u(\rho, t)$ كما في تمرين (4) تحقق المعادلات (14) ـ (16) .

6 . اعط صيغة as , bs في معادلة (12) .

7 . ما هي علاقة التعامدية للدوال الذاتية للمعادلات (18) ـ (20) ؟ استخدم هذه النتيجة لايجاد as , bs في معادلة (22) .

8 . ارسم مخططات بعض الدوال الذاتية الاولى للمعادلات (18) ـ (20) .

9 . جد الدالة $v(x)$ التي هي حل للمعادلات (26) , (27) .

10 . استخدم التكنيك في مثال C لتحويل المسألة الاتية الى مسألة الجهد :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b,$$

$u = 0$ في جميع الحدود .

11 . هل ان التكنيك نفسه يسري اذا استبدلنا $f(x)$ بـ $f(x, y)$ ؟

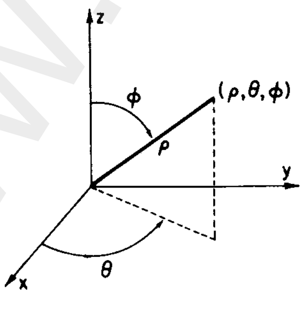
12 . بين ان المعادلتين (31) , (32) هما مسألة سترم ـ ليوفلي المنتظمة . بين تعامدية الدوال الذاتية وذلك باستخدام تعامدية دوال بيسل .

13 . جد صيغة لـ a_n للمعادلة (35) .

14 . بين ان المعادلة (34) هي حل للمعادلات (28) ـ (30) .

9 . الاحداثيات الكروية ؛ حدوديات ليجندر
SPHERICAL COORDINATES; LEGENDRE POLYNOMIALS

بعد ان تعرفنا على منظومات الاحداثيات الديكارتية والاسطوانية ، فان اكثر الاحداثيات استخداماً هي الاحداثيات الكروية (شكل 11 ـ 5) ، حيث ؛



شكل (11 ـ 5) . الاحداثيات الكروية

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta$$
$$y = \rho \sin \phi \sin \theta$$
$$z = \rho \cos \phi.$$

والمتغييرات مقيدة بـ $0 \le \rho,\ 0 \le \theta < 2\pi,\ 0 \le \phi \le \pi$ وفي منظومة الاحداثيات هذه ، مؤثر لابلاس يكون :

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho^2}\left\{\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\sin \phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\sin \phi \frac{\partial u}{\partial \phi}\right) + \frac{1}{\sin^2 \phi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right\}$$

نتيجة لما لاحظناه في الحالات الاخرى ، نتوقع مسائل قابلة الحل في الاحداثيات الكروية لكي تختزل الى احد الحالات الاتية :

مسألة (1) : $\nabla^2 u = -\lambda^2 u$ في R ، زائداً الشروط الحدودية المتجانسة

مسألة (2) : $\nabla^2 u = 0$ في R ، زائداً الشروط الحدودية المتجانسة على جوانب متقابلة (حيث R هو المستطيل العام في الاحداثيات الكروية) .

المسألة (1) : تأتي من معادلة الحرارة او الموجة بعد فصل متغير الزمن . والمسألة (2) هي جزء من مسألة الجهد .

والحل الكامل لاحد هاتين المسألتين معقد جداً ، ولكن بعض الحالات الخاصة تكون بسيطة ، ومهمة ومعروفة . وقد لاحظنا اصلاً حل المسألة 1 (بند 8) عندما تكون u دالة بدلالة ρ فقط والحالة المهمة الثانية هي المسألة (2) . عندما تكون u مستقلة عن θ .

سوف نذكر الان مسألة القيم الحدودية الكاملة ونحلها بطريقة فصل المتغيرات .

$$\frac{1}{\rho^2}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{\partial u}{\partial\phi}\right)\right\}=0, \qquad (1)$$

$$0<\rho<c,\quad 0<\phi<\pi$$

$$u(c,\phi)=f(\phi),\quad 0<\phi<\pi. \qquad (2)$$

ومن الفرضية $u(\rho,\phi)=R(\rho)\Phi(\phi)$، نجد ان

$$\frac{(\rho^2R'(r))'}{R(r)}+\frac{(\sin\phi\,\Phi'(\phi))'}{\sin\phi\,\Phi(\phi)}=0.$$

وكلا الحدين يساوي ثابتاً، وان الثاني يكون سالباً، μ^2، لان الشرط الحدودي عند $\rho=c$ يتحقق بالتركيب الخطي لدوال ϕ. والمعادلات المنفصلة هي :

$$(\rho^2R')'-\mu^2R=0,\quad 0<\rho<c \qquad (3)$$

$$(\sin\phi\,\Phi')'+\mu^2\sin\phi\,\Phi=0,\quad 0<\phi<\pi. \qquad (4)$$

اي ان كلًا من المعادلتين اعلاه ليس لهما شرط حدودي. لكن $\rho=0$ هي نقطة شاذة للمعادلة الاولى وان كلًا من $\phi=0$، $\phi=\pi$ نقطة شاذة للمعادلة الثانية. (في هذه النقاط، معامل اعلى رتبة مشتقة يساوي صفراً، بينما بعض المعاملات الاخرى ليست اصفاراً.) عند كل نقطة من النقاط الشاذة، نضع شرط التقييد وهو :

$\Phi(\pi)$ $\Phi(0)$ $R(0)$ مقيدة

ويمكن تبسيط المعادلة الثانية وذلك بتبديل المتغيرات $x=\cos\phi$، $\Phi(\phi)=y(x)$ وباستخدام قاعدة السلسلة، تكون المشتقات المطلوبة هي :

$$\frac{d\Phi}{d\phi}=-\sin\phi\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d}{d\phi}\left(\sin\phi\frac{d\Phi}{d\phi}\right)=\sin^3\phi\frac{d^2y}{dx^2}-2\sin\phi\cos\phi\frac{dy}{dx}.$$

والمعادلة التفاضلية تصبح :

$$\sin^2\phi\frac{d^2y}{dx^2}-2\cos\phi\frac{dy}{dx}+\mu^2y=0$$

او، بدلالة x فقط

$$(1-x^2)y''-2xy'+\mu^2y=0,\quad -1<x<1. \qquad (5)$$

وبالاضافة الى ذلك ، نحتاج ان تكون $y(x)$ مقيدة عند $x = \pm 1$.

حلول المعادلة التفاضلية نجدها عادة بطريقة سلاسل القوى . افرض ان $y(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k + \cdots$. عندئذ ، حدود المعادلة التفاضلية هي :

$$\begin{aligned}
y'' &= 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + 4 \cdot 3a_4 x^2 + \cdots + (k+2)(k+1)a_{k+2} x^k + \cdots \\
-x^2 y'' &= \qquad\qquad\qquad -2a_2 x^2 - \cdots \qquad -k(k-1)a_k x^k + \cdots \\
-2xy' &= \qquad -2a_1 x \quad -2a_2 x^2 - \cdots \qquad -2ka_k x^k - \cdots \\
\mu^2 y &= \mu^2 a_0 + \mu^2 a_1 x + \mu^2 a_2 x^2 + \cdots \qquad + \mu^2 a_k x^k + \cdots.
\end{aligned}$$

واذا جمعنا هذه المعادلات ، فان الطرف الإيسر يساوي صفراً حسب المعادلة التفاضلية فان مجموع الطرف الايسر هو متسلسلات القوى . في كل منها المعاملات ويجب ان تساوي صفراً ، وبهذا نحصل على العلاقات الاتية .

$$2a_2 + \mu^2 a_0 = 0$$

$$6a_3 + (\mu^2 - 2)a_1 = 0$$

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} + [\mu^2 - k(k+1)]a_k = 0.$$

الصيغة الاخيرة تشمل اول معادلتين يبدو انها حالة خاصة . نكتب الان العلاقة العامة بالشكل .

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1) - \mu^2}{(k+2)(k+1)} a_k$$

والتي تتحقق لكل $k = 0, 1, 2, \ldots.$

نفرض الان ان μ^2 معلومة . وباجراء عمليات حسابية قصيرة نجد بعض المعاملات الاولى مثل :

$$a_2 = \frac{-\mu^2}{2} a_0, \qquad a_3 = \frac{2 - \mu^2}{6} a_1$$

$$a_4 = \frac{6 - \mu^2}{12} a_2, \qquad a_5 = \frac{12 - \mu^2}{20} a_3$$

$$= \frac{6 - \mu^2}{12} \cdot \frac{-\mu^2}{2} a_0, \qquad = \frac{12 - \mu^2}{20} \cdot \frac{2 - \mu^2}{6} a_1.$$

ومن الواضح ان كل الـ as بدليل زوجي هي من مضروبات a_0 ، وذات الدليل الفردي هي من مضروبات a_1 . لذلك ، فان $y(x)$ تساوي a_0 مضروباً في دالة زوجية زائداً a_1 مضروباً بدالة فردية ، حيث a_0 , a_1 اختياريان وليس من الصعوبة ان نثبت ان السلاسل الزوجية والفردية التي نحصل عليها بهذه الطريقة تكون متباعدة عند $x = \pm 1$ لكل μ^2 . ومن الناحية الاخرى عندما تكون لـ μ^2 احد القيم الخاصة

$$\mu^2 = \mu_n^2 = n(n + 1), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

فان احدى السلسلتين تكون معاملاتها اصفاراً بعد a_n. فمثلاً ، اذا كانت $\mu^2 = 3 \cdot 4$ ، فان $a_5 = 0$ وان جميع المعاملات التي تعقبها والتي دليلها فردياً تساوي صفراً . وبهذا يكون احد حلول المعادلة

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0$$

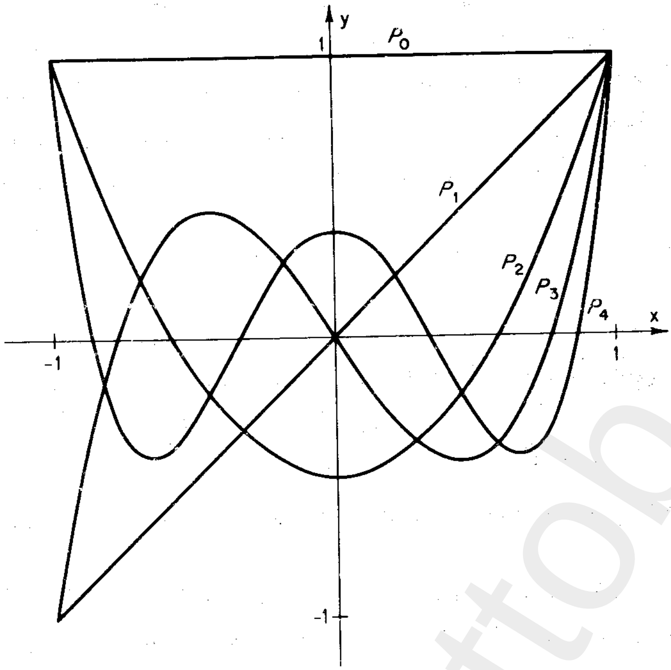
هو الحدودية $a_1(x - 5x^3/3)$ الحل الاخر هو دالة زوجية غير مقيدة عند $x = \pm 1$

والان نلاحظ ان شروط التقييد يمكن تحقيقه فقط اذا كانت μ^2 هي احدى الاعداد ... $0, 2, 6, \ldots, n(n + 1)$ وفي مثل هكذا حالة ، فان احد حلول المعادلة التفاضلية هو حدودية (مقيدة عند $x = \pm 1$) . وعندما نضع الشرط $y(1) = 1$، عندها تسمى هذه حدوديات ليجندر (*Legendre poly- nomials*) وتكتب $P_n(x)$. في الجدول (3 ـ 5) يوجد اول خمس حدوديات ليجندر . والشكل (12 ـ 5) يبين مخططاتها .

جدول (3 ـ 5)

حدوديات ليجندر

$P_0(x) = 1$
$P_1(x) = x$
$P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$
$P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$
$P_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8$



شكل (12 ـ 5) . مخططات اول خمس حدوديات ليجندر .

بما ان المعادلة التفاضلية (5) يمكن وضعها بسهولة بصيغة المصاحب الذاتي (self-adjoint)

$$((1 - x^2)y')' + \mu^2 y = 0, \quad -1 < x < 1,$$

فمن السهولة ان نبين ان حدوديات ليجندر تحقق العلاقة التعامدية

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\, dx = 0, \quad n \neq m.$$

وبالحساب المباشر ، يمكن ان نبين ان :

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}. \tag{6}$$

الطريقة الاساسية لتمثيل حدوديات ليجندر هي بدلالة صيغة روجرس (Rodrigues' formula)

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]. \tag{7}$$

ومن المعلوم ان المشتقة n لـ$(x^2-1)^n$هي حدودية من الدرجة n . وبتعويض هذه الحدودية في المعادلة التفاضلية (5) ، وبوضع$\mu=n(n+1)$يتبين لنا ان هذا هو الحل وهو مقيد بالطبع . لذلك ، فهو من مضروبات حدودية ليجندر $P_n(x)$. ومن خلال صيغة روجرس او خلافه ، فمن الممكن ان نثبت الصيغتين الاتيتين ، ترتبطان مع حدوديات ليجندر الثلاثة المتعاقبة :

$$(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) \tag{8}$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) = (2n+1)xP_n(x). \tag{9}$$

نعود الان الى مسألتنا الاصلية . بعد ان وجدنا الدوال الذاتية

$$(\sin\phi\Phi')' + \mu^2\sin\phi\Phi = 0, \quad 0<\phi<\pi$$

هي$\Phi_n(\phi) = P_n(\cos\phi)$وتقابل القيم الذاتية $\mu_n{}^2 = n(n+1)$

هنا يجب ان نحل المعادلة (3) لـ R . بعد اجراء الاشتقاق ، فان المسألة R تصبح :

$$\rho^2R_n'' + 2\rho R_n' - n(n+1)R_n = 0, \quad 0<\rho<c$$

R_n مقيدة عند $\rho = 0.$

والمعادلة التي هي من نوع كوشي ــ اويلر ، يتم حلها وذلك بفرض ان$R=\rho^\alpha$ وتحديد α . الحلات ρ^n, $\rho^{-(n+1)}$ تم ايجادهما عندما يكون الثاني غير مقيد عند $\rho = 0$ لذلك $R_n = \rho^n$،وان حلول الجداء لمعادلة الجهد تكون بالشكل الاتي :

$$u_n(\rho,\phi) = R_n(\rho)\Phi_n(\phi) = \rho^nP_n(\cos\phi).$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية والمقيدة في المنطقة$0<\rho<c$ و$0<\phi<\pi$هو التركيب الخطي :

$$u(\rho,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\rho^nP_n(\cos\phi).$$

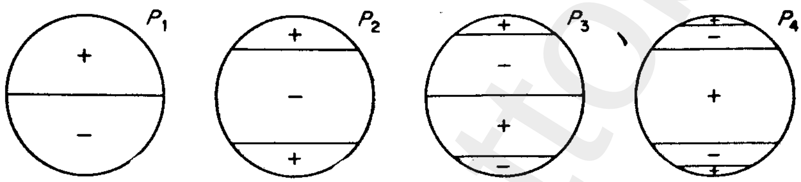
عند $\rho = c$عندئذ يصبح الشرط الحدودي هو

$$u(c,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} b_nc^nP_n(\cos\phi) = f(\phi), \quad 0<\phi<\pi.$$

والمعاملات b_n يتم ايجادها ، باستخدام العلاقة التعامدية للدوال $P_n(\cos \phi)$ وهي

$$b_n = \frac{2n + 1}{2c^n} \int_0^\pi f(\phi)P_n(\cos \phi) \sin \phi \, d\phi. \qquad (10)$$

ولعدد من الدوال البسيطة f ، هذه المعاملات يمكن ايجادها ضمنياً .
وحدوديات ليجندر $P_n(\cos \phi)$ تسمى عادة توافقيات مناطقية (*zonalharmonics*) لان الخط العقدي (المحل الهندسي لحلول $P_n(\cos \phi)=0$) يقسم الكرة الى مناطق ، كما مبين في الشكل (13 ـ 5) .



شكل (13 ـ 5) . المنحنيات العقدية للتوافقيات المناطقية هي المتوازيات (ثابت ϕ) على الكرة عندما $P_n(\cos \phi) = 0$ والمنحنيات العقدية مبينة مسقطياً عند $n = 1, 2, 3, 4$.

تمارين

1 . المعادلة (4) يمكن حلها وذلك بفرض ان :

$$\Phi(\phi) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^\infty a_k \cos k\phi.$$

جد العلاقات من بين المعاملات a_k وذلك بحساب حدود المعادلة في صيغة السلسلة . وباستخدام :

$$\sin \phi \sin k\phi = \frac{1}{2}[\cos(k - 1)\phi - \cos(k + 1)\phi].$$

يظهر ان جميع المعاملات تساوي صفراً بعد a_n اذا كان $\mu^2 = n(n + 1)$.

2 . اشتق صيغة للمعاملات b_n، كما مبين في معادلة (10) .

3 . جد $P_5(x)$.

4 . تحقق من صحة صيغة للمعادلة (6) لبعض حدوديات ليجندر الاولى .

5 . احد الحلول المعادلة $(1 - x^2)y'' - 2xy' = 0$ هو $y(x) = 1(\mu^2 = 0)$. جد الحل المستقل الاخر لهذه المعادلة التفاضلية .

6 . بين ان العلاقة التعامدية للدوال الذاتية $\Phi_n(\phi) = P_n(\cos\phi)$ هي

$$\int_0^{\pi} \Phi_n(\phi)\Phi_m(\phi) \sin\phi \, d\phi = 0, \quad n \neq m.$$

7 . حل المسألة الاتية بطريقة فصل المتغيرات :

$$\frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{\partial u}{\partial\phi}\right)\right] = -\lambda^2 u,$$

$$0 < \rho < c, \quad 0 < \phi < \pi$$

$$u(c, \phi) = 0.$$

افرض ان $u(\rho, \phi) = R(\rho)\Phi(\phi)$ افصل Φ اولاً . لاحظ بند (8) ، معادلة (1) لتحديد R .

8 . لتكن $F = (x^2 - 1)^n$ بين ان F تحقق المعادلة التفاضلية

$$(x^2 - 1)F' = 2nxF.$$

9 . اشتق طرفي المعادلة اعلاه $n + 1$ مرة لتبين ان المشتقة برتبة n لـ F تحقق معادلة ليجندر (5) . واستخدم قاعدة ليبيز .

10 . احصل على معادلة (6) باجراء هذه التحويرات :

a. . اضرب المعادلة (9) بـ P_{n+1} وكامل من -1 الى 1 واستخدم التعامدية لـ P_{n+1} مع P_{n-1}.

b . استبدل $(2n + 1)P_n$ بواسطة المعادلة (8) .

c . P_{n+1} عمودي على xP'_{n-1}، وهو حدودية من الدرجة n .

d . حل ماتبقى من التكامل المطلوب .

11 . حل المسألة

$$\nabla^2 u = 0, \quad 0 < \rho < 1, \quad 0 < \phi < \pi$$

$$u(1, \phi) = \begin{cases} 1, & 0 < \phi < \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < \phi < \pi. \end{cases}$$

لاحظنا عدة مسائل في بعدين ، وهذه المسائل كافية لتوضيح الصعوبات التي قد تظهر . ان العائق الاساسي للحل بطريقة فصل المتغيرات هو السلسلة المزدوجة والتي تتقارب ببطء لذلك فان الحل العددي لمسألة البعدين يكون ضرورياً وعليه ، اذا كان المطلوب ايجاد حل عددي لمسألة ذات بعدين فانه من المفيد ان نتجنب الحل التحليلي وباستخدام التكنيك العددي التقريبي من البداية .

واحدى الفوائد التي نتوخاها من استخدام منظومة احداثيات خاصة كون المسائل التي تكون ببعدين في الاحداثي الديكارتي يمكن ان تكون ببعد واحد في منظومة اخرى . هذه هي الحالة ، فمثلاً عندما تكون المسافة من نقطة (r في الاحداثيات القطبية او ρ في الاحداثيات الكروية) هي المتغيير الوحيد والهام . بالطبع فان المنظومة غير المستطيلة يمكن ان تظهر بشكل طبيعي من هندسة المسألة .

وبالرجوع الى البندين (3) و (4) ، فان حل معادلة الحرارة او الموجة ذات البعدين في المنطقة R في المستوي تعتمد على قدرتنا على حل مسائل القيم الذاتية ، $\nabla^2\phi = -\lambda^2\phi$ في R وان $\phi = 0$ على الحدود . ان حل هذه المسألة في منطقة مقيدة بمنحنيات احداثية (اي في مستطيل عام) تكون معروفة لعدة منظومات احداثية . وقد شرحنا اكثر الحالات شهرة ، اما الحالات الاخرى فيكن ايجادها في كتاب *Methods of Theoretical Physics* تاليف Morse و Feshbach 1953 ، والمعلومات حول الدوال الخاصة يمكن الاطلاع عليها في كتاب *Handbook of Mathematical Functions* تاليف Abra- mowitz و Stegun وكذلك كتاب *Engineers and Applied Mathematicians* تاليف L. C. Andrews 1985 ، والدوال الذاتية والقيم الذاتية معروفة في بعض المناطق التي هي ليست في المستطيل العام . (لاحظ التمارين المتنوعة تمرين (20) و (21) .

القيم الذاتية للابلاس في منطقة يمكن تقديرها بواسطة نسبة ريلاي في بند (5) فصل (3) . وبالاضافة الى ذلك ، لدينا مبرهنات من النوع التالي ؛ لتكن λ_1^2 اقل قيمة ذاتية لـ$\nabla\phi=-\lambda^2\phi$ في R و $\phi=0$ على الحدود . ولتكن $\overline{\lambda_1^2}$ لها المعنى نفسه لمنطقة اخرى $\overline{R}$ اذا كان $\overline{R}$ داخل R ، فان $\overline{\lambda_1^2} \geq \lambda_1^2$. (اصغر منطقة ، تعطي اكبر اول قيمة ذاتية .) ولمعلومات اخرى لاحظ *Methods of Mathematical Physics,* تاليف Courant و Hilbert ، 1953 1953 . وفي

مقالة مهمة بعنوان « هل يمكننا ان نسمع صوت الطبل » ؟ المجلة الرياضية الامريكية الشهرية ، 1966 . فان كاتبها السيد مازك كال بين انه يمكن ايجاد المساحة ، والمحيط للمنطقة من القيم الذاتية لمعادلة الجهد في المنطقة .

والمنحنيات العقدية للغشاء كما مبينة في الشكل (0 ـ 5) يمكن تصورها فيزياؤياً . وصور هذه المنحنيات ، مع الشرح الفيزياوي للغشاء المهتز يمكن ايجادها في 'The Physics of Kettledrums'' وهي المقالة التي كتبها السيد Thomas D. Rossing ، في *Scientific American,* عام 1982 .

تمارين متنوعة

1 . حل مسألة الحرارة

$$\nabla^2 u = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad 0 < t$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y, t) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(a, y, t) = 0, \quad 0 < y < b, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0, t) = 0, u(x, b, t) = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t$$

$$u(x, y, 0) = \frac{Tx}{a}, \qquad 0 < x < a, \quad 0 < y < b.$$

2 . اعد التمرين (1) ، ولكن بالشرط الا بتدائي .

$$u(x, y, 0) = \frac{Ty}{b}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b.$$

3 . لتكن $u(x, y, t)$ حلاً لمعادلة الحرارة في مستطيل كما مذكورة ادناه . جد التعبير لـ $u(a/2, b/2, t)$. واكتب الحدود غير الصفرية الثلاثة الاولى في حالة $a = b$.

على جميع الحدود

$$\nabla^2 u = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad 0 < t$$

$u = 0$ على جميع الحدود.

$$u((x, y, 0) = T, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b$$

4 . جد المستقيمات العقدية لغشاء مربع . وهذه هي الحال الهندسية للنقاط التي تحقق $\phi_{mn}(x, y) = 0$ حيث ϕ_{mn} وتحقق ؛
$\nabla^2\phi = -\lambda^2\phi$ في المربع وان $\phi = 0$ على الحدود .

5 . جد حل مسألة القيم الحدودية ؛

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = -1, \quad 0 < r < a$$

$u(a) = 0$ ، $u(0)$ مقيدة .

بشكل مباشر وبفرض ان $u(r)$ والدالة الثابتة اولهما سلسلة بيسل في الفترة $0 < r < a$:

$$u(r) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(\lambda_n r), \quad 0 < r < a$$

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(\lambda_n r), \quad 0 < r < a.$$

(تلميح ؛ $\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dJ_0(\lambda r)}{dr}\right) = -\lambda^2 J_0(\lambda r).\right)$

6 . افرض ان $w(x, t)$ و $v(y, t)$ هما حلان للمعادلتين التفاضلتين الجزيئتين ؛

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial w}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial v}{\partial t}.$$

بين ان $u(x, y, t) = w(x, t)\, v(y, t)$ تحقق معادلة الحرارة ذات البعدين .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}.$$

7 . استخدم فكرة تمرين 6 لحل المسألة المذكورة في التمرين (1) .

8 . لتكن $w(x, y)$ و $v(z, t)$ تحققان المعادلتين :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

بين ان الجداء $u(x, y, z, t) = w(x, y)v(z, t)$ يحقق معادلة الموجة ذات الثلاثة ابعاد

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

9 . جد حلول الجداء للمعادلة :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < r, \quad 0 < t$$

المقيدة عندما $r \to 0$ وعندما $r \to \infty$

10 . بين ان مسألة القيم الحدودية :

$$((1 - x^2)\phi')' = -f(x), \quad -1 < x < 1$$

$\phi(x)$ مقيدة عند $x = \pm 1$

لها حل هو :

$$\phi(x) = \int_0^x \frac{1}{1 - y^2} \int_y^1 f(z)\, dz\, dy$$

شريطة ان تحقق الدالة f :

$$\int_{-1}^1 f(z)\, dz = 0.$$

11 . افرض ان الدالتين $f(x)$ و $\phi(x)$ في التمرين السابق بصيغة حدوديات ليجندر :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k P_k(x), \quad -1 < x < 1$$

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k P_k(x), \quad -1 < x < 1.$$

ما هي العلاقة بين B_k و b_k ؟

12 . باستخدام طريقة فصل المتغيرات للمسألة :

$$\nabla^2 u = 0, \quad 0 < \rho < a, \quad 0 \leq \phi < \pi$$

حيث u مقيدة عند $\phi = 0, \pi$ وان u دورية (2π) في θ ، اشتق المعادلة الاتية لدالة العامل $\Phi(\phi)$:

$$\sin\phi(\sin\phi\Phi')' - m^2\Phi + \mu^2 \sin^2\phi\Phi = 0,$$

حيث ان $m = 0, 1, 2, \ldots$ تأتي من العامل $\Theta(\theta)$.

13 . استخدم تبديل المتغيرات $x = \cos\phi$ ، $\Phi(\phi) = y(x)$ على المعادلة في تمرين (12) ، واشتق المعادلة التفاضلية لـ $y(x)$.

14 . حل مسألة التوصيل الحراري الاتية :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < r < a, \quad 0 < t$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(a, t) = 0, \qquad 0 < t$$

$$u(r, 0) = T_0 - \Delta\left(\frac{r}{a}\right)^2, \quad 0 < r < a.$$

15 . حل مسألة الجهد الاتية في اسطوانة :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \qquad 0 < r < a, \quad 0 < z < b$$

$$u(a, z) = 0, \qquad 0 < z < b$$
$$u(r, 0) = 0,\ u(r, b) = U_0, \quad 0 < r < a.$$

16 . جد حل مسألة التوصيل الحراري :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < r < a, \quad 0 < t$$
$$u(a, t) = T_0, \qquad 0 < t$$
$$u(r, 0) = T_1, \qquad 0 < r < a.$$

17 . جد بعض ذبذبات الاهتزاز لاسطوانة وذلك بايجاد حلول الجداء للمسألة :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < r < a, \quad 0 < z < b, \quad 0 < t$$
$$u(r, 0, t) = 0,\ u(r, b, t) = 0, \quad 0 < r < a, \quad 0 < t$$
$$u(a, z, t) = 0, \qquad 0 < z < b, \quad 0 < t.$$

18 . اشتق الصيغة المعلومة للحل لمعادلة الجهد الآتية في قذيفة كروية :

$$\nabla^2 u = 0, \qquad a < \rho < b, \quad 0 < \phi < \pi$$
$$u(a, \phi) = f(\cos\phi),\ u(b, \phi) = 0, \quad 0 < \phi < \pi$$
$$u(\rho, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{b^{2n+1} - \rho^{2n+1}}{b^{2n+1} - a^{2n+1}} \left(\frac{a}{\rho}\right)^{n+1} P_n(\cos\phi),$$
$$A_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx.$$

19 . بين ان الدالة $\phi(x, y) = \sin \pi x \sin 2\pi y - \sin 2\pi x \sin \pi y$ هي دالة ذاتية للمثلث T المحدد بالمستقيمات $y = 0$ ، $y = x$ ، $x = 1$. اي ان :

$$\nabla^2\phi = -\lambda^2\phi \quad \text{in } T$$

$\phi = 0$ على حدود T

ما هي القيمة الذاتية λ^2 المرافقة لـ ϕ ؟

20 . لاحظ ان الدالة ϕ في تمرين (19) هي الفرق بين دالتين ذاتيتين مختلفتين لـ 1×1 مربع (لاحظ بند 3) وتقابل نفس القيمة الذاتية . استخدم هذه الفكرة لانشاء دوال ذاتية اخرى للمثلث T تمرين 19 .

21 . ليكن T مثلثاً متساوي الاضلاع في المستوي xy- وان وقاعدته هي الفترة $0 < x < 1$ على محور x- وضلعيه هما قطعتا المستقيمين $y = \sqrt{3}x$ و $y = \sqrt{3}(1 - x)$. بين ان لكل $n = 1, 2, 3, \ldots$ ، الدالة

$$\phi_n(x, y) = \sin\left(\frac{4n\pi y}{\sqrt{3}}\right) + \sin(2n\pi\,(x - y/\sqrt{3})) - \sin(2n\pi\,(x + y/\sqrt{3}))$$

هي حل لمسألة القيم الذاتية : $\nabla^2\phi = -\lambda^2\phi$ في T ، $\phi = 0$ على حدود T . ما هي القيم الذاتية λ_n^2 المقابلة للدالة ϕ_n المعطاة ؟ (لاحظ المقالة المنشورة في ، "The eigenvalues of an equilateral triangle", SIAM Journal of Mathematical Analysis ، 1980 الصفحات 819 ـ 827 ، لـ Mark A. Pinsky .)

22 . في تعليقات ومصادر لهذا الفصل ، المبرهنة التي تربط بين اقل قيمة ذاتية في المنطقة مع تلك الأصغر منطقة . عزز هذه المبرهنة وذلك بمقارنة حل تمرين (19) مع اصغر قيمة ذاتية لثمن القرص الدائري الذي نصف قطره (1) :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = -\lambda^2\phi, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{4}, \quad 0 < r < 1$$

$$\phi(r, 0) = 0, \quad \phi\left(r, \frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad 0 < r < 1$$

$$\phi(1, \theta) = 0, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{4}.$$

23 . المهمة نفسها كما في تمرين (22) ، ولكن استخدم المثلث في تمرين (21) واصغر قيمة ذاتية لسدس قرص دائري نصف قطره (1) .

24 . بين ان $u(\rho, t) = t^{-3/2}e^{-\rho^2/4t}$ هو حل لمعادلة الحرارة ذات الثلاثة ابعاد $\nabla^2 u = \partial u/\partial t$. (استخدم الاحداثيات الكروية .)

25 . ما هي قيمة b التي تجعل $u(r, t) = t^b e^{-r^2/4t}$ حلاً لمعادلة الحرارة ذات البعدين $\nabla^2 u = \partial u/\partial t$ ، (استخدم الاحداثيات القطبية .)

26 . افرض ان مصب نهر يمتد من $x = 0$ الى $x = a$ ، حيث يلاقي البحر. واذا كانت ارضية النهر مستوية وعمقه يتناسب مع x ، فان عمق المياه $u(x, t)$ تحقق :

$$\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{1}{gU}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t,$$

حيث g هي التعجيل و U معدل العمق . اذا كانت حركة المد والجزر في البحر ممثلة بالشرط الحدودي :

$$u(a, t) = U + h\cos\omega t.$$

جد الحل المقيد للمعادلة التفاضلية الجزيئة التي تحقق الشرط الحدودي وذلك بوضع :

$$u(x, t) = U + y(x)\cos\omega t.$$

(لاحظ كتاب "Hydrodynamics" تاليف "Lamb" ، 1945 ، الصفحات 275 ـ 276)

27 . هل يوجد اي تركيب للوسيطات التي تجعل الحل في تمرين (26) غير موجود في الصيغة المقترحة ؟

28 . اذا كان مصب النهر في تمرين (26) له عرض منتظم ولكن عمقه متغير $h = Ux/a$ ، فإن معادلة u هي :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{a}{gU}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t$$

وبالشرط الحدودي نفسه كما في تمرين (26) . جد الحل المقيد في الصيغة المقترحة . (لاحظ معادلة (11) بنذ (8)) .

29 . معادلة الموجات المتناظرة نصف القطرية في فضاء بعده n هي :

$$\frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1} \frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

حيث r هي المسافة من نقطة الاصل . جد حلول الجداء لهذه المعادلة والتي تكون مقيدة عند نقطة الاصل .

30 . بين ان المعادلة في تمرين (29) لها حلول بالصيغة :

$$u(r, t) = \alpha(r)\phi(r - ct)$$

حيث $n = 1$ و $n = 3$.

(لاحظ "A simple proof that the world is three - dimensional" تأليف Tom Morley ، المنشور في ، SIAM Review ، 1985 الصفحات 71 ـ 69) .

الفصل السادس

تحويل لابلاس

LAPLACE TRANSFORM

1 . تعاريف وخواص اولية :

DEFINITION AND ELEMENTARY PROPERTIES

تحويل لابلاس يستخدم كأداة لتبسيط حل المعادلات التفاضلية الاعتيادية والجزئية . وهو يرافق الدالة $f(t)$ مع دالة بمتغير آخر ، $F(s)$ ، والتي منها يمكن استعادة الدالة الاصلية .

لتكن $f(t)$ مستمرة مقطعياً في كل فترة $0 \leq t < T$ ، فان تحويل لابلاس لـ f ، والذي يكتب $\mathscr{L}(f)$ او $F(s)$ ، يعرف بالتكامل .

$$\mathscr{L}(f) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt. \tag{1}$$

سوف نستخدم الاتفاق بان دالة t تمثل بالحرف الصغير ، وان تحويلها يقابل الحرف الكبير . والمتغير s قد يكون حقيقياً او معقداً ، ولكن عند حساب التحويل بواسطة التعريف ، سوف نعتبر s عدداً حقيقياً دائماً . والمثالان البسيطان هما :

$$\mathcal{L}(1) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot 1\, dt = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at}\, dt = \left.\frac{-e^{-(s-a)t}}{s-a}\right|_0^\infty = \frac{1}{s-a}.$$

من المعلوم انه ليست كل دالة مستمرة مقطعياً لـ t لها تحويل لابلاس ، وان التكامل المعرف يمكن ان يكون غير متقارب . فمثلاً ، $\exp(t^2)$ ليس لها تحويل . ومن الناحية الاخرى ، يوجد شرط مكافيء بسيط ، كما مبين في المبرهنة الآتية :

مبرهنة : لتكن $f(t)$ مستمرة مقطعياً في كل فترة منتهية $0 \le t < T$. واذا كانت العلاقة التالية صحيحة

$$\lim_{t\to\infty} e^{-kt} f(t) = 0,$$

لبعض الثابت k فإن تحويل لابلاس f موجود لاجل $\mathrm{Re}(s) > k$.

والدالة التي تحقق شرط الغاية في فرضية المبرهنة تسمى ذات رتبة اسية .

وتحويل لابلاس يرث خاصتين مهمتين من التكامل المستعمل في تعريفها :

$$\mathcal{L}(cf(t)) = c\mathcal{L}(f(t)), \quad c \text{ constant} \tag{2}$$

$$\mathcal{L}(f(t) + g(t)) = \mathcal{L}(f(t)) + \mathcal{L}(g(t)). \tag{3}$$

وباستخدام هذه الخواص ، نجد بسهولة ان :

$$\mathcal{L}(\cosh at) = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}(e^{at} + e^{-at})\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right) = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

$$\mathcal{L}(\sin \omega t) = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s - i\omega} - \frac{1}{s + i\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

لاحظ استخدام الصفات الخطية بثوابت ودوال معقدة .

وبسبب وجود العامل e^{-st} في تعريف تحويل لابلاس ، فإن مضروبات الاس يمكن معالجتها بواسطة مبرهنة التبديل "shifting theorem" .

$$\mathcal{L}(e^{bt}f(t)) = \int_0^\infty e^{-st}e^{bt}f(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s-b)t}f(t)\,dt = F(s-b)$$

حيث $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$. فمثلاً ،

$$\mathcal{L}(e^{bt}\sin\omega t) = \frac{\omega}{(s-b)^2+\omega^2} = \frac{\omega}{s^2-2sb+b^2+\omega^2}$$

لان $\mathcal{L}(\sin\omega t) = \omega/(s^2+\omega^2).$

والميزة الحقيقية لتحويل لابلاس هي كونه يؤثر على المشتقات ولنفرض ان $f(t)$ مستمرة ولها مشتقة مستمرة مقطعياً $f'(t)$. لذلك فمن التعريف نجد ان :

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \int_0^\infty e^{-st}f'(t)\,dt.$$

وباجراء التكامل بطريقة التجزئة ، نحصل على :

$$\mathcal{L}(f'(t)) = e^{-st}f(t)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty (-s)e^{-st}f(t)\,dt.$$

واذا كانت $f(t)$ هي برتبة اسية ، فإن $e^{-st}f(t)$ يجب ان تقترب من الصفر عندما تقترب t من اللانهاية (حيث s كبيرة) لذلك ، فإن المعادلة اعلاه تصبح الآتي :

$$\mathcal{L}(f'(t)) = -f(0) + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

$$= -f(0) + s\mathcal{L}(f(t)).$$

(اذا كان لـ $f(t)$ طفرة عند $t = 0$ ، فإن $f(0)$ يفسر على انه $f(0+)$) .

بالمثل ، اذا كانت f و f' مستمرتين ، فإن f'' مستمرة مقطعياً ، واذا كانت كافة الدوال ذات رتب اسية ، فإن :

$$\mathscr{L}(f''(t)) = -f'(0) + s\mathscr{L}(f'(t))$$
$$= -f'(0) - sf(0) + s^2\mathscr{L}(f(t)).$$

وبتعميم بسيط يمكن ان نوسع هذه الصيغة الى المشتقة ذات الرتبة n

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] = -f^{(n-1)}(0) - sf^{(n-2)}(0) - \cdots - s^{n-1}f(0) + s^n\mathscr{L}(f(t)) \quad (4)$$

بفرض ان f و$n - 1$ من مشتقاتها مستمرة ، وان $f^{(n)}$ مستمرة مقطعياً ، وجميعها ذوات رتب اسية .

والآن نستخدم المعادلة (4) بالدالة $f(t) = t^k$ ، حيث ان k عدد صحيح غير سالب . وبهذا نحصل على

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(k-1)}(0) = 0, \quad f^{(k)}(0) = k!, \quad f^{(k+1)}(t) = 0.$$

وبالتالي ، فإن الصيغة (4) مع $n = k + 1$ تؤدي الى

$$0 = -k! + s^{k+1}\mathscr{L}(t^k),$$

او

$$\mathscr{L}(t^k) = \frac{k!}{s^{k+1}}.$$

والتطبيقات المختلفة لقوانين المشتقات تستخدم لتحويل التكاملات . اذا كانت $f(t)$ مستمرة مقطعياً ، فإن $\int_0^t f(t')\,dt'$ دالة مستمرة ، وتساوي 0 عندما $t = 0$ ، ومشتقتها $f(t)$. لذلك :

$$\mathscr{L}(f(t)) = s\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t')\,dt'\right]$$

او

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t')\,dt'\right] = \frac{1}{s}\mathscr{L}(f(t)). \quad (5)$$

التفاضل والتكامل بالنسبة لـ s يمكن ان يعطي تحويلات للدوال السابقة التي يتعذر الحصول عليها . وسوف نحتاج الى الصيغتين الآتيتين :

$$-\frac{de^{-st}}{ds} = te^{-st}, \quad \int_s^\infty e^{-s't}\,ds' = \frac{1}{t}e^{-st}$$

لكي نحصل على النتائج التالية :

$$\mathcal{L}(tf(t)) = -\frac{dF(s)}{ds}, \quad \mathcal{L}\left(\frac{1}{t}f(t)\right) = \int_s^\infty F(s')\,ds'. \qquad (6)$$

(لاحظ انه مالم يكن $f(0) = 0$ ، فإن التحويل لـ $f(t)/t$ سوف لن يكون موجوداً) . والامثلة الخاصة باستخدام هذه الصيغ هي :

$$\mathcal{L}(t \sin \omega t) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right) = \frac{2s\omega}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \int_s^\infty \frac{ds'}{s'^2 + 1} = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s = \tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right).$$

عندما يتم حل المسألة باستخدام تحويلات لابلاس ، فإن المشكلة التي تواجهنا هي حساب الدالة المقابلة لـ t . وطرق حساب « معكوس التحويل » و $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$ ، تشمل تكاملاً في المستوي المعقد ، الالتفاف ، الدوال الجزئية (كما ورد في بند 2) ، وجدوال بالتحويلات . الطريقة الاخيرة ، التي تشمل اقل جهد ، وهي اكثرهم شهرة والتحويلات في الجدول (2 ـ 6) جميعها قد تم حسابها من التعريف ؛ او باستخدام صيغ هذا البند .

تمارين

1 . باستخدام الخطية والتحويل لـ e^{at} ، احسب تحويل كل من الدوال الآتية :

a. $\sinh at$ **b.** $\cos \omega t$
c. $\cos^2 \omega t$ **d.** $\sin(\omega t - \phi)$
e. $e^{2(t+1)}$ **f.** $\sin^2 \omega t$.

2 . استخدم المشتقات بالنسبة لـ t لايجاد تحويلات كل من :

a. te^{at} من $\mathcal{L}(e^{at})$
b. $\sin \omega t$ من $\mathcal{L}(\cos \omega t)$
c. $\cosh at$ من $\mathcal{L}(\sinh at)$.

3 . احسب تحويل كل مما يأتي مباشرة من التعريف :

a. $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < a \\ 1, & a < t \end{cases}$

b. $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < a \\ 1, & a < t < b \\ 0, & b < t \end{cases}$

c. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < a \\ a, & a < t. \end{cases}$

4 . دالة هيفي سايد المدرجة ((*Heaviside step function*)) تعرف بالصيغة

$$H_a(t) = \begin{cases} 1, & t > a \\ 0, & t < a. \end{cases}$$

افرض ان $a \geq 0$. بين ان تحويل لابلاس لـ H_a هو :

$$\mathcal{L}(H_a(t)) = \frac{e^{-as}}{s}.$$

5 . استخدم اتمام المربعات ومبرهنة التبديل لايجاد معكوس التحويل لـ :

a. $1/(s^2 + 2s)$ **b.** $\dfrac{s}{(s^2 + 2s)}$
c. $1/(s^2 + 2as + b^2), \quad b > a.$

6 . جد تحويل لابلاس لدالة الموجة ـ المربعة . **6.**

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < x < a \\ 0, & a < x < 2a' \end{cases} \qquad f(x + 2a) = f(x).$$

(تلميح : جزء التكامل كما مبين ادناه ، ثم جد التكاملات ، واضف اليه السلسلة الهندسية

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2na}^{2(n+1)a} f(t)e^{-st}\, dt.)$$

7 . استخدم اية طريقة لايجاد معكوس تحويل كل مما يأتي :

a. $\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$ b. $\dfrac{s}{(s^2-a^2)^2}$

c. $\dfrac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$ d. $\dfrac{1}{(s-a)^3}$

e. $\dfrac{(1-e^{-s})}{s}$

8 . استخدم اي مبرهنة او صيغة لايجاد التحويل لكل مما يأتي :

a. $\dfrac{1-\cos \omega t}{t}$ b. $\displaystyle\int_0^t \frac{\sin at'}{t'}\, dt'$

c. $t^2 e^{-at}$ d. $t \cos \omega t$

e. $\sinh at \sin \omega t.$

2 . تطبيقات اولية ؛ تجزئة الكسور والالتفاف :

2. ELEMENTARY APPLICATIONS; PARTIAL FRACTIONS AND CONVOLUTIONS

نظراً لطبيعة صيغة تحويل المشتقات ، فإن تحويل لابلاس له تطبيقات مهمة في المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة ، والخاضعة للشروط الابتدائية . ولكي نحل المسألة البسيطة الآتية :

$$u' + au = 0, \quad u(0) = 1$$

نحول المعادلة الكلية ، لنحصل على :

$$\mathcal{L}(u') + a\mathcal{L}(u) = 0$$

او :

$$sU - 1 + aU = 0$$

حيث ان $U = \mathcal{L}(u)$. وبهذا فإن المشتقة قد تم تحويلها ، و U يتم تحديدها باستخدام عمليات جبرية بسيطة لتصبح :

$$U(s) = \frac{1}{(s+a)}.$$

جدول (1 ـ 6)   خواص تحویل لاپلاس

$$\mathcal{L}(f) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

$$\mathcal{L}(cf(t)) = c\mathcal{L}(f(t))$$

$$\mathcal{L}(f(t) + g(t)) = \mathcal{L}(f(t)) + \mathcal{L}(g(t))$$

$$\mathcal{L}(f'(t)) = -f(0) + sF(s)$$

$$\mathcal{L}(f''(t)) = -f'(0) - sf(0) + s^2F(s)$$

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = -f^{(n-1)}(0) - sf^{(n-2)}(0) - \cdots - s^{n-1}f(0) + s^nF(s)$$

$$\mathcal{L}(e^{bt}f(t)) = F(s-b)$$

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(t')\, dt'\right) = \frac{1}{s}F(s) \qquad \mathcal{L}\left(\frac{1}{t}f(t)\right) = \int_s^\infty F(s')\, ds'$$

$$\mathcal{L}(tf(t)) = \frac{dF}{ds}$$

جدول (2 ـ 6)   تحویلات لاپلاس

$f(t)$	$F(s)$
0	0
1	$\frac{1}{s}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^k	$\frac{k!}{s^{k+1}}$
$e^{bt}\cos \omega t$	$\frac{s-b}{s^2-2bs+b^2+\omega^2}$
$e^{bt}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2-2bs+b^2+\omega^2}$
$e^{bt}t^k$	$\frac{k!}{(s-b)^{k+1}}$
$e^{at}-1$	$\frac{a}{s(s-a)}$
$t\cos \omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$t\sin \omega t$	$\frac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}$

وباستخدام الجدول نجد ان $u(t) = e^{-at}$

والمعادلات ذات الرتب العالية يمكن حلها بالطريقة نفسها. عندما نحول المسألة الاتية:

$$u'' + \omega^2 u = 0, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0$$

وتصبح

$$s^2 U - s \cdot 1 - 0 + \omega^2 U = 0.$$

لاحظ ان كلا الشريطين الابتدائيين قد دمجا في معادلة واحدة. والان نحل معادلة التحويل جبرياً لنجد ان:

$$U(s) = \frac{s}{(s^2 + \omega^2)},$$

وهو تحويل $\cos \omega t$.

وبشكل عام يمكن ان نضع الخطوط الرئيسية للخطوات في الشكل ادناه

$$\begin{tikzcd}
\text{حل المسألة الاصلية} & \text{المسألة الاصلية} \arrow[d, "\mathcal{L}"] \\
\text{حل المسألة المحولة} \arrow[u, "\mathcal{L}^{-1}"] & \text{المسألة المحولة} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

في الخطوة المؤشرة $\mathcal{L}^{-1}$ يجب ان نحسب دالة t التي تقابل حل المسألة المحمولة. وهذا هو الجزء الصعب في العملية. وان مفتاح الحل هو خطية معكوس التحويل، الذي يعطي بـ:

$$\mathcal{L}^{-1}(c_1F_1(s) + c_2F_2(s)) = c_1\mathcal{L}^{-1}(F_1(s)) + c_2\mathcal{L}^{-1}(F_2(s)).$$

هذه الخاصية تعطينا المرونة لتجزئة تحويل معقد الى حاصل جمع تحويلات بسيطة.

ان منظومة النابض الحلزوني المثبطة البسيطة تؤدي الى مسألة القيم الابتدائية:

$$u'' + au' + \omega^2 u = 0, \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1$$

والتي تحويلها يكون :

$$s^2U - su_0 - u_1 + a(sU - u_0) + \omega^2U = 0$$

وان تعيين U يعطي على شكل نسبة بين حدوديتين هما :

$$U(s) = \frac{su_0 + (u_1 + au_0)}{s^2 + as + \omega^2}.$$

وبالرغم من ان هذا التعبير غير موجود في الجدول ، فانه يمكن وضعه بدلالة دالة $s+a/2$ التي يكون معكوس تحويلها موجوداً . عندئذ فأن مبرهنة التبديل تعطي $u(t)$ وتوجد بالتاكيد طريقة افضل وهي :

ان انعكاس الدالة النسبية لـ s (اي ان ، النسبة بين حدوديتين) يمكن انجازها بواسطة تكنيك « تجزئة الكسور » نفرض اننا نرغب في حساب معكوس التحويل الاتي

$$U(s) = \frac{cs + d}{s^2 + as + b}.$$

حيث البسط له جذران هما r_2 و r_1 ، وسوف نفرضهما حاليا بانهما مختلفان لذلك يكون :

$$s^2 + as + b = (s - r_1)(s - r_2)$$

$$U(s) = \frac{cs + d}{(s - r_1)(s - r_2)}.$$

ان قواعد الجبر الاولي تبين ان U يمكن كتابتها على شكل حاصل جمع

$$\frac{cs + d}{(s - r_1)(s - r_2)} = \frac{A_1}{s - r_1} + \frac{A_2}{s - r_2} \qquad (1)$$

لبعض اختيارات A_1 و A_2 . واذا وجدنا المقام المشترك للطرف الايمن وبتوافق اسس s في البسط ، نحصل على :

$$\frac{cs + d}{(s - r_1)(s - r_2)} = \frac{A_1(s - r_2) + A_2(s - r_1)}{(s - r_1)(s - r_2)}$$

$$c = A_1 + A_2, \quad d = -A_1 r_2 - A_2 r_1.$$

حيث A_1 ، A_2 معينان ومعكوس التحويل في الطرف الايمن من المعادلة (1) يمكن ايجادة بسهولة :

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A_1}{s - r_1} + \frac{A_2}{s - r_2}\right) = A_1 \exp r_1 t + A_2 \exp r_2 t.$$

ولاعطاء مثال محدد ، نفرض ان :

$$U(s) = \frac{s + 4}{s^2 + 3s + 2}.$$

ان جذري البسط هما $r_2 = -2$ و $r_1 = -1$. وبالتالي يكون :

$$\frac{s + 4}{s^2 + 3s + 2} = \frac{A_1}{s + 1} + \frac{A_2}{s + 2} = \frac{(A_1 + A_2)s + (2A_1 + A_2)}{(s + 1)(s + 2)}.$$

ونجد ان $A_1 = 3, A_2 = -2$ لذلك فان

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s + 4}{s^2 + 3s + 2}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s + 1} - \frac{2}{s + 2}\right) = 3e^{-t} - 2e^{-2t}.$$

نفرض ان U بالصيغة

$$U(s) = \frac{q(s)}{p(s)}$$

حيث p ، q حدوديتان ، وان درجة q اقل من درجة p . ونفرض ان p لها جذور مختلفة $r_1, \ldots, r_k$

$$p(s) = (s - r_1)(s - r_2) \cdots (s - r_k)$$

وسوف نحاول ان نكتب U بصيغة الكسور :

$$U(s) = \frac{A_1}{s - r_1} + \frac{A_2}{s - r_2} + \cdots + \frac{A_k}{s - r_k} = \frac{q(s)}{p(s)}.$$

ان تعيين As جبرياً ممل جداً ، ولكن لاحظ انه :

$$\frac{(s - r_1)q(s)}{p(s)} = A_1 + A_2 \frac{s - r_1}{s - r_2} + \cdots + A_k \frac{s - r_1}{s - r_k}.$$

اذا وضعنا $s = r_1$ ، فان الطرف الايمن هو A_1 . الطرف الايسر يصبح 0/0 ولكن قانون لوتبال يعطينا :

$$\lim_{s \to r_1} \frac{(s - r_1)q(s)}{p(s)} = \lim_{s \to r_1} \frac{(s - r_1)q'(s) + q(s)}{p'(s)} = \frac{q(r_1)}{p'(r_1)}.$$

لذلك فان A_1 وجميع الـ As الاخرى تعطي بـ :

$$A_i = \frac{q(r_i)}{p'(r_i)}.$$

وبهذا تكون الدالة النسبية بالشكل :

$$\frac{q(s)}{p(s)} = \frac{q(r_1)}{p'(r_1)} \frac{1}{s - r_1} + \cdots + \frac{q(r_k)}{p'(r_k)} \frac{1}{s - r_k}$$

من هذه الفكرة يمكن ان نجد معكوس التحويل ، كما مبين في المبرهنة الاتية :

مبرهنة 1 . اذا كانت p و q حدوديتان ، وان درجة q اقل من درجة p ، واذا كان لـ a جذوراً بسيطة $r_1, r_2, \ldots, r_k$ فان

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{q(s)}{p(s)}\right) = \frac{q(r_1)}{p'(r_1)} \exp r_1 t + \cdots + \frac{q(r_k)}{p'(r_k)} \exp r_k t. \qquad (2)$$

(المعادلة (2) تعرف باسم صيغة هيفي سايد)

دعنا الان نطبق المبرهنة على المثال الذي يكون فيه $q(s) = s + 4$ و $p(s) = s^2 + 3s + 2$ و $p'(s) = 2s + 3$. فان

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s + 4}{s^2 + 3s + 2}\right) = \frac{-1 + 4}{2(-1) + 3}e^{-t} + \frac{-2 + 4}{2(-2) + 3}e^{-2t} = 3e^{-t} - 2e^{-2t}.$$

وفي المسائل غير المتجانسة فان تحويل لابلاس يستخدم كأداة ايضاً . ولكي نحل المسألة :

$$u' + au = f(t), \quad u(0) = u_0$$

فاننا مرة اخرى نحول المعادلة الكلية ، لنحصل على

we ag

$$sU - u_0 + aU = F(s)$$

$$U(s) = \frac{u_0}{s + a} + \frac{1}{s + a} F(s).$$

والحد الاول في هذا التعبير يمكن تمييزه على انه التحويل $u_0 e^{-at}$ واذا كانت $F(s)$ دالة نسبية ، فان تجزئة الكسور يمكن ان تستخدم لتعكس الحد الثاني .
ومن الناحية الاخرى ، يمكن التعرف على هذا الحد وذلك بحل المسألة بطريقة اخرى .

$$e^{at}(u' + au) = e^{at}f(t)$$

$$(ue^{at})' = e^{at}f(t)$$

$$ue^{at} = \int_0^t e^{at'}f(t')\,dt' + c$$

$$u(t) = \int_0^t e^{-a(t-t')} f(t')\,dt' + ce^{-at}.$$

والشرط الحدودي يتطلب ان يكون $c = u_0$. وبمقارنة النتيجتين ، نجد ان

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t e^{-a(t-t')}f(t')\,dt'\right] = \frac{1}{s - a} F(s).$$

وبالتالي فان تحويل التركيب بين e^{-at} و $f(t)$ في الطرف الايسر هو جداء التحويليين e^{-at} ولـ $f(t)$. ويمكن تعميم هذه النتيجة بالطريقة الاتية :
مبرهنة 2 . اذا كانت $g(t)$ و $f(t)$ لهما تحويلي لابلاس $G(s)$ و $F(s)$ على التوالي ، فان :

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t g(t - t')f(t')\,dt'\right] = G(s)F(s). \qquad (3)$$

(يقال لهذه المبرهنة بانها مبرهنة الالتفاف .) والتكامل في الطرف الايسر يسمى التفاف g و f ، ويكتب :

$$g(t) * f(t) = \int_0^t g(t - t')f(t')\,dt'.$$

ويمكن ان نبين ان الالتفاف يخضع للقوانين الاتية :

$$g * f = f * g \tag{4a}$$

$$f * (g * h) = (f * g) * h \tag{4b}$$

$$f * (g + h) = f * g + f * h. \tag{4c}$$

ان مبرهنة الالتفاف تزودنا بأداة مهمة لمعكوس تحويلات لابلاس ، والتي سوف نستخدمها لايجاد الحل العام للمسألة غير المتجانسة

$$u'' - au = f(t), \quad u(0) = u_0, u'(0) = u_1.$$

والمعادلة المحلولة تحل بيسر ، وينتج :

$$U(s) = \frac{su_0 + u_1}{s^2 - a} + \frac{1}{s^2 - a} F(s).$$

وبما ان $1/(s^2 - a)$ هو تحويل $\sinh \sqrt{a}t/\sqrt{a}$ ، فمن السهولة ان نحدد u بانها

$$u(t) = u_0 \cosh \sqrt{a}t + \frac{u_1}{\sqrt{a}} \sinh \sqrt{a}t + \int_0^t \frac{\sinh \sqrt{a}(t - t')}{\sqrt{a}} f(t')\,dt'. \tag{5}$$

والمسألة المختلفة جزئياً تظهر اذا كانت كتلة منظومة النابض مغلقة بينما تكون المنظومة في حالة حركة والنموذج الرياضي لهذه المنظومة قد يكون :

$$u'' + \omega^2 u = f(t), \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1$$

حيث $f(t) = F_0$ وان $t_0 < t < t_1$ و $f(t) = 0$ للقيم الاخرى . وبهذا يكون تحويل u هو :

$$U(s) = \frac{su_0 + u_1}{s^2 + \omega^2} + \frac{1}{s^2 + \omega^2} F(s).$$

وان معكوس تحويل $U(s)$ هو :

$$u(t) = u_0 \cos \omega t + u_1 \frac{\sin \omega t}{\omega} + \int_0^t \frac{\sin \omega(t - t')}{\omega} f(t')\, dt'.$$

والالتفاف في هذه الحالة يمكن حسابه بسهولة كالاتي :

$$\int_0^t \frac{\sin \omega(t - t')}{\omega} f(t')\, dt' = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ F_0 \dfrac{1 - \cos \omega(t - t_0)}{\omega^2}, & t_0 < t < t_1 \\ F_0 \dfrac{\cos \omega(t - t_1) - \cos \omega(t - t_0)}{\omega^2}, & t_1 < t. \end{cases}$$

تمارين

1 . حل مسائل القيم الابتدائية :

a. $u' - 2u = 0, \quad u(0) = 1$
b. $u' + 2u = 0, \quad u(0) = 1$
c. $u'' + 4u' + 3u = 0, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0$
d. $u'' + 9u = 0, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1.$

2 . حل مسألة القيم الابتدائية :

$$u'' + 2au' + u = 0, \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1$$

في الحالات الثلاث : $a > 1$, $a = 1$, $0 < a < 1$

3 . حل المسائل غير المتجانسة بشروط ابتدائية صفرية :

a. $u' + au = 1$

b. $u'' + u = t$

c. $u'' + 4u = \sin t$

d. $u'' + 4u = \sin 2t$

e. $u'' + 2u' = 1 - e^{-t}$

f. $u'' - u = 1.$

4 . اكمل المربع في البسط ، واستخدم مبرهنة التبديل $[F(s - a) = \mathscr{L}(e^{at}f(t))]$ لعكس

$$U(s) = \frac{su_0 + (u_1 + 2au_0)}{s^2 + 2as + \omega^2}.$$

توجد ثلاث حالات تقابل :

$$\omega^2 - a^2 > 0, \ =0, \ <0.$$

5 . استخدم تجزئة الكسور لعكس كل من التحويلات الاتية :

a. $\dfrac{1}{(s^2 - 4)}$

b. $\dfrac{1}{(s^2 + 4)}$

c. $\dfrac{(s + 3)}{s(s^2 + 2)}$

d. $\dfrac{4}{s(s + 1)}.$

6 . اثبت الخواص (4a) و (4c) للالتفاف .

7 . احسب الالتفاف ل $f * g$ لكل من

a. $f(t) = 1, \; g(t) = \sin t$

b. $f(t) = e^t, \; g(t) = \cos \omega t$

c. $f(t) = t, \; g(t) = \sin t.$

8 . ناقش الخواص الاتية للالتفاف اما مباشرة ، واما باستخدام تحويل لا بلاس :

a. $1 * f'(t) = f(t) - f(0)$

b. $(t * f(t))'' = f(t)$

c. $(f * g)' = f' * g = f * g'$, if $f(0) = g(0) = 0.$

3 . تطبيقات على المعادلات التفاضلية الجزئية

APPLICATIONS TO PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

عندما نطبق تحويلات لابلاس على المعادلة التفاضلية الجزئية ، نتعامل مع المتغيرات عدا t على انها وسيطات . وبالتالي ، فان تحويل الدالة $u(x, t)$ يعرف بـ :

$$\mathscr{L}(u(x, t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} u(x, t)\, dt = U(x, s).$$

فمثلاً ، من السهولة ان نجد التحويلين :

$$\mathscr{L}(e^{-at} \sin \pi x) = \frac{1}{s + a} \sin \pi x$$

$$\mathscr{L}(\sin(x + t)) = \frac{s \sin x + \cos x}{s^2 + 1}.$$

والتحويل U هو دالة ليست بدلالة s فقط ولكنه بدلالة المتغير « غير المتحول » x ايضا . سوف نفرض ان المشتقات او التكاملات بالنسبة للمتغير غير المتحول تمر خلال التحويل :

$$\mathscr{L}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \int_0^{\infty} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} e^{-st}\, dt$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-st}\, dt = \frac{\partial}{\partial x} (U(x, s)).$$

واذا نظرنا الى x كمتغيير واعتبرنا s وسيطاً ، فيمكن ان نستخدم رمز المشتقة الاعتيادية :

$$\mathscr{L}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{dU}{dx}.$$

ان قانون تحويل المشتقة بالنسبة لـ t يمكن ايجاده ، كما في السابق ، بطريقة التكامل بالتجزئة .

$$\mathscr{L}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = s\mathscr{L}(u(x, t)) - u(x, 0).$$

واذا طبقنا تحويل لابلاس على مسائل القيم الابتدائية في x و t ، فان جميع المشتقات بالنسبة للزمن t سوف تختفي ، تترك المعادلة التفاضلية الاعتيادية بدلالة x. سوف نوضح هذا التكنيك مع بعض الامثلة البسيطة . سوف نفرض من الان فصاعداً ان المسائل قد اعدت (مثلاً ، بتحليل الابعاد) لكي نحذف اكثر مايمكن حذفه من الوسيطات .

مثال 1 .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = 1, \quad u(1, t) = 1, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = 1 + \sin \pi x, \qquad 0 < x < 1.$$

المعادلة التفاضلية الجزيئة والشروط الحدودية (اي ان ، كل شيء يتحقق لكل $t > 0$) قد تحولت ، بينما الشرط الابتدائي قد دمج بالتحويل

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = sU - (1 + \sin \pi x), \quad 0 < x < 1$$

$$U(0, s) = \frac{1}{s}, \quad U(1, s) = \frac{1}{s}.$$

ونحل مسألة القيم الحدودية هذه لنحصل على :

$$U(x, s) = \frac{1}{s} + \frac{\sin \pi x}{s + \pi^2}.$$

نركز انتباهنا الآن على U كدالة لـ . كون $\sin \pi x$ ثابتة بالنسبة لـ s ، فان الجداول يمكن استخدامها لنجد التالي :

$$u(x, t) = 1 + \sin \pi x \exp(-\pi^2 t).$$

مثال 2 .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

$$\begin{aligned} &u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, && 0 < t \\ &u(x, 0) = \sin \pi x, && 0 < x < 1 \\ &\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = -\sin \pi x, && 0 < x < 1. \end{aligned}$$

وبالتحويل تصبح المسألة :

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = s^2 U - s \sin \pi x + \sin \pi x, \quad 0 < x < 1$$

$$U(0, s) = 0, \quad U(1, s) = 0.$$

ونجد الدالة U هي :

$$U(x, s) = \frac{s - 1}{s^2 + \pi^2} \sin \pi x$$

لذلك ، فان الحل هو :

$$u(x, t) = \sin \pi x \left(\cos \pi t - \frac{1}{\pi} \sin \pi t \right).$$

مثال 3 .

الان نأخذ المسألة التي نعرف ان لها حلًا معقداً هو :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = 1, \quad u(1, t) = 1, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = 0, \qquad 0 < x < 1.$$

ان مسألة التحويل هي :

$$\frac{d^2U}{dx^2} = sU, \quad 0 < x < 1$$

$$U(0, s) = \frac{1}{s}, \quad U(1, s) = \frac{1}{s}.$$

والحل العام للمعادلة التفاضلية هو التركيب الخطي لـ $\sinh\sqrt{s}x$ و $\cosh\sqrt{s}x$. وتطبيق الشروط الحدودية يؤدي الى :

$$U(x, s) = \frac{1}{s}\cosh\sqrt{s}x + \frac{(1 - \cosh\sqrt{s})\sinh\sqrt{s}x}{s\sinh\sqrt{s}}$$

$$= \frac{\sinh\sqrt{s}x + \sinh\sqrt{s}(1 - x)}{s\sinh\sqrt{s}}$$

ان هذه الدالة لم تظهر دائماً في جدول التحويلات ومن الناحية الاخرى ، بتوسيع صيغة هيفي سايد ، يمكن ان نحسب معكوس التحويل .

عندما تكون U نسبة بين دالتين متساميتين (ليستا حدودتين) لـ s ويمكن ان نكتب :

$$U(x, s) = \sum A_n(x)\frac{1}{s - r_n}.$$

وفي هذه الصيغة ، الاعداد r_n هي قيم s التي تجعل « مقام » U صفراً او ان تكون $|U(x, s)|$ غير منتهية ، وان A_n هي دوال لـ x وليس لـ s . ومن هذه الصيغة نتوقع ان نحدد :

$$u(x, t) = \sum A_n(x)\exp r_n t.$$

هذا الحل يمكن فحصه بالنسبة للتقارب .

دالة الجيب الزائدية (كذلك $\cosh$ ، $\cos$ ، $\sin$ والدوال الاسية) هي ليست غير منتهية لاية قيمة منتهية في التعبير . وبهذا تصبح $U(x, s)$ غير منتهية فقط عندما

تكون s او $\sinh \sqrt{s}$ صفر . وكون $\sinh \sqrt{s} = 0$ ليس لها جذر حقيقي بالاضافة الى الصفر ، فنبحث الآن عن الجذور المعقدة وذلك بفرض $\sqrt{s} = \xi + i\eta$ (ξ و η حقيقية) .

من الواضح ان القوانين الاضافية للدوال الزائدية والمثلثية تبقى صحيحة بالنسبة للمتغيير المعقد وبالاضافة الى ذلك ، فكما هو معلوم ان

$$\cosh iA = \cos A, \quad \sinh iA = i \sin A.$$

وبدمج قانون الجمع مع هذه المتطابقات ، نجد ان

$$\sinh(\xi + i\eta) = \sinh \xi \cos \eta + i \cosh \xi \sin \eta.$$

وهذه الدالة تساوي صفراً اذا كان الجزئان الحقيقي والخيالي يساويان صفراً وبهذا يجب ان نختار ξ و η لتحقيق :

$$\sinh \xi \cos \eta = 0, \quad \cosh \xi \sin \eta = 0.$$

وفي التراكيب الاربعة المحتملة ، فان $\sinh \xi = 0$ و $\sin \eta = 0$ فقط تعطي حلولاً . لذلك يكون $\xi = 0$; $\eta = \pm n\pi$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ بينما

$$\sqrt{s} = \pm in\pi, \quad s = -n^2\pi^2.$$

تذكر ان قيم s وليست $\sqrt{s}$ تكون ذات دلالة

واخيراً،وبعد ان بينا ان $r_0 = 0$ وان $r_n = -n^2\pi^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$ سوف نجد $A_n(x)$ بالطريقة نفسها التي استخدمت في بند (2) ، وبعد ان وجدنا الحسابات يمكن تجميع الحل :

الجزء a $(r_0 = 0)$ لكي نجد A_0 نقرب طرفي الكسور الجزيئة المقترحة

$$U(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \frac{1}{s - r_n}$$

بـ $s - r_0 = s$ ، ونأخذ الغاية عندما تقترب s من r_0 . الطرف الايمن يقترب من A_0 . بينما الطرف الايسر يكون

$$\lim_{s\to\infty} s \frac{\sinh \sqrt{s}x + \sinh \sqrt{s}(1 - x)}{s \sinh \sqrt{s}} = x + 1 - x = 1 = A_0(x).$$

وبالتالي يكون جزء $u(x, t)$ المقابل لـ $s = 0$ هو $1 \cdot e^{0t} = 1$ ، وهذه يمكن تميزها على انها حل حالة الاستقرار .

الجزء **b** ($n = 1, 2, \ldots, r_n = -n^2\pi^2$) لهذه الحالات نجد ان

$$A_n = \frac{q(r_n)}{p'(r_n)}$$

حيث q و p هما الاختيار السهل . نأخذ الان $\sqrt{r_n} = +in\pi$ وفي جميع الحسابات تكون :

$$p'(s) = \sinh \sqrt{s} + s \frac{1}{2\sqrt{s}} \cosh \sqrt{s}$$

$$p'(r_n) = \frac{1}{2} in\pi \cosh in\pi = \frac{1}{2} in\pi \cos n\pi$$

$$\begin{aligned} q(r_n) &= \sinh in\pi x + \sinh in\pi(1 - x) \\ &= i[\sin n\pi x + \sin n\pi(1 - x)]. \end{aligned}$$

وبهذا فان الجزء من $u(x, t)$ الذي يظهر من كل r_n هو :

$$A_n(x) \exp r_n t = 2 \frac{\sin n\pi x + \sin n\pi(1 - x)}{n\pi \cos n\pi} \exp(-n^2\pi^2 t).$$

الجزء **c** . بعد تجميع عدة اجزاء من الحل ، نجد :

$$u(x, t) = 1 + \frac{2}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x + \sin n\pi(1 - x)}{n \cos n\pi} \exp(-n^2\pi^2 t).$$

والحد نفسه يمكن ايجاده بطريقة فصل المتغييرات .

مثال 4 .

4 . تأمل الآن مسألة الموجة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = x, \quad 0 < x < 1.$$

لذلك فان المسألة المتحولة هي :

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = s^2 U - x, \quad 0 < x < 1$$

$$U(0, s) = 0, \quad U'(1, s) = 0$$

وان حلها (بطريقة المعاملات غير المعينة او طريقة اخرى) يعطى

$$U(x, s) = \frac{sx \cosh s - \sinh sx}{s^3 \cosh s}.$$

ان بسط هذه الدالة لا يمكن ان يكون غير منتهٍ . والمقام يساوي صفراً عند $s = 0$ $s = \pm i(2n - 1)\pi/2$ ، $(n = 1, 2, \ldots)$. وسوف نستخدم مرة اخرى صيغة هيفي سايد لكي نجد معكوس التحويل U .

الجز **a** $(r_0 = 0)$. الغاية عندما تقترب s من لـ $sU(x, s)$ يمكن ايجادها بقانون لوتبال او باستخدام سلسلة تايلور لـ sinh و cosh . ومن الاخيرة نجد ان :

$$sU(x, s) = \frac{sx\left(1 + \frac{s^2}{2} + \cdots\right) - \left(sx + \frac{s^3x^3}{6} + \cdots\right)}{s^2\left(1 + \frac{s^2}{2} + \cdots\right)}$$

$$= \frac{s^3\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{6} - \cdots\right)}{s^2\left(1 + \frac{s^2}{2} + \cdots\right)} \to 0.$$

وبالرغم من ظهور s^3 في البسط ، فان $s = 0$ ليس ذات دلالة ولا يقدم اي شيء لـ $u(x, t)$

الجزء **b** من المفيد ان نأخذ الجذور المتبقية على شكل ازواج . سوف نرمز لها بـ : $\pm i(2n - 1)\pi/2 = \pm i\rho_n$.

وبهذا تكون مشتقة البسط هي :

$$p'(s) = 3s^2 \cosh s + s^3 \sinh s$$

$$p'(\pm i\rho_n) = \pm i^3\rho_n{}^3 \sinh (\pm i\rho_n)$$

$$= \rho_n{}^3 \sin \rho_n$$

لأن $\sinh i\rho = i \sin \rho$ و $(\pm i)^4 = 1$. ويمكن حساب هذين الجذرين باستخدام التعريف الاسي للجيب :

$$\frac{q(i\rho_n)}{p'(i\rho_n)} \exp (i\rho_n t) + \frac{q(-i\rho_n)}{p'(-i\rho_n)} \exp (-i\rho_n t)$$

$$= \frac{-\sinh(i\rho_n x) \exp(i\rho_n t) + \sinh(i\rho_n x) \exp(-i\rho_n t)}{\rho_n{}^3 \sin \rho_n}$$

$$= \frac{\sin \rho_n x}{\rho_n{}^3 \sin \rho_n} i(-\exp(i\rho_n t) + \exp(-i\rho_n t))$$

$$= \frac{2 \sin \rho_n x \sin \rho_n t}{\rho_n{}^3 \sin \rho_n}$$

الجزء c . الصيغة النهائية لـ $u(x, t)$ التي يتم ايجادها باضافة الصيغة في الجزء b ، هي نفسها التي وجدناها بطريقة فصل المتغييرات ..

$$u(x, t) = 2 \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin \rho_n x \sin \rho_n t}{\rho_n^3 \sin \rho_n}$$

تمارين

1 . جد جميع قيم s ، حقيقية ومعقدة ، لكي تكون كل من الدوال الاتية صفراً

a. $\cosh \sqrt{s}$
b. $\cosh s$
c. $\sinh s$
d. $\cosh s - s \sinh s$
e. $\cosh s + s \sinh s$.

2 . جد معكوس التحويل للدوال الاتية بدلالة السلاسل غير المنتهية

a. $\frac{1}{s} \tanh s$
b. $\frac{\sinh sx}{s \cosh s}$.

3 . جد التحويل $U(x, s)$ لحل كل من المسائل الاتية :

a.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = t, \qquad 0 < t$$

$$u(x, 0) = 0, \qquad 0 < x < 1$$

b.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = u(1, t) = e^{-t}, \qquad 0 < t$$

$$u(x, 0) = 1, \qquad 0 < x < 1.$$

4 . حل مسائل تمرين (3) ، اعكس التحويل بدلالة صيغة هيفي سايد الموسعة .

5 . حل كل من المسائل الاتية بطرق تحويل لابلاس :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t \qquad \textbf{a.}$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 1, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = 0, \qquad 0 < x < 1$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t \qquad \textbf{b.}$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1,t) = 0 \qquad 0 < t$$

$$u(x, 0) = 1, \qquad 0 < x < 1.$$

4. امثلة معقدة اخرى — MORE DIFFICULT EXAMPLES

ان تكنيك فصل المتغييرات يعتبر اكثر دقة من تحويل لابلاس ومن الناحية الاخرى ، عندما تظهر الشروط الحدودية المرتبطة بالزمن او اللاتجانسية فان تحويل لابلاس يقدم فوائد مختلفة . وفيما يلي بعض الامثلة التي تظهر قوة طرق التحويل .

مثال (1) . قضيب معزول منتظم ثُبت من احدى نهايتيه في حاوية عازلة من مائع يتحرك بحيث تكون درجة الحرارة منتظمة ومساوية لدرجة الحرارة في نهاية القضيب والطرف الاخر من القضيب يترك عند درجة حرارة ثابتة . ومسائل القيم الحدودية القيم الابتدائية اللابعدية ، والتي يمكن ان تصف درجة حرارة القضيب هي :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \gamma \frac{\partial u(0, t)}{\partial t}, \quad u(1, t) = 1, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = 0, \qquad 0 < x < 1$$

ان مسألة التحويل وحلها هي :

$$\frac{d^2U}{dx^2} = sU, \quad 0 < x < 1$$

$$\frac{dU}{dx}(0, s) = s\gamma U(0, s), \quad U(1, s) = \frac{1}{s}$$

$$U(x, s) = \frac{\cosh \sqrt{s}x + \sqrt{s}\gamma \sinh \sqrt{s}x}{s(\cosh \sqrt{s} + \sqrt{s}\gamma \sinh \sqrt{s})} = \frac{q(s)}{p(s)}.$$

واذا كانت $s = 0$ ، فان المقام ليس لهُ جذور حقيقية . لذلك سوف نبحث عن الجذور المعقدة وذلك بوضع $\sqrt{s} = \xi + i\eta$. والجزء الحقيقي والجزء الخيالي من البسط يمكن حسابهما وذلك باستخدام الصيغ الاضافية بـ cosh و sinh . ولكي يكون الجزء الحقيقي والجزء الخيالي يساويان صفراً ، فهذا يؤدي الى المعادلتين الآتيتين :

$$(\cosh \xi + \xi\gamma \sinh \xi) \cos \eta - \eta\gamma \cosh \xi \sin \eta = 0 \qquad (1)$$

$$\eta\gamma \sinh \xi \cos \eta + (\sinh \xi + \xi\gamma \cosh \xi) \sin \eta = 0. \qquad (2)$$

ويمكن ان نفكر بهاتين المعادلتين على انهما معادلتان آنيتان . بدلالة $\sin \eta$ و $\cos \eta$ وكون $\sin^2\eta + \cos^2\eta = 1$، فان المنظومة لها حل اذا كان المحدد يساوي صفراً . وبالتالي وبعد اجراء بعض العمليات الجبرية ، نصل الى الشرط الآتي :

$$(1 + \xi^2\gamma^2 + \eta^2\gamma^2) \sinh \xi \cosh \xi + \xi\gamma(\sinh^2\xi + \cosh^2\xi) = 0.$$

والحل الوحيد الذي يظهر عندما تكون $\xi = 0$ ، وخلاف ذلك فان كلا الحدين في هذه المعادلة لهُ نفس الاشارة .

واذا وضعنا $\xi = 0$، فان المعادلة (1) تصبح :

$$\tan \eta = \frac{1}{\eta\gamma}$$

والتي يكون لها عدد منته من الحلول . وسوف نرقم الحلول الموجبة $\eta_1, \eta_2, \ldots$. والآن نجد ان جذور $p(s)$ هي $r_0 = 0$ و $r_k = (i\eta_k)^2 = -\eta_k^2$

الجزء a . غاية $sU(x, s)$ عندما s تقترب من 0 ، ومن السهولة ايجادهُ على انهُ 1 . لذلك فان هذا الجذر هو $1 \cdot e^{0t} = 1$ الى $u(x, t)$.

الجزء b . $(r_k = -\eta_k^2)$. اولاً نحسب

$$p'(s) = \cosh \sqrt{s} + \sqrt{s}\gamma \sinh \sqrt{s} + \frac{1}{2}\sqrt{s}(1 + \gamma) \sinh \sqrt{s} + \frac{1}{2} \gamma s \cosh \sqrt{s}.$$

وباستخدام الحقيقة القائلة بان $\cosh \sqrt{r_k} + \sqrt{r_k}\gamma \sinh \sqrt{r_k} = 0$ ، يمكن ان نختزل المعادلة اعلاه الى :

$$p'(r_k) = \frac{-1}{2\gamma} (1 + \gamma + \eta_k^2\gamma^2) \cos \eta_k.$$

وبهذا يكون اسهام r_k لـ $u(x, t)$

$$\frac{q(r_k)}{p'(r_k)} \exp r_k t = -2\gamma \frac{\cos \eta_k x - \eta_k \gamma \sin \eta_k x}{(1 + \gamma + \eta_k^2\gamma^2) \cos \eta_k} \exp(-\eta_k^2 t).$$

الجزء c . ان بناء الحل النهائي يترك للقاريء لاحظ ان اي محاولة لحل هذه المسألة بطريقة فصل المتغييرات تواجه بعض المشاكل لان الدوال الذاتية ليست متعامدة .

مثال 2 . في بعض الاحيان لا نهتم بالحل الكامل للمسألة ، ولكن بجزء منه فقط . فمثلاً ، مسألة التوصيل الحراري في جسم صلب شبه ـ غير منتهِ بزمن يتغير بالشروط الحدودية ، ويمكن ان نبحث عن ذلك الجزء من الحل الذي يدوم بعد فترة طويلة من الزمن . (هذه قد تكون او لا تكون حل حالة الاستقرار) . اي بشرط ابتدائي مقيد في x يعطي فقط لدرجة الحرارة الزائلة . وبهذا تكون المسألة المطلوب دراستها هي :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = f(t), \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x.$$

ان معادلة التحويل وحلها العام هما :

$$\frac{d^2U}{dx^2} = sU, \quad 0 < x, \quad U(0, s) = F(s)$$

$$U(x, s) = A \exp(-\sqrt{s}x) + B \exp(\sqrt{s}x).$$

وسوف نعطي فريضتين اضافيتين للحل :

اولاً : ان $u(x, t)$ مقيدة عندما تقترب x من اللانهاية ؛

ثانياً : $\sqrt{s}$ تعني الجذر التربيعي لـ s والتي لها جزء حقيقي غير سالب . تحت هاتين الفرضيتين ، يجب ان نختار $B = 0$ و $A = F(s)$ ، التي تجعل

$$U(x, s) = F(s) \exp(-\sqrt{s}x).$$

ولكي نجد الجزء المتواصل لـ $u(x, t)$ ، نستخدم صيغة معكوس هيفي سايد لقيم s التي لها اجزاء حقيقية غير سالبة لان قيمة s ذات الجزء الحقيقي السالب تقابل دالة تحتوي على اسس متلاشية ـ غابرة . فمثلاً ، لتكن :

$$f(t) = 1 - e^{-\beta t} + \alpha \sin \omega t$$

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\beta} + \frac{\alpha\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

نجد ان قيم S التي تجعل $U(x, s) = F(s) \exp(-\sqrt{s}x)$ غير منتهية هي 0 ، $\pm i\omega,$ $-\beta$. وتستبعد القيمة الاخيرة لانها سالبة . لذلك فإن الجزء المتواصل من الحل يعطى بـ :

$$A_0 e^{0t} + A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}$$

حيث

$$A_0 = \lim_{s\to 0} [sF(s) \exp - \sqrt{s}x] = 1$$

$$A_1 = \lim_{s\to i\omega} [(s - i\omega)F(s) \exp(-\sqrt{s}x)] = \frac{\alpha}{2i} \exp(-\sqrt{i\omega}x)$$

$$A_2 = \lim_{s\to -i\omega} [(s + i\omega)F(s) \exp(-\sqrt{s}x)] = -\frac{\alpha}{2i} \exp(-\sqrt{-i\omega}x).$$

كذلك يجب ان نعرف ان الجذرين $\pm i$ ذو جزء حقيقي موجب هو

$$\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i), \quad \sqrt{-i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i).$$

وبالتالي ، فإن الدالة المطلوبة هي :

$$1 + \frac{\alpha}{2i} \exp\left[i\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2}}(1 + i)x\right] - \frac{\alpha}{2i} \exp\left[-i\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2}}(1 - i)x\right]$$
$$= 1 + \alpha \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2}}x\right)\sin\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2}}x\right).$$

مثال 3 : اذا عرض سلك فولاذي على حقل مغناطيسي جيبي ، فإن مسألة القيم الحدودية القيم الابتدائية التي تصف ازاحته هي :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sin \omega t, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \qquad 0 < t$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1.$$

ان اللاتجانسية في المعادلة التفاضلية الجزئية تمثل تأثير القوى بالنسبة للحقل . ان معادلة التحويل وحلها هما :

$$\frac{d^2U}{dx^2} = s^2U - \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad 0 < x < 1$$

$$U(0, s) = 0, \quad U(1, s) = 0.$$

$$U(x, s) = \frac{\omega}{s^2(s^2 + \omega^2)} \frac{\cosh \frac{1}{2}s - \cosh s(\frac{1}{2} - x)}{\cosh \frac{1}{2}s}.$$

وتوجد طرق اخرى لمعكوس تحويل U وابسط هذه الطرق تتطلب حساب

$$v(x, t) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{\cosh \frac{1}{2}s - \cosh s(\frac{1}{2} - x)}{s^2 \cosh \frac{1}{2}s}\right)$$

وكتابة $u(x, t)$ على شكل التفاف :

$$u(x, t) = \int_0^t \sin \omega(t - t')v(x, t')\, dt'.$$

وتفاصيل هذه تترك للقارىء كتمرين .

ويمكن ان نستخدم ايضاً صيغة هيفي سايد . والتطبيق الآن روتيني عدا في حالة كون $\cosh (i\omega/2) = 0$ ، اي عندما يكون $\omega = \frac{2n - 1}{\pi}$ وهذه احدى الذبذبات الطبيعية للسلك .

دعنا نفرض الآن ان $\omega = \pi$، لذلك يكون :

$$U(x, s) = \frac{\pi}{s^2(s^2 + \pi^2)} \frac{\cosh \frac{1}{2}s - \cosh s(\frac{1}{2} - x)}{\cosh \frac{1}{2}s}.$$

عند النقاط $s = 0$ $s = \pm i\pi$، $s = \pm(2n - 1)i\pi$، $n = 2,3$ فإن $U(x, s)$ تصبح غير معرفة . وحساب اجزاء من معكوس التحويل المقابل للنقاط عدا $\pm i\pi$ يتم بسهولة . من الناحية الاخرى ، عند تلك النقطتين ، فإن طرقنا الاعتيادية لا يمكن استخدامها . بدلاً من توقعنا لكسور جزئية تحتوي على :

$$\frac{A_{-1}}{s + i\pi} + \frac{A_1}{s - i\pi}$$

والحدود الاخرى بالصيغة نفسها . يجب ان نختار حدوداً مثل :

$$\frac{A_{-1}(s + i\pi) + B_{-1}}{(s + i\pi)^2} + \frac{A_1(s - i\pi) + B_1}{(s - i\pi)^2}$$

والتي يكون اسهامها لمعكوس التحويل لـ U هو :

$$A_{-1}e^{-i\pi t} + B_{-1}te^{-i\pi t} + A_1e^{i\pi t} + B_1te^{i\pi t}.$$

ويمكن الآن حساب A_1 و B_1 ، مثلاً ، بملاحظة

$$B_1 = \lim_{s\to i\pi} [(s - i\pi)^2 U(x, s)]$$

$$A_1 = \lim_{s\to i\pi} \left\{(s - i\pi)\left[U(x, s) - \frac{B_1}{(s - i\pi)^2}\right]\right\}$$

وبشكل مشابهة نجد A_{-1} و B_{-1} . وان غاية B_1 ليست صعبة جداً .

$$B_1 = \lim_{s\to i\pi} \left\{\frac{\pi}{s^2(s + i\pi)} \frac{\cosh \frac{1}{2}s - \cosh s(\frac{1}{2} - x)}{(\cosh \frac{1}{2}s)/(s - i\pi)}\right\}$$

$$= \frac{\pi}{-\pi^2(2i\pi)} \frac{\cosh \frac{1}{2}i\pi - \cosh i\pi(\frac{1}{2} - x)}{\frac{1}{2} \sinh \frac{1}{2}i\pi}$$

$$= \frac{-1}{\pi^2} \cos \pi(\tfrac{1}{2} - x) = \frac{-1}{\pi^2} \sin \pi x.$$

ان غاية A_1 معقدة ولكن يمكن حسابها باستخدام قانون لوبتال . وعلى كل حال وبما ان $B_{-1} = B_1$ ، يمكن ان نلاحظ ان $u(x, t)$ تحوي على الحد الآتي :

$$B_1 te^{i\pi t} + B_{-1} te^{-i\pi t} = -\frac{2t}{\pi^2} \sin \pi x \cos \pi t$$

والتي يزداد اتساعها مع الزمن . وهذه ، بالطبع الظاهرة المتوقعة .

تمارين

1 . جد الجزء المتواصل من حل مسألة الحرارة :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 1, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = 0, \qquad 0 < x < 1.$$

2 . بين ان الجزء المتواصل لحل مثال (2) يحقق معادلة الحرارة . ما هو الشرط الحدودي الذي تحققه ؟

3 . جد الدالة $v(x, t)$ والتي تحويلها هو :

$$\frac{\cosh \frac{1}{2}s - \cosh s(\frac{1}{2} - x)}{s^2 \cosh \frac{1}{2}s}.$$

ما هي مسألة القيم الحدودية القيم الابتدائية التي تحققها $v(x, t)$ ؟

4 . حل

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \qquad 0 < t$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 1, \quad 0 < x < 1.$$

5 . a حل لـ $\omega \neq \pi$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sin \pi x \sin \omega t, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \qquad 0 < t$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \qquad 0 < x < 1.$$

b افحص الحالة الخاصة $\omega = \pi$.

6 . جد الحل الكامل لمثال (1) وبين انه يحقق الشروط الحدودية ومعادلة الحرارة .

7 . a حل :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 1 - e^{-at}, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = 0, \qquad 0 < x < 1.$$

b , افحص الحالة الخاصة عندما $a = n^2\pi^2$ لبعض الاعداد الصحيحة n .

5 . تعليقات ومصادر :

COMMENTS AND REFERENCES

لا بلاس ليس له اهمية تذكر في تحويل لا بلاس ، بالرغم من ان طريقته لحل بعض المعادلات التفاضلية يمكن اعتبارها مثالاً لاستخدامها . والتطور الحقيقي بدأ في نهاية القرن التاسع عشر عندما اكتشف العالم اولفر هيفي ساید طريقة قوية ، ولكنها غير مبررة ، وهي الطريقة الرمزية لدراسة المعادلات التفاضلية الجزئية والاعتيادية للفيزياء الرياضية . وحوالي عام 1920 ، فإن طريقة هيفي ساید اصبحت شرعية واعتبرت مثل تحويل لا بلاس الذي يستخدم الآن . وبعد ذلك التعميم كانت نظرية شوارتز في التوزيع (1940) ، وحسبان تفاضل وتكامل

ميكونسكي (1950) . والاخير يعتبر اكثر عموماً . (لاحظ المعادلات التفاضلية للرياضيات التطبيقية تأليف ديف ونايلر ، 1966) . كلا النظريتين تعطي التفسير لـ $F(s) = 1$ ، والذي هو ليس تحويل لابلاس لاية دالة ، بالمعنى الذي نستخدمه .

وتوجد اعداد اخرى من التحويلات ، تحت اسم فوريه ، ميلان ، هينكل ، وآخرين ، تشبه تحويلات لابلاس ، في حين ان بعض الدوال الاخرى تستبدل بـ e^{-st} لتعريف التكامل . « العمليات الرياضية » تأليف تشيرشل ، 1972 ، يعطي معلومات اخرى حول تطبيقات التحويلات ، ان جدوال التحويلات يمكن ايجادها في « الجداول الخاصة بتحويلات التكامل » تأليف ايردلي ، 1954 .

تمارين متنوعة

1 . حل مسألة التوصيل الحراري ؛

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma^2(u - T) = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = T_0, \qquad 0 < x < 1.$$

2 . جد « الجزء المتواصل » من الحل لـ ؛

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad u(1, t) = t, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = 0, \qquad 0 < x < 1.$$

3 . جد الحل الكامل للمسألة في تمرين (2) .

4 . جسم صلب محاط بمائع يتبادل الحرارة بطريقة الحمل . ودرجتا الحرارة u_1 و u_2 متمثلتان بالمعادلات ادناه . حل هذه المعادلات بدلالة تحويلات لابلاس .

$$\frac{du_1}{dt} = -\beta_1(u_1 - u_2)$$

$$\frac{du_2}{dt} = -\beta_2(u_2 - u_1)$$

$$u_1(0) = 1, \quad u_2(0) = 0$$

5 . حل المسألة غير المتجانسة الآتية بالتحويلات :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} - 1, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = 0, \qquad 0 < x < 1.$$

6 . جد تحويل حل المسألة .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 1, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = 0, \qquad 0 < x < 1.$$

7 . جد حل المسألة في تمرين (6) باستخدام صيغة هيفي سايد الموسعة .

8 . حل مسألة الحرارة :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = 0, \qquad 0 < t$$

$$u(x, 0) = \sin x, \quad 0 < x.$$

9 . جد تحويل الحل لـ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = 0, \qquad 0 < t$$

$$u(x, 0) = 1 \qquad 0 < x$$

$x \to \infty$ مقيدة عندما ، $u(x, t)$.

10 . في البند (11) ، فصل (2) ، تمرين (7) ، المسألة اعلاه قد تم حلها بشكل آخر . استخدم هذه الحقيقة لاثبات :

$$\frac{1}{s}(1 - e^{-\sqrt{s}x}) = \mathscr{L}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right)\right]$$

و

$$\frac{1}{s} e^{-\sqrt{s}x} = \mathscr{L}\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right)\right].$$

(الدالة الاخيرة تسمى دالة الخطأ المتممة (*complementary error function*) وتعرف بـ $\operatorname{erfc}(q) \equiv 1 - \operatorname{erf}(q)$)

11 . جد دالة t التي تحويلها اللابلاسي هو :

$$F(s) = e^{-x\sqrt{s}}.$$

12 . استخدم تعريف sinh بدلالة الدوال الاسية والسلاسل الهندسية ، لتبين ان :

$$\frac{\sinh \sqrt{s}x}{\sinh \sqrt{s}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\sqrt{s}(2n+1-x)} - e^{-\sqrt{s}(2n+1+x)}\right).$$

13 . استخدم السلسلة في تمرين (12) لايجاد حل المسألة في تمرين (6) بدلالة دوال الخطأ المتممة

14 . بين العلاقة ادناه باستخدام تمرين (11) وبالاشتقاق بالنسبة لـ S .

$$\mathscr{L}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(\frac{-k^2}{4t}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-k\sqrt{s}}.$$

15 . جد تحويل لابلاس للتوسع الدوري الفردي للدالة .

$$f(t) = \pi - t, \quad 0 < t < \pi$$

وذلك بتحويلها الى سلسلة فوريه حداً ـ بعد ـ حد .

16 . افرض ان الدالة $f(t)$ دورية ذات دورة $2a$. بين ان تحويل لابلاس لـ f يعطى بالصيغة ،

$$F(s) = \frac{G(s)}{1 - e^{-2as}},$$

حيث

$$G(s) = \int_0^{2a} f(t)e^{-st}\, dt.$$

(تلميح ، لاحظ بند (1) تمرين (6)) .

17 . استخدم طريقة هيفي سايد الموسعة لمعكوس التحويل بالصيغة

$$F(s) = \frac{G(s)}{1 - e^{-2as}}$$

حيث $G(s)$ لا تصبح غير منتهية لاية قيمة لـ s .

18 . بين ان للدالة الدورية $f(t)$ المتطابقة

$$c_n = \frac{1}{2a} G\left(\frac{in\pi}{a}\right)$$

($G(s)$ معرفة كما في التمرين 16) هي معاملات فوريه المعقدة .

19 . كيف يمكن تعيين تحويل لابلاس $F(s)$ المقابل للدالة للدورية $f(t)$ ؟

20 . هل ان هذه الدالة هي تحويل دالة دورية ؟

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + a^2}$$

21 . استخدم الطريقة في التمرين (16) لايجاد تحويل توسيع الدورية لـ :

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \pi \\ -1, & \pi < t < 2\pi. \end{cases}$$

22 . اعد التمرين (21) ، ولكن باستخدام الدالة في التمرين (15) .

23 . استخدم الطريقة في التمرين (16) لايجاد تحويل لـ :

$$f(t) = |\sin t|.$$

24 . جد التحويل لحل المسألة :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad 0 < x, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = h(t), \qquad 0 < t$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 < x$$

$u(x, t)$ مقيدة عندما $x \to \infty$.

استخدم الحل للمسألة نفسها التي وجدناها في فصل (3) ، بند (6) لاثبات القانون الاتي :

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{-sx}H(s)) = \begin{cases} h(t - x), & t > x \\ 0, & t < x. \end{cases}$$

25 . حل مسألة الموجة بالشرط الحدودي المتغير الزمن وافرض ان

$\omega \neq n\pi, n = 1, 2, \ldots .$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = \sin \omega t, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1.$$

26 . حل المسألة في تمرين (25) في الحالة الخاصة $\omega = \pi$.

الفصل السابع

الطرق العددية

Numerical Methods

1. مسائل القيم الحدودية

عادة ما تكون بعض المسائل ذات الدلالة بصيغة المعادلات التفاضلية الجزئية وحتى الاعتيادية لا يمكن حلها بالطرق التحليلية . فالصعوبات التي يمكن ان تظهر تكمن في المعاملات المتغييرة والمناطق غير المنتظمة والشروط الحدودية غير الملائمة كالتداخل او التفاصيل المربكة . ان اجهزة الحساب الان رخيصة وسهلة المنال ، والطرق العددية تزودنا باجوبة مفيدة للمسائل الصعبة . وفي هذا الفصل سوف نفحص عدة طرق بسيطة وتتلاءم مع الجهاز او اجهزة الحساب اليدوية .

بدلاً من الصيغة التحليلية ، يمكن ان نتحقق من الجدول (التقريب) لحلول مسائل القيم الحدودية . فمثلاً ،حل المسألة

$$\frac{d^2u}{dx^2} - 12xu = -1, \quad 0 < x < 1, \qquad (1)$$

$$u(0) = 1, \quad u(1) = -1 \qquad (2)$$

يمكن كتابتها بدلالة دوال وهمية .(Airy functions,). لكن قيم u المبينة في الجدول 1 ـ 7 ذات معلومات لكثير من الناس واحدى الطرق للحصول على جدول كهذا هي باستبدال المسألة التحليلية الاصلية بمسألة حسابية كما هي موصوفة ادناه .

اولا ، قيم x للجدول تنتظم حول الفترة $0 \le x \le 1$ والذي افترضناها على انها فترة لمسألة القيم الحدودية ،

$$x_i = i\Delta x, \quad \Delta x = \frac{1}{n}.$$

جدول (1 ـ 7)

الحل التقريبي للمعادلتين (1) و (2)

x	$u(x)$
0	1
0.2	0.643
0.4	0.302
0.6	−0.026
0.8	−0.406
1	−1

الاعداد التقريبية لقيم u هي

$$u_i \cong u(x_i), \ i = 0, 1, \ldots, n.$$

هذه الاعداد تتطلب تحقيق ، مجموعة من المعادلات التي نحصل عليها من مسألة القيم الحدودية وذلك باجراء التبديلات كما في جدول (2 ـ 7)

جدول 2 ـ 7)
بناء معادلات الاستبدال

الشروط الحدودية	المعادلة التفاضلية
$u(0) \to u_0$	$u(x) \to u_i$
$\frac{du}{dx}(0) \to \frac{u_1 - u_{-1}}{2\Delta x}$	$\frac{d^2u}{dx^2}(x) \to \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2}$
$u(1) \to u_n$	$\frac{du}{dx}(x) \to \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x}$
$\frac{du}{dx}(1) \to \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta x}$	$f(x) \to f(x_i)$

$f(x)$ تشير الى اي معامل او لاتجانسية في المعادلة التفاضلية .

فمثلاً ، مسألة القيم الحدودية في معادلتي (1) و (2) سوف يتم استبدالها بالمعادلات الجبرية

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2} - 12x_i u_i = -1 \qquad (3)$$

$$u_0 = 1, \quad u_n = -1. \qquad (4)$$

المعادلة (3) تتحقق لكل $i = 1, \ldots, n-1$ لذلك فان المجاهيل $u_1, \ldots, u_{n-1}$ يمكن تحديدها بهذه المجموعة من المعادلات . والمعادلات تصبح دقيقة عندما نختار n . دعنا نأخذ $n = 5$ لذلك فان $\Delta x = 1/5$ ، واذا اخذنا $(i = 1, 2, 3, 4)$ فان المعادلة (3) تصبح :

$$\begin{aligned}
&25(u_2 - 2u_1 + u_0) - \frac{12}{5} u_1 = -1, \\
&25(u_3 - 2u_2 + u_1) - \frac{24}{5} u_2 = -1, \\
&25(u_4 - 2u_3 + u_2) - \frac{36}{5} u_3 = -1, \\
&25(u_5 - 2u_4 + u_3) - \frac{48}{5} u_4 = -1.
\end{aligned} \qquad (5)$$

وعندما نستخدم الشروط الحدودية الآتية :

$$u_0 = 1, u_5 = -1 \qquad (6)$$

وبجمع المعاملات ، فان المعادلات اعلاه تصبح كالاتي :

$$\begin{aligned} -52.4u_1 + 25u_2 &= -26 \\ 25u_1 - 54.8u_2 + 25u_3 &= -1 \\ 25u_2 - 57.2u_3 + 25u_4 &= -1 \\ 25u_3 - 59.6u_4 &= 24. \end{aligned} \qquad (7)$$

هذه المنظومة المتكونة من اربع معادلات يمكن حلها بالحذف . (لاحظ برنامج الكومبيوتر في نهاية البند .) والنتيجة هي مجموعة اعداد تعطي القيم التقريبية لـ u عند النقاط $x_1 = 0.2, \ldots, x_4 = 0.8$. الاعداد في الجدول (1 ـ 7) حصلنا عليها بالطرق نفسها ، ولكن بأستخدام $n = 100$ بدلاً من $n = 5$.

والمثال الاكثر تعقيداً هو في المسألة الاتية :

$$\frac{d^2u}{dx^2} - 10u = f(x), \quad 0 < x < 1 \qquad (8)$$

$$u(0) = 1, \quad \frac{du}{dx}(1) = -1, \qquad (9)$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ -50, & x = \frac{1}{2} \\ -100, & \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$$

ان معادلات الاستبدال (replacement equations) لهذه المسألة يمكن الحصول عليها بسهولة باستخدام الجدول 2 ـ 7 . وهي

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2} - 10u_i = f(x_i) \qquad (10)$$

$$u_0 = 1, \quad \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta x} = -1. \qquad (11)$$

ونحتاج ان نعرف $u_0, u_1, \ldots, u_n$. مشتقة الشرط الحدودي عند $x = 1$ تجبرنا ان نضع u_{n+1} ضمن المجاهيل . لذلك سوف نحتاج ان نستخدم معادلة (10) حيث $i = 1, 2, \ldots, n$ لكي نحصل على عدد كافٍ من المعادلات لايجاد جميع المجاهيل . وكوننا لانستخدم u_{n+1}، فان الطريقة المفضلة هي حل الشرط الحدودي المستبدل لـ u_{n+1}

$$u_{n+1} = u_{n-1} - 2\Delta x, \qquad (12)$$

ثم نستخدم هذا التعبير في المعادلة (10) التي تقابل $i = n$ وبالتالي ، فان المعادلة الآتية ،

$$\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{(\Delta x)^2} - 10u_n = f(x_n)$$

بربطها مع المعادلة (12) تصبح ،

$$\frac{2u_{n-1} - 2\Delta x - 2u_n}{(\Delta x)^2} - 10u_n = f(x_n). \qquad (13)$$

لذلك فان المعادلة (10) لـ $i = 1, \ldots, n-1$ والمعادلة (13) تعطي n من المعادلات والتي تحدد المجاهيل $u_1, u_2, \ldots, u_n$.
ولكي نكون دقيقين اكثر ، دعنا نفرض $n = 4$، لذلك فان $\Delta x = 1/4$. المعادلات الثلاثة $(i = 1, 2, 3)$ من المعادلة (10) هي

$$16(u_2 - 2u_1 + u_0) - 10u_1 = 0 \qquad (i = 1)$$

$$16(u_3 - 2u_2 + u_1) - 10u_2 = -50 \qquad (i = 2)$$

$$16(u_4 - 2u_3 + u_2) - 10u_3 = -100 \qquad (i = 3)$$

والمعادلة (13) الخاصة $n = 4$ هي .

$$16(2u_3 - \frac{1}{2} - 2u_4) - 10u_4 = -100.$$

وعندما تتحقق هذه المعادلات وبعد تطبيق الشرط الحدودي $u_0 = 1$ فان النتيجة هي منظومة المعادلات الاربع الآتية :

$$\begin{aligned} -42u_1 + 16u_2 &= -16 \\ 16u_1 - 42u_2 + 16u_3 &= -50 \\ 16u_2 - 42u_3 + 16u_4 &= -100 \\ 32u_3 - 42u_4 &= -92. \end{aligned} \tag{14}$$

الجدول (3 ـ 7) يبين ان قيم u_i تم الحصول عليها وذلك بحل المعادلة (14) مع قيم دقيقة للنقاط المقابلة باستخدام $n = 100$

جدول (3 ـ 7)
الحل التقريبي للمعادلتين (8) و (9)

x	$u(n = 4)$	$u(n = 100)$
0	1	1
0.25	2.174	2.155
0.50	4.707	4.729
0.75	7.057	7.125
1	7.567	7.629

لحد الان ، لم نعط اي تبرير لخطوات بناء معادلات الاستبدال . ان شرح ذلك ليس صعباً وهو يعتمد على حقيقة ان حواصل قسمة الفروق هي تقريب للمشتقات . اذا كانت $u(x)$ دالة ذات عدة مشتقات ، فان

$$\frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2\Delta x} = u'(x_i) + \frac{(\Delta x)^2}{24}u^{(3)}(\bar{x}_i) \tag{15}$$

$$\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{(\Delta x)^2} = u''(x_i) + \frac{(\Delta x)^2}{12}u^{(4)}(\bar{\bar{x}}_i) \qquad (16)$$

حيث $\bar{x}_i$ و $\bar{\bar{x}}_i$ هما نقطتان قريبتان الى x_i

والان نفرض ان $u(x)$ هي الحل لمسألة القيم الحدودية :

$$\frac{d^2u}{dx^2} + k(x)\frac{du}{dx} + p(x)u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1 \qquad (17)$$

$$\alpha u(0) - \alpha' u'(0) = a, \quad \beta u(1) + \beta' u'(1) = b. \qquad (18)$$

واذا كان لـ $u(x)$ مشتقات كافية ، فعند اية نقطة $x_i = i\Delta x$ فانها تحقق المعادلة التفاضلية (17) وبالتالي تحقق المعادلة :

$$\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{(\Delta x)^2} + k(x_i)\frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2\Delta x} + p(x_i)u(x_i) = f(x_i) + \delta_i \qquad (19)$$

حيث :

$$\delta_i = \frac{(\Delta x)^2}{12}u^{(4)}(\bar{\bar{x}}_i) + k(x_i)\frac{(\Delta x)^2}{24}u^{(3)}(\bar{x}_i).$$

وكون δ_i تتناسب مع $(\Delta x)^2$ فانها صغيرة جداً عندما تكون Δx صغيرة . ان معادلة الاستبدال للمعادلة (17) حسب الجدول (2 ـ 7) ، هي

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2} + k(x_i)\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + p(x_i)u_i = f(x_i). \qquad (20)$$

لذلك ، فان قيم u عند $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ، هي التي تحقق المعادلة (19) ، سوف يحقق تقريباً المعادلة (20) ؛ وبالعكس ، الاعداد $u_0, u_1, \ldots, u_n$ ، والتي تحقق معادلات الاستبدال (20) ، فانها تحقق تقريباً المعادلة (19) . ومن الممكن البرهنة على ان الاعداد المحسوبة $u_0, u_1, \ldots, u_n$ تقترب من القيم المناسبة لـ

$u(x_i)$ عندما تقترب Δx من الصفر (بشرط الاستمرارية وبشروط اخرى على $f(x)$ ، $p(x)$، ، $k(x)$)

برنامج الكومبيوتر .

ان برنامج البيسك في الشكل (1 ـ 7) ينفذ بخطوات الحذف لحل منظومة معادلات مثل معادلة (7) . والمعادلة التي ينبغي حلها يجب وضعها كما في معادلة (7) ـ والمعادلات يجب ان تكتب بشكل مرتب وان تكون المجاهيل مسطرة بشكل عمودي . ومعامل المجهول في الموقع j، في المعادلة i ويعرف بانه عنصر مركب A(I, J) . فمثلاً A(2, 2) = −54.8 و A(3, 1) = 0 في المعادلة (7) . الطرف الايمن للمعادلة هو A(I, N+ 1) . مثلاً ، وفي معادلة (7) ، A(1, 5) = −26 والبرنامج يجب ان يسبق ببعض عبارات البيسك .

```
1000 REM GAUSS-JORDAN ELIMINATION
1010 FOR K=1 TO N
1020 REM PIVOT SEARCH
1030 KPIV=K
1040 FOR I=K TO N
1050 IF ABS(A(I,K))>ABS(A(KPIV,K)) THEN KPIV=I
1060 NEXT I
1070 PIV = A(KPIV,K)
1080 IF PIV=0 THEN PRINT "SINGULAR MATRIX":END
1090 REM ROW INTERCHANGE AND DIVISION
1100 FOR J=K TO N+1
1110 TEMP = A(KPIV,J)
1120 A(KPIV,J)=A(K,J)
1130 A(K,J)=TEMP/PIV
1140 NEXT J
1150 REM ELIMINATION
1160 FOR I=1 TO N
1170 IF I=K THEN GOTO 1220
1180 MULT=A(I,K)
1190 FOR J=K+1 TO N+1
1200 A(I,J)=A(I,J)-MULT*A(K,J)
1210 NEXT J
1220 NEXT I
1230 NEXT K
```

شكل (1 ـ 7) . قطعة من برنامج بيسك لحذف كاوس ـ جوردان

1 ـ اخبر ما هي قيمة N
2 ـ بعد $N \times (N + 1)$ مرتب A
3 ـ حمل المعاملات والاطراف اليمنى من المعادلات الى مرتب A .

فمثلاً ، العبارات المرقمة 170 ـ 100 في الشكل (2 ـ 7) تؤدي العمل لمنظومة المعادلة (7) .

وللحصول على فائدة اكبر ، فان برنامج كاوس ـ جوردان يجب ان يتبع بعبارات تطبع او تعرض حل المنظومة . والحل سوف يخزن في العمود الاخير لـ A عندما يكتمل الحساب . لذلك ، فان للمنظومة في معادلة (7) ، وبعد اكتمال الخط 1230 يكون لدينا $u_1 = A(1, 5)$ ، $u_2 = A(2, 5)$ ، $u_3 = A(3, 5)$ ، $u_4 = A(4, 5)$

```
100 N=4
110 DIM A(N,N+1)
120 DATA -52.4,25,0,0,-26 ,25,-54.8,25,0,-1
125 DATA  0,25,-57.2,25,-1,0,0,25,-59.6,24
130 FOR I=1 TO N
140 FOR J=1 TO N+1
150 READ A(I,J)
160 NEXT J
170 NEXT I
```

شكل (2 ـ 7) . قطعة من برنامج يمثل الحذف السابق لحل المعادلة (7) .

تمارين

1 . عين ثم حل معادلات الاستبدال حيث $n = 4$ للمسألة :

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -1, \quad 0 < x < 1$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 1.$$

2 . حل المسألة في التمرين (1) تحليلياً . على اساس المعادلتين (15) و (16) ، اشرح لماذا يكون الحل العددي متفقاً بشكل مضبوط مع الحل التحليلي ؟

3 . عين ثم حل معادلات الاستبدال حيث $n = 4$ للمسألة

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u = -2x, \quad 0 < x < 1$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 1.$$

4 . حل المسألة في التمرين (3) تحليلياً ثم قارن النتائج العددية مع الحل الفعلي .

5 . عين ثم حل معادلات الاستبدال حيث $n = 4$ للمسألة هو :

$$\frac{d^2u}{dx^2} = x, \quad 0 < x < 1$$

$$u(0) - \frac{du}{dx}(0) = 1, \quad u(1) = 0.$$

6 . حل المسألة في التمرين (5) تحليلياً ثم قارن النتائج العددية مع الحل الفعلي .

7 . عين ثم حل معادلات الاستبدال للمسألة

$$\frac{d^2u}{dx^2} + 10u = 0, \quad 0 < x < 1$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = -1.$$

استخدم $n = 3$ و $n = 4$ ارسم مخططات النتائج واشرح سبب التباعد بينهم .

في التمارين (8 ـ 11) ، عين ثم حل معادلات الاستبدال للمسألة المذكورة وللقيم المعطاة لـ n . واذا توفر الكومبيوتر ، فحلها ايضاً لقيم n ضعف ما أعطي ، ثم قارن النتائج .

8 . $$\frac{d^2u}{dx^2} - 32xu = 0, \quad 0 < x < 1$$
$$u(0) = 0, \quad u(1) = 1 \ (n = 4)$$

9. $$\frac{d^2u}{dx^2} - 25u = -25, \quad 0 < x < 1$$
$$u(0) = 2, \quad u(1) + u'(1) = 1 \ (n = 5)$$

10. $$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{1+x}\frac{du}{dx} = -1, \quad 0 < x < 1$$
$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \ (n = 3)$$

11. $$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} - u = -x$$
$$\frac{du}{dx}(0) = 0, \quad u(1) = 1 \ (n = 3)$$

12 . استخدام نشر سلسلة تايلوز

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x) + \ldots \quad 12$$

حيث $x = x_i$ و $h = \pm\Delta x$ $\quad (x_i + \Delta x = x_{i+1}, x_i - \Delta x = x_{i-1})$

للحصول على تمثيل يشبه المعادلتين (15) , (16)

2 . مسائل الحرارة HEAT PROBLEMS

في مسائل الحرارة ، لدينا متغييران مستقلان هما x و t ، وافترضنا انهما في الفترة $0 < x < 1$ و $0 < t$. جدول دوال $u(x, t)$ ويجب ان يعطي قيماً عند نقاط وازمنة متساوية الفترات

$$x_i = i\Delta x, \quad t_m = m\Delta t,$$

حيث $i = 0, 1, \ldots, n$ و $m = 0, 1, \ldots$ هنا ، $\Delta x = 1/n$ كما في السابق . لذا سوف نستخدم الدليل لنبين الموقع والعدد داخل قوسين والذي يشير الى مستوى الزمن لتقريب حل المسألة . اي ان :

$$u_i(m) \cong u(x_i, t_m).$$

ان المشتقات الفضائية -- (spatial derivatives) في مسألة الحرارة سوف تستبدل بخوارج قسمة الفروق كما في السابق :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_m) \to \frac{u_{i+1}(m) - 2u_i(m) + u_{i-1}(m)}{(\Delta x)^2} \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_m) \to \frac{u_{i+1}(m) - u_{i-1}(m)}{2\Delta x}. \tag{2}$$

وبالنسبة لمشتقه الزمن ، توجد عدة احتمالات للاستبدال . وسوف نقيد انفسنا بالفرق المباشر التالي :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_m) \to \frac{u_i(m+1) - u_i(m)}{\Delta t}, \tag{3}$$

والذي يؤدي الى صيغة ضمنية للحساب .
والان . ولكي نحل عددياً مسألة الحرارة البسيطة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \tag{4}$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad 0 < t \tag{5}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < 1 \tag{6}$$

سوف نعين معادلات الاستبدال حسب المعادلات (1)ـ (3) . وهذه المعادلات هي :

$$\frac{u_{i-1}(m) - 2u_i(m) + u_{i+1}(m)}{(\Delta x)^2} = \frac{u_i(m+1) - u_i(m)}{\Delta t} \tag{7}$$

وهذا يتحقق لـ $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ ، $m = 0, 1, 2, \ldots .$
والهدف من استخدام الفرق المباشر لمشتقة الزمن هو ان هذه المعادلات يمكن حلها لـ $u_i(m + 1)$ ،

$$u_i(m + 1) = ru_{i-1}(m) + (1 - 2r)u_i(m) + ru_{i+1}(m) \qquad (8)$$

حيث $r=\Delta t/(\Delta x)^2$ لذلك ،فان كلاً من $u_i(m + 1)$ يحسب من الـ us عند مستوى الزمن السابق . كون الشرط الابتدائي يعطي كل $u_i(0)$ ، فان قيم us عند زمن (1) يمكن حسابه ، لذلك فان قيم us في الزمن (2) يمكن الحصول عليها بدلالة الزمن (1) ، وهكذا في المستقبل .

وكمثال على ذلك ، نأخذ $\Delta x = 1/4$ ،($\Delta t = 1/32$) $r = 1/2$. والمعادلات التي تعطي us عند $m + 1$ هي :

$$\begin{aligned} u_1(m + 1) &= \frac{1}{2}(u_0(m) + u_2(m)) \\ u_2(m + 1) &= \frac{1}{2}(u_1(m) + u_3(m)) \qquad (9) \\ u_3(m + 1) &= \frac{1}{2}(u_2(m) + u_4(m)). \end{aligned}$$

تذكر ان الشروط الحدودية تحدد $u_4(m) = 0,\ u_0(m) = 0$ ، اذا كانت $m = 0,1,2, \ldots$، والشرط الحدودي يعطي $u_i(0) = f(x_i)$، حيث . $i = 0,1,2,3,4$. الجدول 4 ـ 7 ويمثل القيم المحسوبة لـ $u_i(m)$ للشرط الابتدائي $f(x) = x$. والاعداد المائلة تمثل المعلومات المعطاة .

والشرط الابتدائي ، $u(x, 0)=x$ ، $0 < x < 1$ يبين ان $u(1, 0)$ يجب ان يساوي (1) ، بينما الشرط الحدودي يبين انه يساوي صفراً ، وفي الحقيقة فان أياً من هذين الشرطين لايحددان $u(1, 0)$ ولاتوجد طريقة تخبرنا ماذا نفعل في مثل اختلاف كهذا ومن حسن الحظ ان اياً من هاتين الحالتين غير مهمة (لاحظ التمرين 1) .

جدول (4 ـ 7)

الحل العددي للمعادلات (4) ـ (6)

m \ i	0	1	2	3	4
0	*0*	*0.25*	*0.5*	*0.75*	*1*
1	*0*	0.25	0.5	0.75	*0*
2	*0*	0.25	0.5	0.25	*0*
3	*0*	0.25	0.25	0.25	*0*
4	*0*	0.125	0.25	0.125	*0*
5	*0*	0.125	0.125	0.125	*0*

ان اختيارنا لـ $r = 1/2$ يظهر انه طبيعي ، ربما لانه يسهل الحسابات . ومن المفيد ان ناخذ r كبيرة للحصول على مستقبل اكثر سرعة . فمثلاً ، اذا كان $r = 1$ $(\Delta t = 1/16)$ فان معادلات الاستبدال تأخذ الصيغة الاتية .

$$u_i(m + 1) = u_{i-1}(m) - u_i(m) + u_{i+1}(m).$$

والجدول (5 ـ 7) هو قيم . $u_i(m)$ محسوبة من هذه الصيغة .

جدول (5 ـ 7)

حل غير مستقر

m \ i	0	1	2	3	4
0	*0*	*0.25*	*0.50*	*0.75*	*1.0*
1	*0*	0.25	0.50	0.75	*0*
2	*0*	0.25	0.50	−0.25	*0*
3	*0*	0.25	−0.50	0.75	*0*
4	*0*	−0.75	1.50	−1.25	*0*
5	*0*	2.25	−3.50	2.75	*0*

ولا احد يعتقد ان هذه القيم المتذبذبة بشكل كبير تعطي الحل التقريبي لمسألة الحرارة . وبالفعل ، فانها تعاني من عدم الاستقرارية عند استخدام فترات زمنية طويلة نسبة الى الحجم . ان تحليل عدم الاستقرارية يتطلب دراية بنظريات المصفوفات ، ولكنها قواعد بسيطة للاشارة الى ضمانية الاستقرارية .

اولاً ، نكتب المعادلات لكل $u_i(m+1)$ بدلالة قيم u عند مستوى زمن سابق . ان معاملات هذه المعادلات تحقق شرطين اثنين

1 ـ لا يوجد معامل سالب لـ $u(m)$.
2 ـ مجموع معاملات $u(m)$ لا يزيد على (1)
وفي المثال ، معادلات الاستبدال كانت

$$u_1(m+1) = ru_0(m) + (1-2r)u_1(m) + ru_2(m)$$
$$u_2(m+1) = ru_1(m) + (1-2r)u_2(m) + ru_3(m)$$
$$u_3(m+1) = ru_2(m) + (1-2r)u_3(m) + ru_4(m).$$

والمطلوب الثاني يتحقق مباشرة ، لان $r+(1-2r)+r = 1$ لكن الشرط الاول يتحقق فقط عندما تكون $r \le 1/2$ لذلك ، فان الاختيار الاول لـ $r = 1/2$ يقابل اطول فترة زمن مستقرة .

والمسائل المختلفة تعطي قيماً عظمى ومختلفة لـ r . فمسألة التوصيل الحراري

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \tag{10}$$

$$u(0,t) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) + \gamma u(1,t) = 0, \quad 0 < t \tag{11}$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 < x < 1 \tag{12}$$

نجد أن معادلات الاستبدال ($n = 4$) هي :

$$\begin{aligned} u_1(m+1) &= ru_0(m) + (1-2r)u_1(m) + ru_2(m) \\ u_2(m+1) &= ru_1(m) + (1-2r)u_2(m) + ru_3(m) \\ u_3(m+1) &= ru_2(m) + (1-2r)u_3(m) + ru_4(m) \\ u_4(m+1) &= 2ru_3(m) + (1-2r-\tfrac{1}{2}r\gamma)u_4(m). \end{aligned} \tag{13}$$

(تذكر ان $u(1,t)$ ، الذي يقابل u_4 ، يعتبر مجهولا . وبهذا يندمج الشرط الحدودي في المعادلة لـ $u_4(m+1)$.) مرة اخرى ، متطلبات الاستقرارية الثانية تتحقق مباشرة ؛ ولكن القانون الاول يتطلب ان يكون الاتي :

$$1 - 2r - \tfrac{1}{2}r\gamma \geq 0 \quad \text{or} \quad r \leq \frac{1}{(2 + \frac{1}{2}\gamma)}. \qquad (14)$$

تمارين

1 . حل المعادلات (4 ـ 6) عددياً ، مع $f(x) = x$ وان ($\Delta x = \frac{1}{4}$)،
($r = 1/2$)
وبفرض $u_4(0) = 0$. قارن نتائجك مع الجدول (4 ـ 7)

2 . حل المعادلات (4) ـ (6) عددياً ، مع $f(x) = x$ وان $\Delta x = 1/4$
، $u_4(0) = 1$
وبفرض $r = \frac{1}{4}$ ، قارن نتائجك مع الجدول (4 ـ 7) . وتأكد من مقارنة النتائج عند الازمنة المقابلة .

3 . لاجل المسألة في المعادلات (10) ـ (12) ، جد اطول فترة زمن مستقرة عندما $\gamma = 1$ ، ثم جد الحل العددي مع القيمة القابلة لـ r .

4 . حل المسألة في المعادلات (10) ـ (12) ، مع $\Delta x = 1/4$ ، $r = 1/2$ ، $\gamma = 0$ لـ $m \leqslant 5$ ،

في كل مسألة ادناه ، عيّن معادلات الاستبدال لـ $n = 4$ واحسب اطول فترة زمن مستقرة ، ثم احسب الحل العددي لبعض قيم m .

5 . $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad u(0, t) = u(1, t) = t, \quad u(x, 0) = 0$

6 . $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad u(0, t) = u(1, t) = 1, \quad u(x, 0) = 0$

7 . $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t} - 1, \quad u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0$

8 . $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad u(0, t) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(1, t) + u(1, t) = 1, \quad u(x, 0) = 0$

9 . $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 1, \quad u(x, 0) = x$

ان ابسط انواع مسائل السلك المهتز التي درسناها في الفصل الثالث هي

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t \qquad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \qquad 0 < t \qquad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < 1, \qquad (3)$$

ونحتاج لمعالجتها الى الطرق العددية ، لان حل دالمبرت يزودنا بوسائل بسيطة ومباشرة لحساب حل $u(x, t)$ لـ t ، x ومن الناحية الاخرى ، فان المعادلة التفاضلية الجزئية تحتوي على u او اللاتجانسية ، او اذا كانت الشروط الحدودية اكثر تعقيداً ، فان حل السلسلة او حل دالمبرت قد يكون غير عملي . وفي كثير من هذه الحالات ، فان التكنيك العددي البسيط يعتبر اكثر ملاءمة .

ولكي نحور معادلة الموجة (1) الى معادلة فرق ملائمة ، اولاً ، نضع $x = i\Delta x$ $(\Delta x = 1/n)$ والازمنة $t_m = m\Delta t$ بحيث يمكن ايجاد تقريب لـ u $u(x_i, t_m) \cong u_i(m)$ عندئذ ، فأن المشتقات الجزئية بالنسبة لكل من x ، t تستبدل بالفروقات المركزية الاتية :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \to \frac{u_{i+1}(m) - 2u_i(m) + u_{i-1}(m)}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \to \frac{u_i(m+1) - 2u_i(m) + u_i(m-1)}{(\Delta t)^2}.$$

ومعادلة الموجة (1) تصبح معادلة الفرق الجزئية :

$$\frac{u_{i+1}(m) + 2u_i(m) + u_{i-1}(m)}{(\Delta x)^2} = \frac{u_i(m+1) - 2u_i(m) + u_i(m-1)}{(\Delta t)^2}$$

واذا وضعنا $\rho = \Delta t/\Delta x,$ نحصل على :

$$u_i(m+1) - 2u_i(m) + u_i(m-1) = \rho^2(u_{i+1}(m) - 2u_i(m) + u_{i-1}(m)).$$

ومعادلات الاستبدال يمكن حلها بالنسبة للمجاهيل$u_i(m+1)$وهذا يؤدي الى

$$u_i(m+1) = \rho^2 u_{i-1}(m) + 2(1-\rho^2)u_i(m) + \rho^2 u_{i+1}(m) - u_i(m-1), \qquad (4)$$

تتحقق لكل $i=1,2,\ldots,n-1$ طبيعياً ، الشروط الحدودية ، والمعادلة (2) ، تحتفظ بصيغتها مثل $u_0(m) = 0,\ u_n(m) = 0$. ومن البديهي ان المعادلة (4) تتطلب منا معرفة الحل التقريبي عند مستوى زمن m ، $m-1$ لكي نجده عند زمن $m+1$. بعبارات اخرى ، لكي نحصل على (1) u_i نحتاج $u_{i-1}(0),\ u_{i+1}(0),\ u_i(0)$ – والتي يمكن الحصول عليها من الشرط الابتدائي وكذلك (1 –) u_i وبالطبع ، فاننا لحد الان لم نطبق الشرط الابتدائي الثاني وهو :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < 1.$$

واذا استبدلنا مشتقة الزمن بتقريب الفرق المركزي ، فان هذه المعادلة تتحول الى :

$$\frac{u_i(1) - u_i(-1)}{2\Delta t} = g(x_i) \qquad (5)$$

لكل $i = 1, 2, \ldots, n-1$. المعادلة (5) مع معادلة (4) المحورة (نأخذ $m = 0$ $u_i(0) = f(x_i)$ وتؤدي الى المنظومة .

$$\begin{aligned} u_i(1) + u_i(-1) &= \rho^2 f(x_{i-1}) + 2(1 - \rho^2) f(x_i) + \rho^2 f(x_{i+1}) \\ u_i(1) - u_i(-1) &= 2\Delta t g(x_i), \end{aligned} \qquad (6)$$

والتي يمكن حلها بسهولة لـ us عند مستوى الزمن الاول :

$$u_i(1) = \frac{1}{2}\rho^2 f(x_{i-1}) + (1 - \rho^2) f(x_i) + \frac{1}{2}\rho^2 f(x_{i+1}) + \Delta t g(x_i). \qquad (7)$$

ولكي نحل المسألة في المعادلات (1)ــ (3) عدديا ، نستخدم الشرط الابتدائي $u_i(0) = f(x_i)$ لملء السطر الاول من جدولنا ، ثم نستخدم معادلة الانطلاق (*starting equation*) لملء السطر الثاني ، ثم نستمر بهذه الطريقة وصولاً الى المعادلة المعجلة (*running equation*) (4) لملء الاسطر اللاحقة .

دعنا الان نحاول حل مسألة بسيطة نفرض ان $g(x) \equiv 0$ حيث $0 < x < 1$ وان $f(x)$ معرفة بـ .

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 2(1 - x), & \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases} \qquad (8)$$

هنا سوف نختار $n = 4$ ، $\rho = 1$. (اي ان $\Delta t = \Delta x = 1/4$ والقاعدة التي سوف نستخدمها لحساب المعادلة (4) هي :

$$u_i(m + 1) = u_{i-1}(m) + u_{i+1}(m) - u_i(m - 1). \qquad (9)$$

والجدول (6 ـ 7) يمثل القيم المحسوبة لـ $u_i(m)$. الاعداد المائلة هي ، البيانات المعطاة .

جدول (6 ـ 7)

الحل العددي للمعادلات (1) ـ (3)

m \ i	0	1	2	3	4
0	*0*	*0.5*	*1*	*0.5*	*0*
1	*0*	0.5	0.5	0.5	*0*
2	*0*	0	0	0	*0*
3	*0*	−0.5	−0.5	−0.5	*0*
4	*0*	−0.5	−1	−0.5	*0*
5	*0*	−0.5	−0.5	−0.5	*0*
6	*0*	0	0	0	*0*

من السهولة ان نبين ان الحل العددي يساوي حل دالمبرت لهذه المسألة . (لاحظ التمرين 6 .) ومن الناحية الاخرى ، اذا كانت السرعة الابتدائية لاتساوي صفراً ، فان الحل العددي بشكل عام سيكون الحل التقريبي فقط للحل الصحيح .

وفي دراستنا لمعادلة الحرارة (البند ـ 2) ، لاحظنا ان اختيار Δx ، Δt ليس حراً . والشيء نفسه صحيح بالنسبة لمعادلة الموجة . ولو حاولنا حل المسألة نفسها كما اعلاه ، ولكن بفرض $\rho^2 = (\Delta t/\Delta x)^2$ تساوي (2) . لذلك فان المعادلة (4) تصبح .

$$u_i(m+1) = 2(u_{i-1}(m) - u_i(m) + u_{i+1}(m)) - u_i(m-1)$$

ان « الحل » المقابل لهذه القاعدة للحسابات مبين في جدول 7 ـ 7 (مرة اخرى ، الاعداد المائلة هي البيانات المعطاة) . بالطبع ، النتائج لاتعطي صورة لحل معادلة الموجة . انها تعاني من عدم الاستقرارية كالتي لاحظناها في البند (2) .

اولاً ، نكتب المعادلات لكل $u_i(m+1)$ بدلالة us لمستوى زمن $m-1, m$. معاملات هذه المعادلات يجب ان تحقق الشرطين الاثنين :

1 . كل معاملات $u(m)$ غير سالبة ،

2 . مجموع معاملات $u(m)$ لاتتعدى (2) .

وبالطبع ، فان $u_i(m-1)$ تظهر مع معامل (١ -) ولا يمكن عمل اي شيء تجاه هذه الحالة ، كما انها لاتدخل ضمن القواعد اعلاه .

لجدول (7 ـ 7)

حل عددي غير مستقر

m \ i	0	1	2	3	4
0	*0*	*0.5*	*1*	*0.5*	*0*
1	*0*	0.5	0	0.5	*0*
2	*0*	−1.5	1	−1.5	*0*
3	*0*	4.5	−8	4.5	*0*
4	*0*	−23.5	33	−23.5	*0*

في المعادلة (4) نلاحظ ان كلا الشرطين يلتقيان عندما تكون $\rho = \Delta t/\Delta x$ اقل او تساوي (1) وبكلمات اخرى ، فان فترة الزمن يجب ان لاتتعدى فترة الفضاء . من الناحية الاخرى، ان استخدام $\rho^2 = 1$ عندما يكون ذلك مقبولاً فانه يكون اكثر دقة .

واخيراً سوف نعطي مثالاً اخراً ، يبين كيف يمكن الحصول على النتائج العددية بسهولة في بعض الحالات والتي قد تكون مربكة تحليلياً . افرض اننا نريد حل المسألة الاتية

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 16 \cos \pi t, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \tag{10}$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad 0 < t \tag{11}$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1. \tag{12}$$

نستبدل المشتقات الجزئية كما في السابق ، لنحصل على :

$$\frac{u_{i+1}(m) - 2u_i(m) + u_{i-1}(m)}{(\Delta x)^2} = \frac{u_i(m+1) - 2u_i(m) + u_i(m-1)}{(\Delta t)^2} - 16 \cos \pi t_m.$$

وعندما يتم الحل لـ $u_i(m+1)$ ، نجد أن :

$$u_i(m+1) = (2 - 2\rho^2)u_i(m) + \rho^2 u_{i+1}(m) + \rho^2 u_{i-1}(m) - u_i(m-1) + 16(\Delta t)^2 \cos(\pi m \Delta t). \tag{13}$$

دعنا نأخذ $\Delta x = \Delta t = 1/4$ مرة اخرى ، لذلك $\rho = 1$ وان المعادلة (13) تصبح :

$$u_i(m+1) = u_{i+1}(m) + u_{i-1}(m) - u_i(m-1) + \cos\left(\frac{m\pi}{4}\right) \tag{14}$$

هذه هي المعادلات المعجلة . وان معادلة الانطلاق تأتي من دمج معادلات (14) لاجل $m = 0$

$$u_i(1) = -u_i(-1) + 1$$

(لاحظ ان $u_i(0) = 0$) . بشرط ابتدائي مستبدل ،

$$\frac{u_i(1) - u_i(-1)}{2\Delta t} = 0,$$

او و

$$u_i(1) = u_i(-1).$$

وبالتالي نجد ان $u_i(1) = \frac{1}{2}$ لـ $i = 1, 2, 3$ والان اصبح لدينا السطران العلويان من الجدول (8 ـ 7) ، والباقي يمكن ملؤها باستخدام المعادلات (14) (حيث

$\cos \pi/4 \cong 0.71$ ، الاعداد المائلة هي البيانات المعطاة:

جدول (8 ـ 7)

الحل العددي للمعادلات (10) ـ (12) .

m \ l	0	1	2	3	4
0	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
1	*0*	0.50	0.50	0.50	*0*
2	*0*	1.21	1.71	1.21	*0*
3	*0*	1.21	1.91	1.21	*0*
4	*0*	0.00	0.00	0.00	*0*
5	*0*	−2.21	−2.91	−2.21	*0*
6	*0*	−3.62	−5.12	−3.62	*0*
7	*0*	−2.91	−4.33	−2.91	*0*

تمارين

1 . احصل على الحل التقريبي للمعادلات (1) و (2) و (3) حيث $f(x) \equiv 0$ ، $g(x) \equiv 1$. خذ $\rho = 1, \Delta x = 1/4$.

2 . قارن نتائج التمرين (1) مع حل دالمبرت .

3 . احصل على الحل التقريبي للمعادلات (1) و (2) و (3) حيث $f(x) \equiv 0$ ، $g(x) = \sin \pi x$ ، خذ $\rho = 1, \Delta x = 1/4$.

4 . قارن نتائج التمرين (3) مع الحل الصحيح (6) . $u(x, t)=(1/\pi) \sin \pi x \sin \pi t$

5 . احصل على الحل التقريبي للمعادلات (1) و (2) و (3) حيث $g(x) \equiv 0$ ، $f(x)$ كما في المعادلة (8) . استخدم $\Delta x = 1/4$ ، $\rho^2 = 1/2$.

6 . قارن عناصر الجدول (6 ـ 7) مع حل دالمبرت .

7 . احصل على الحل التقريبي لهذه المسألة بشرط حدودي متغير الزمن . واستخدم $\Delta x = \Delta t = 1/4$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = h(t), \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1$$

$$h(x) = \begin{cases} 1, 0 < t < 1 \\ -1, 1 < t < 2 \end{cases}$$

وان $h(t+2) = h(t)$ و $h(0) = h(1) = 0$.

8 . المهمة نفسها كما التمرين (7) ولكن $h(t) = \sin \pi t$. استخدم (0.7) بدلاً من $\sqrt{2}/2$.

9 . جد معادلة الانطلاق والمعادلة المعجلة للمسألة ادناه . استخدم $\Delta x = 1/4$ ، جد اطول فترة زمن مستقرة ثم احسب القيم للحل التقريبي لـ m لحد 8 .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 16u, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1$$

حيث $f(x)$ معطاة في المعادلة (8) .

10 . باستخدام $\Delta x = 1/4$ و $\rho^2 = 1/2$ ، قارن الحل العددي للمسألة في التمرين (9) مرة مع الحد $16u$ واخرى بدونه في المعادلة التفاضلية الجزئية .

4 . معادلة الجهد POTENTIAL EQUATION

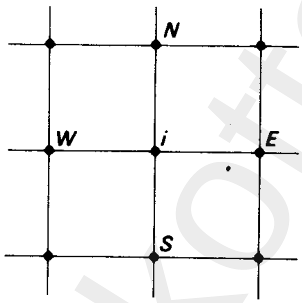
في هذا البند ، سوف نركز انتباهنا على الحلول العددية التقريبية لمعادلة الجهد . والمعادلات ذات العلاقة في المنطقة R للمستوي xy . وبقية الحصول على التبسيط ، سوف نقيد انفسنا بالمناطق التي تنطبق حدودها على مستقيمات ورقة والبيانات المقسمة الى مربعات. لذلك سوف نحصل على اشكال مثل المستطيلات ، Ls و Ts ، وليس على دوائر او مثلثات . ان ورقة البيانات تزودنا بشبكة من النقاط الجاهزة في المنطقة R وكذلك على الحدود التي نرغب في معرفة حل المسألة . هذه النقاط يمكن ترقيمها بصيغة معينة وعادة من اليسار الى اليمين ومن الاسفل الى الاعلى .

وفي مثل mesh كهذه ، فان استبدال مؤثر لابلاس هو

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \to \frac{u_W - 2u_i + u_E}{(\Delta x)^2} + \frac{u_N - 2u_i + u_S}{(\Delta y)^2} \qquad (1)$$

حيث E و W تمثلان دليلين لنقاط الشبكة من اليسار الى اليمين للنقطة i. وان N و S تمثلان النقطتين العلوية والسفلية (لاحظ الشكل 3 ـ 7) . النتيجة تسمى في بعض الاحيان تقريب النقاط ـ الخمس (*five-point approximation*) الى اللابلاسية . وكوننا فرضنا ان $\Delta x = \Delta y$، فسوف نحصل على تبسيطات اخرى في الاستبدال :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \to \frac{u_N + u_S + u_E + u_W - 4u_i}{(\Delta x)^2} \qquad (2)$$



الشكل (3 ـ 7) . النقطة i على شبكة المربعات ومجاوراتها .

والان ، دعنا نعين معادلات الاستبدال لهذه المسألة البسيطة ، والتي قمنا بحلها تحليلياً في الفصل (4) .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \qquad (3)$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = 0, \quad 0 < y < 1 \qquad (4)$$

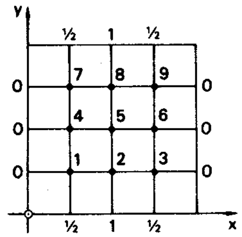
$$u(x, 0) = f(x), \quad u(x, 1) = f(x), \quad 0 < x < 1 \qquad (5)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < \frac{1}{2}, \\ 2(1 - x), & \frac{1}{2} \le x < 1. \end{cases} \qquad (6)$$

ولنأخذ $\Delta x = \Delta y = 1/4$ ونرقم نقاط الشبكة داخل المربع 1×1 كما مبين في الشكل (4 ـ 7)

وعند كل نقطة من نقاط الشبكة التسع ، سيكون لدينا معادلة استبدال هي :

$$u_N + u_S + u_E + u_W - 4u_i = 0. \qquad (7)$$



الشكل (4 ـ 7) ترقيم نقاط الشبكة وقيم الحدودية .

وهذه تجهزنا بتسع معادلات وبتسعة مجاهيل $u_1, u_2, \ldots, u_9$.

وبالاشارة الى الشكل (4 ـ 7) حيث القيم عند النقاط الحدودية مبينة ، يمكن ان نكتب المعادلات التي نريد حلها :

$$\begin{aligned}
u_2 + u_4 + \tfrac{1}{2} - 4u_1 &= 0\\
u_1 + u_3 + u_5 + 1 - 4u_2 &= 0\\
u_2 + u_6 + \tfrac{1}{2} - 4u_3 &= 0\\
u_1 + u_5 + u_7 - 4u_4 &= 0\\
u_2 + u_4 + u_6 + u_8 - 4u_5 &= 0 \qquad (8)\\
u_3 + u_5 + u_9 - 4u_6 &= 0\\
u_4 + u_8 + \tfrac{1}{2} - 4u_7 &= 0\\
u_5 + u_7 + u_9 + 1 - 4u_8 &= 0\\
u_6 + u_8 + \tfrac{1}{2} - 4u_9 &= 0.
\end{aligned}$$

وهذه ببساطة هي منظومة معادلات انية . يمكن حلها بطريقة الحذف للحصول على النتائج المبينة في الشكل (5 ـ 7) وفي هذه الحالة . يوجد تناظر في المسألة ، لذلك فان $u_1 = u_3 = u_7 = u_9$ و $u_2 = u_8$, $u_4 = u_6$. لذلك نحتاج ان نجد u_5 و u_4 و u_2 و u_1 فقط .

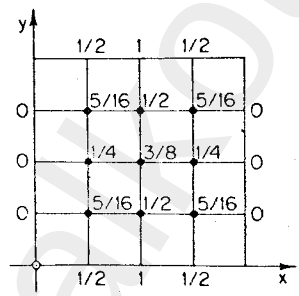
والمنظومة يمكن اختزالها الى اربع معادلات بهذه المجاهيل الاربعة ، والتي يمكن حلها يدوياً .

وكمثال ثاني ، نعين معادلات الاستبدال للمسألة .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 16(u - 1), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \tag{9}$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = 0, \quad 0 < x < 1 \tag{10}$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = 0, \quad 0 < y < 1. \tag{11}$$



الشكل 5 ـ 7) الحل العددي للمعادلات (3) ـ (6)

يمكن ان نستخدم الترقيم نفسه كما في المثال الاول (شكل 4 ـ 7) . عند كل نقطة في الشبكة ، والاستبدال هو :

$$\frac{u_N + u_S + u_E + u_W - 4u_i}{(\Delta x)^2} = 16(u_i - 1). \tag{12}$$

وكون $\Delta x = 1/4$، فان $(1/\Delta x)^2 = 16$، وان معادلة الاستبدال تصبح

$$u_N + u_S + u_E + u_W - 4u_i = u_i - 1$$

او

$$u_N + u_S + u_E + u_W - 5u_i = -1. \qquad (13)$$

واخيراً ، يمكن ان نكتب المعادلات المراد حلها . والمعادلات الاربع الاولى من المعادلات التسع ، التي تقابل المعادلة (13) حيث $i = 1,2,3,4$ ، هي :

$$\begin{aligned} u_2 + u_4 - 5u_1 &= -1 \\ u_1 + u_3 + u_5 - 5u_2 &= -1 \\ u_2 + u_6 - 5u_3 &= -1 \\ u_1 + u_5 + u_7 - 5u_4 &= -1. \end{aligned} \qquad (14)$$

حل هذه المسألة يترك كتمرين .

وفي مناطق اكثر تعقيداً ، فان استبدال موثر لابلاس له نفس الصيغة ، لأننا لازلنا نستخدم « الورقة البيانية المربعة » . ان منظومة المعادلات التي نريد حلها تكون اقل انتظاماً من المستطيلات . وكمثال على ذلك ، خذ المسألة :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -16 \text{ in } R \qquad (15)$$

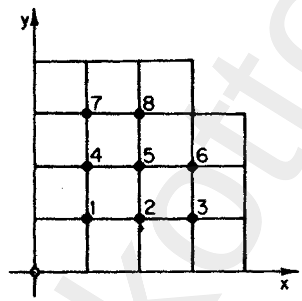
$u = 0$ على حدود _ R (16)

حيث R هي المنطقة على شكل L المتكونة من المربع 1×1 مع إزالة المربع $1/4 \times 1/4$ من الزاوية العليا اليمنى . ومعادلات الاستبدال العامة هي

$$u_N + u_S + u_E + u_W - 4u_i = -1. \qquad (17)$$

وبالترقيم المبين في الشكل (6 ـ 7) ، فان المعادلات الثمان المراد حلها هي :

$$
\begin{aligned}
u_2 + u_4 - 4u_1 &= -1 \\
u_1 + u_3 + u_5 - 4u_2 &= -1 \\
u_2 + u_6 - 4u_3 &= -1 \\
u_1 + u_5 + u_7 - 4u_4 &= -1 \\
u_2 + u_4 + u_6 + u_8 - 4u_5 &= -1 \\
u_3 + u_5 - 4u_6 &= -1 \\
u_4 + u_8 - 4u_7 &= -1 \\
u_5 + u_7 - 4u_8 &= -1.
\end{aligned}
\tag{18}
$$



الشكل (6 ـ 7) . الشبكة المرقمة في منطقة على شكل ـ .

والنتائج ، مقربة الى ثلاث مراتب ، مبينة في المعادلة (19) . لاحظ المساواة التي تظهر من التناظر في المسألة الاتية :

$$
\begin{aligned}
u_1 &= 0.656 \\
u_2 = u_4 &= 0.813 \\
u_3 = u_7 &= 0.616 \\
u_5 &= 0.981 \\
u_6 = u_8 &= 0.649
\end{aligned}
\tag{19}
$$

والمنظومات لحد (10) معادلات ، كالتي في المثال اعلاه ، يمكن حلها بالحذف ـ فمثلاً ، باستخدام البرنامج في البند (1) . من السهولة ان نلاحظ ، انه يمكن وضع شبكة جيدة للحصول على دقة اكبر . كما ان الشبكة الجيدة تزيد من عدد المعادلات بشكل كبير . فمثلاً ، اذا وضعنا $\Delta x = \Delta y = 1/10$ في الحل العددي للمعادلات (3) ـ (5) ، فان المنظومة المطلوب حلها تحتوي على (81) مجهولاً (او 25 اذا استخدمنا التناظر .) والمسائل التي تشمل الاف المجاهيل تعتبر مقبولة . ان هذه المنظومات الكبيرة من المعادلات الاتية يتم حلها عادة بطرق التكرار (*iterative methods*) ، والتي تولد متتابعة من الحلول التقريبية .

اعتبر مرة اخرى معادلة الجهد في المعادلات (3) ـ (6) . دعنا نأخذ الشبكة بـ $\Delta x = \Delta y = 1/N$ ، ثم نرقم نقاط الشبكة بدليل مزدوج . لذلك فان :

$$u(x_i, y_j) \cong u_{i,j}. \tag{20}$$

وبالتالي فان معادلات الاستبدال لمعادلة الجهد هي :

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = 0,$$

او ، باستخدام $\Delta x = \Delta y$ وبعض العمليات الجبرية ،

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}), \tag{21}$$

يتحقق لـ i ، j من 1 الى $N - 1$ (هذه هي المعادلة (7) نفسها) الشروط الحدودية ، المعادلتان (4) و (5) ، تحدد :

$$u_{0,j} = 0, \quad u_{N,j} = 0, \quad j = 0, \ldots, N \tag{22}$$

$$u_{i,0} = f(x_i), \quad u_{i,N} = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, N. \tag{23}$$

وابسط طريقة تكرار ، تسمى طريقة كاوس ـ سيدل . الان نلقى نظرة على ترتيب us ، نستبدل كل $u_{i,j}$ بتركيب us على الطرف الايمن من المعادلة (21) . وبعد اعادة هذه العملية عدة مرات على الترتيب ، فان الاعداد سوف لاتتبدل كثيراً . وعندما تتفق القيم الجديدة والقديمة لـ $u_{i,j}$ عند كل نقطة بشكل متقارب ، فاننا نتوقف .

والنتيجة هي مجموعة اعداد تحقق المعادلة (21) بشكل تقريبي . وكون الحل الصحيح لمعادلات الاستبدال لا يزال تقريبياً للمسألة الاصلية في المعادلات (3) ـ (6) ، فمن السابق لاوانه ان نحصل على الحل الصحيح لمعادلات الاستبدال .

وبرنامج بيسك في شكل (7 ـ 7) يبين طريقة تكرار كاوس ـ سيدل للمسألة في المعادلات (3) ـ (6) . والسطور 50 ـ 140 تبين الشروط الحدودية والسطور من 150 ـ 270 تبين التكرار .

```
10 REM GAUSS-SEIDEL FOR POTENTIAL PROBLEM
20 N=10
30 DIM U(N,N)
40 TOL=.001
50 REM BOUNDARY CONDITIONS
60 FOR I=0 TO N
70 XI = I/N
80 U(I,0)= 1-ABS(2*XI-1)
90 U(I,N)= 1-ABS(2*XI-1)
100 NEXT I
110 FOR J=0 TO N
120 U(0,J)=0
130 U(N,J)=0
140 NEXT J
150 REM GAUSS-SEIDEL ITERATION BEGINS
160 FOR T=1 TO N*N
170 STP=1
180 FOR I=1 TO N-1
190 FOR J=1 TO N-1
200 V=U(I,J)
210 U=.25*( U(I-1,J)+U(I+1,J)+U(I,J-1)+U(I,J+1) )
220 IF ABS(V-U) > TOL THEN STP=0
230 U(I,J)=U
240 NEXT J
250 NEXT I
260 IF STP=1 THEN 280
270 NEXT T
280 END
```

الشكل (7 ـ 7) قطعة من برنامج بيسك تكرار كاوس ـ سيدل

وعندما تتغير كل us باقل من TOL في (اكتساح واحد) ، فان التكرار يتوقف (اللغة على T تحفظ من الاخطاء مثل وضع $TOL = 0$) ولكي يكون ذا فائدة يحتاج البرنامج ان يلحق بعض الوسائل التي تبين نتائجه .

تمارين

عين ثم حل معادلات الاستبدال لكل من المسائل الآتية . واستخدم التناظر لاختزال عدد المتغييرات .

1 . $\nabla^2 u = -1, 0<x<1, 0<y<1,\ u = 0$ على الحدود $\Delta x = \Delta y = 1/4$.

2 . اعد التمرين (1) بفرض $\Delta x = \Delta y = 1/8$. قارن الحلول .

3 . $\nabla^2 u = 0,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1.\ u(0, y) = 0,\ u(x, 0) = 0,\ u(1, y) = y,\ u(x, 1) = x.\ \Delta x = \Delta y = 1/4.$

4 . اعد التمرين (3) بفرض $\Delta x = \Delta y = 1/8$.

5 . المنطقة R هي مربع طول ضلعه $1/7$ وتم ازالة مربع طول ضلعه من المركز . $\nabla^2 u = 0$ في $R, u = 0$ على الحدود الخارجية . وان $u=1$ على الحدود الداخلية . $\Delta x = \Delta y = 1/7$

6 . اعد التمرين (5) ، لكن بفرض المعادلة التفاضلية الجزيئة وهي $\nabla^2 u = -1,$ والشرط الحدودي هو $u=0$ على جميع الحدود .

7 . المنطقة R على شكل -L هي مربع ضلعه (1) . تم ازالة مربع ضلعه 1/4 من زاويته العليا اليسرى . $\nabla^2 u = -1$ في R وان $u=0$ على الحدود $\Delta x = \Delta y = 1/4$.

5 . مسائل ذات ـ بعدين

TWO-DIMENSIONAL PROBLEMS

ان طريقة فصل المتغييرات وطرق اخرى تحليلية تعطي حلولاً مرضية لمسائل ذات البعدين . ومن الناحية الاخرى . فان الطرق العددية البسيطة تعمل بشكل جيد على مسائل ذات بعدين . وفي هذا العرض البسيط . سوف نقيد انفسنا بمعادلتي الموجة والحرارة على مناطق ذات بعدين « تلائم ورقة البيانات » كما في البند (4) .

وسوف نحسب الحل التقريبي للمسألة . ونرمز للموقع في الفضاء بدليل او دليلين ولمستوى الزمن بدليل في الفترات . وان معادلتي الموجة والحرارة تتطلبان استبدال مؤثر لابلاس لذا سوف نستخدم الاستبدال نفسه كما في البند (4) .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \to \frac{u_E(m) - 2u_i(m) + u_W(m)}{(\Delta x)^2} + \frac{u_N(m) - 2u_i(m) + u_S(m)}{(\Delta y)^2}$$

وكوننا نستخدم الشبكة المربعة ، بـ $\Delta x = \Delta y,$ فان الاستبدال يصبح

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \to \frac{u_N(m) + u_S(m) + u_E(m) + u_W(m) - 4u_i(m)}{(\Delta x)^2} \qquad (1)$$

حيث N, S, E, W تمثل ادلة النقاط المجاور للنقطة ذات الدليل i. في الشبكة

دعنا الان نتأمل مسألة الحرارة في مستطيل :

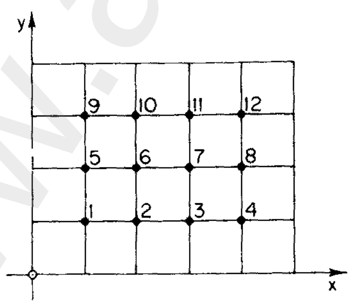
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1.25, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < t \qquad (2)$$

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(1.25, y, t) = 0, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < t \qquad (3)$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, 1, t) = 0, \quad 0 < x < 1.25, \quad 0 < t \qquad (4)$$

$$u(x, y, 0) = 1, \quad 0 < x < 1.25, \quad 0 < y < 1. \qquad (5)$$

نأخذ $\Delta x = \Delta y = 1/4$ ثم نرقم النقط الداخلية في المنطقة كما موضح في الشكل (8 ـ 7).



الشكل (8 ـ 7). شبكة مرقمة للحل العددي للمعادلات (2) ـ (5).

الآن نحسب التقريبات : $u_1(m) \cong u(^1/_4, {}^1/_4, t_m)$, $u_2(m) \cong u(^1/_2, {}^1/_4, t_m)$, $u_3(m) \cong u(^3/_4, {}^1/_4, t_m), \ldots$

الخ ، لكل $m = 1, 2, \ldots$. ومعادلات الاستبدال يمكن الحصول عليها باستخدام المعادلة (1) وبفرض الاستعاضة عن اللابلاسية والفرق الامامي بمشتقة الزمن . وبهذا تكون المعادلة هي :

$$\frac{u_N(m) + u_S(m) + u_E(m) + u_W(m) - 4u_i(m)}{(\Delta x)^2} = \frac{u_i(m+1) - u_i(m)}{\Delta t}. \quad (7)$$

وعندما نحل هذه المعادلة لـ $u_i(m+1)$, نحصل على

$$u_i(m+1) = r[u_N(m) + u_S(m) + u_E(m) + u_W(m)] + (1 - 4r)u_i(m) \quad (8)$$

التي فيها

$$r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = \frac{\Delta t}{\Delta y^2} = 16\,\Delta t.$$

ان شرط الاستقرارية في البند (2) . لا يزال مهماً وان قواعد الابهام تنطبق ايضاً . سوف نقيد r بحيث يكون $1 - 4r \geq 0$, ، او ، في هذه الحالة $\Delta t \leq 1/64$. سوف نأخذ اطول فترة زمنية ممكنة ، $\Delta t = \frac{1}{64}$ ، $r = \frac{1}{4}$ ، والتي تجعل المعادلات اسهل .

عند $m = 0$, جميع درجات الحرارة تكون (1) . واذا كانت $m \geq 1$, فان جميع درجات الحرارة الحدودية تساوي 0 وان $u_i(m)$ يساوي (1) ايضاً . فاذا كانت $m = 2$ ، نحسب

$$u_1(2) = \frac{1}{4}(u_2(1) + u_5(1) + 0 + 0) = \frac{1}{2}$$

$$u_2(2) = \frac{1}{4}(u_1(1) + u_3(1) + u_6(1) + 0) = \frac{3}{4}$$

$$u_5(2) = \frac{1}{4}(u_1(1) + u_6(1) + u_9(1) + 0) = \frac{3}{4}$$

$$u_6(2) = \frac{1}{4}(u_2(1) + u_5(1) + u_7(1) + u_{10}(1)) = 1.$$

ان الاصفار في هذه المعادلات تمثل درجات الحرارة الحدودية .

الحاسب الجيد يمكن ان يبين ان المجاهيل . u_1, u_2, u_5, u_6 فقط يراد حسابها ، لان ، في هذا المثال ، بقية المجاهيل تكون معطاة عند كل فترة زمن بالتناظر :

$$u_1(m) = u_4(m) = u_9(m) = u_{12}(m), \quad u_5(m) = u_8(m),$$

$$u_6(m) = u_7(m), \quad u_2(m) = u_3(m) = u_{10}(m) = u_{11}(m).$$

والجدول (9 ـ 7) يمثل القيم us المحسوبة في عدة ازمنة .

والآن تأمل مسألة الحرارة هذه ، والتي لا يمكن حلها بفصل المتغيرات

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{في } R \tag{9}$$

$$u = f(t) \quad \text{في } C, \tag{10}$$

$$u = 0 \text{ عند } R \text{ في } t = 0. \tag{11}$$

هنا ، R هي المنطقة بشكل ـ L و C هي الحدودية . الدالة f يمكن اخذها على انها $f(t) = t$ ، وهناك دوال اكثر تعقيداً يمكن استخدامها .

الجدول (9 ـ 7)

الحل العددي للمعادلات (2) ـ (5)

$m \backslash i$	1	2	5	6
0	1	1	1	1
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	1
2	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{16}$
3	$\frac{17}{64}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{25}{64}$	$\frac{39}{64}$

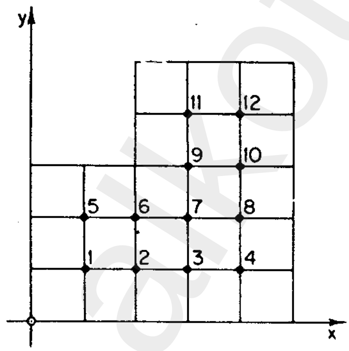
لكي نبدأ الحل العددي ، نعين شبكة المربع ، كما مبين في الشكل (9 ـ 7) . والمسافات هي $\Delta x = \Delta y = 1/5$ وترقيم النقاط مبينة . ان معادلات الاستبدال معطاة في المعادلتين (7) و (8) . لذا يجب ان نضع في الحسبان ، ان بعض النقاط مجاورة لنقاط الحدود حيث درجة الحرارة معطاة بـ $f(t)$.

وكون $\Delta x = \Delta y = 1/5$ فإن الوسيط r في المعادلة (8) هو :

$$r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 25\Delta t.$$

من الواضح ، ان اطول فترة زمن مستقرة هي $\Delta t = 1/100$ ، والمقابلة لـ$r = 1/4$. وباستخدام قيمة r هذه فإن معادلة الاستبدال تصبح الآتي :

$$u_i(m + 1) = \frac{1}{4}(u_N(m) + u_S(m) + u_E(m) + u_W(m)). \qquad (12)$$



الشكل (9 ـ 7) . شبكة مرقمة للحل العددي للمعادلات (9) ـ (11) .

وبشكل دقيق ، يكون لدينا

$$u_1(m+1) = \frac{1}{4}(u_2(m) + u_5(m) + 2f(t_m))$$

$$u_2(m+1) = \frac{1}{4}(u_1(m) + u_3(m) + u_6(m) + f(t_m))$$

الخ . ادخلنا الحد $f(t_m)$ لان النقطة (1) مجاورة لنقطتين حدوديتين والنقطة (2) نقطة واحدة . لاحظ ان التناظر حول المستقيم المار بالنقطتين (4) و (7) يجعل حساب $u_8(m), \ldots, u_{12}(m)$ ليس ضرورياً . والجدول (10 ـ 7) يحوي قيماً محسوبة لـ u لاول اربع فترات زمنية .

ولحل مسائل الموجة ذات البعدين ، نستبدل اللابلاسية كما في اعلاه ونستخدم الفرق المركزي لمشتقة الزمن ، كما فعلنا في البند (3) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \to \frac{u_i(m+1) - 2u_i(m) + u_i(m-1)}{\Delta t^2}. \qquad (13)$$

جدول (10 ـ 7)

الحل العددي للمعادلات (9) ـ (11) .

m \ i	1	2	3	4	5	6	7	f(m)
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	1.0
2	0.5	0.25	0.25	0.5	0.5	0.25	0	2.0
3	1.22	0.75	0.69	0.75	1.22	0.69	0.25	3.0
4	1.99	1.40	1.19	1.84	1.98	1.30	0.69	4.0

وكمثال على هذا ، دعنا الآن نأخذ اهتزاز الغشاء المربعي ، كما هو موصوف في المسألة الآتية :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < t \qquad (14)$$

$$u(x, 0, t) = 0, \; u(x, 1, t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \qquad (15)$$

$$u(0, y, t) = 0, \; u(1, y, t) = 0, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < t \tag{16}$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \tag{17}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = g(x, y), \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1. \tag{18}$$

والاستبدال النموذجي لمعادلة الموجة (14) يتشكل من استخدام المعادلة (1) اللابلاسية والمعادلة (13) لمشتقة الزمن :

$$\frac{u_i(m+1) - 2u_i(m) + u_i(m-1)}{(\Delta t)^2} = \frac{u_N(m) + u_S(m) + u_E(m) + u_W(m) - 4u_i(m)}{(\Delta x)^2} \tag{19}$$

وكالعادة نحل بالنسبة لـ$u_i(m+1)$ ونستخدم الاختصار $\rho = \Delta t/\Delta x$ فتصبح النتيجة

$$u_i(m+1) = \rho^2[u_E(m) + u_W(m) + u_N(m) + u_S(m)] + (2 - 4\rho^2)u_i(m) - u_i(m-1). \tag{20}$$

ان قواعد الاستقرارية المعطاة اعلاه تبقى قابلة التطبيق . لذلك يجب ان نختار $\rho^2 \leq 1/2$ لكي نحصل على حل مقنع .

واذا اردنا ان نكون اكثر دقة . فسوف نأخذ $\rho^2 = 1/2$ (اي ان $\Delta x = \Delta y = 1/4$، $\Delta t = \sqrt{2}/4$) ونفرض ان البيانات الابتدائية من المعادلتين (11) ، (12) هي :

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{قرب } x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{4}, \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases} \qquad g(x, y) \equiv 0.$$

والمعادلة المعجلة هي المعادلة (20) ، التي بفرض $\rho^2 = 1/2$ تصبح

$$u_i(m+1) = \frac{1}{2}\Big[u_E(m) + u_W(m) + u_N(m) + u_S(m)\Big] - u_i(m-1). \tag{21}$$

ولايجاد معادلة الانطلاق نحل المعادلة (21) بفرض $m = 0$ ومع معادلة الاستبدال لشرط السرعة ـ الابتدائية ، المعادلة (18) . وبهذا تكون المعادلات

$$u_i(1) + u_i(-1) = \frac{1}{2}\left[u_E(0) + u_W(0) + u_N(0) + u_S(0)\right]$$

$$u_i(1) - u_i(-1) = 2\,\Delta t g_i.$$

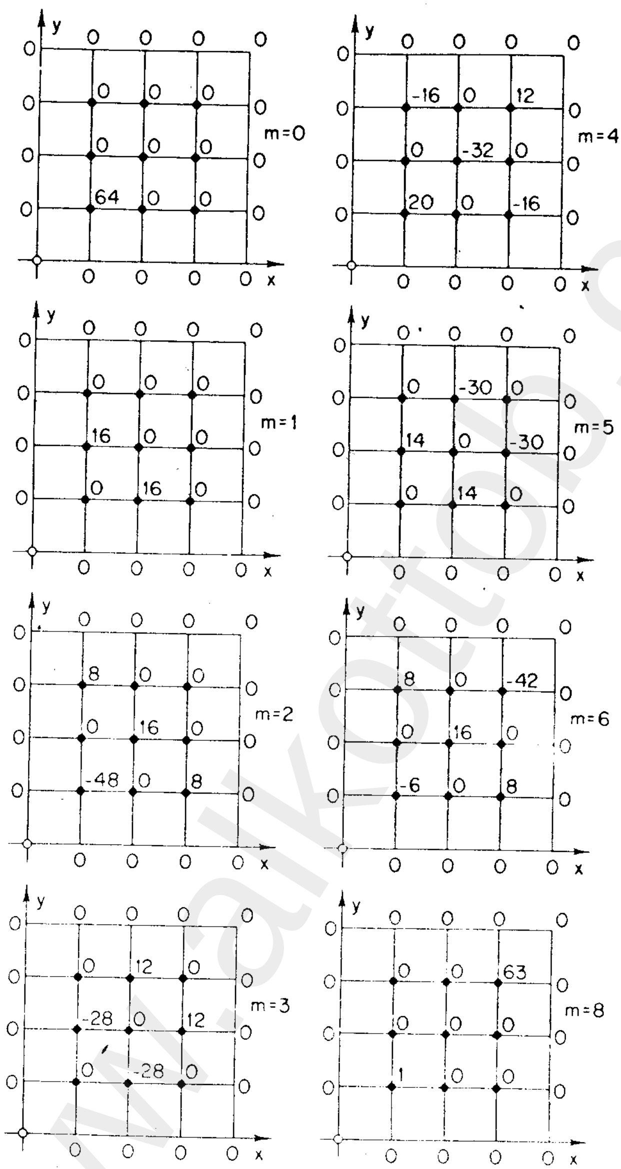
وكون $g(x, y) = 0$ نجد ان :

$$u_i(1) = \frac{1}{4}\left[u_E(0) + u_W(0) + u_N(0) + u_S(0)\right]$$

وكما في معادلة الانطلاق ، فان الطرف الايمن يحتوي على قيم معلومة لـ u فقط . والشكل (10 ـ 7) يعطي تمثيلاً للحل العددي في عدة ازمان .

وابسط تكنيك عددي هو الذي قمنا بتطويره ويمكن تطويقه بسهولة للتعامل مع اللا تجانسية ، والشروط الحدودية التي تحوي مشتقات u ، او الشروط الحدودية لازمنة متغيرة . وحتى المناطق غير المستطيلة يمكن معالجتها بشرط يناسب بشكل جيد شبكة مستطيلة .

عدة تمارين توضح هذه النقاط .



الشكل (10 ـ 7) ازاحة الغشاء المربعي . الاعداد المبينة هي 64 × $u_i(m)$.

تمارين

في التمارين (1 ـ 5) عين معادلات الاستبدال باستخدام الشبكة المعطاة والترقيم المبين في الشكل . ثم جد $u_i(m)$ لعدة قيم لـ m مستخدماً اكبر قيمة مستقرة لـ r . افرض ان الشروط الحدودية تتجاوز الشرط الابتدائي اذا ظهر عدم اتفاق بينهما .

.1

$$\nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 0.75, \quad 0 < t$$

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(1, y, t) = 0, \quad 0 < y < 0.75, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, 0.75, t) = 1, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

$$u(x, y, 0) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 0.75$$

$\Delta x = \Delta y = 1/4$. (See Fig 7–11a.)

2

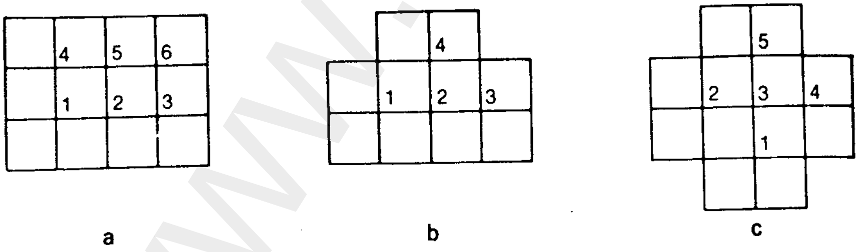
$$\nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial t} \text{ in } R, \quad 0 < t$$

$$u = 0 \text{ on boundary}, \quad 0 < t$$

$$u = 1 \text{ in } R, \quad t = 0$$

المنطقة R هي T المحورة ؛ وتبدأ بمستطيل قاعدته (1) وارتفاعه $\frac{3}{4}$ ، ثم نزيل المربع $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$ من الزاويتين العلويتين اليمنى واليسرى . خذ $\Delta x = \Delta y = 1/4$ (لاحظ الشكل (7 ـ 11 b) .

3 . اعد التمرين (2) ، عدا كون المنطقة على شكل صليب . (لاحظ الشكل (7 ـ 11 c)



الشكل (11 ـ 7) المنطقة ذات الشكل المتقاطع $\Delta x = \Delta y = 1/3$.

4 . اعد المعادلات (9) ـ (11) ، عدا كون الشرط الحدودي هو $u = 1$ على القعر $(y = 0)$, $u=0$ خلاف ذلك . (لاحظ شكل 9 ـ 7) .

5
$$\nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < t$$
$$u(0, y, t) = 0, \quad u(1, y, t) = 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < t$$
$$u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, 1, t) = 1, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$
$$u(x, y, 0) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$
$$\Delta x = \Delta y = 1/4.$$

(لاحظ شكل 4 ـ 7)

6 . جد الحل العددي لمسألة الحرارة على مربع 1×1 ، مع $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{4}$ ابتدائياً خذ $u = 0$ وخارج الحدودية $u = 0$ يوجد ثقب صغير في مركز المربع لذلك يكون $u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, t) = 1$ $t > 0$. (في الحقيقة ، المنطقة هي مربع مثقوب) .

7 . حل عددياً المعادلات (14) ـ (18) ، مع $\Delta x = \Delta y = 1/4$ ، $\rho^2 = 1/2$ خذ $f(x, y) \equiv 0$.

$$g(x, y) = \begin{cases} 4 & \text{عند}\ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

وفيزياوياً u تصف اهتزاز الغشاء المربعي الذي يتأثر من الوسط .

8 . احصل على حل عددي للمعادلات (14) ـ (18) ، مع $f(x, y) \equiv 0$ خذ $g(x, y) = 4\sqrt{2}$ ، $\Delta x = \Delta y = 1/4$, $\rho^2 = 1/2$

9 . اعد التمرين (8) ، ولكن الشكل الاتي : $f(x, y) \equiv 1$ ، $g(x, y) \equiv 0$ في المربع .

10 . احصل على الحل العددي التقريبي لمسألة الموجة في منطقة على شكل ـ L (مربع 1×1 مزالاً منه مربع $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$ من الزاوية العليا اليمنى) . افرض ان الازاحة الابتدائية تساوي (1) في الزاوية السفلى اليمنى ، والسرعة الابتدائية تساوي (0) والازاحة تساوي (0) على الحدودية . جد $\Delta x = \Delta y = 1/4$ ، $\rho^2 = 1/2$,

11 . قرب الحل لمعادلة الموجة في شريط شبه ـ منته عرضه (3) وحدات . افرض ان $u = 0$ على الحدوديات ، السرعة الابتدائية تساوي 0 ، والقيمة

الابتدائية لـ u تساوي (1) في الزاوية و (0) خلاف ذلك .
خذ $\rho^2 = 1/2, \Delta x = \Delta y = 1$.

6 . تعليقات ومصادر COMMENTS AND REFERENCES

كانت مهمتنا في هذا الفصل اعطاء مسح لبعض الطرق العددية للمسائل المشابهة لتلك المسائل التي تم معالجتها تحليلياً في الفصول السابقة . ولدينا ما يكفي للتكلم عن موضوعنا الاساسي :

احصل على معادلات الاستبدال ، ثم حل منظومة المعادلات الخطية بطرق مباشرة وطرق التكرار ، الاستقرارية العددية ، ورتبة الخطأ .

الطرق التي اعطيناها تكون مرضية في البداية وكذلك لتعلم بعض الاشياء حول المعادلات التفاضلية الجزئية ، ولكنها ليست ملائمة لحل مسائل هامة . والتكنيك الجديد لهذه المسائل يكون عالي السرعة ، دقيقاً ومستقراً ولكنه اكثر تعقيداً . وفي العديد من المصادر المتوفرة ، وهنالك مصدران ممتازان الاول هو « التحليل العددي » تاليف بوردن وفايرس ، 1985 ، يكرس للطرق العددية العامة . والثاني هو « الطرق العددية للمعادلات التفاضلية الجزئية » تاليف امز ، 1977

وتقريباً فان معظم الحلول العددية للمعادلات التفاضلية الجزئية تعتمد على الترميز ونظرية المصفوفات . ويوجد مصدران لنظرية المصفوفات هما « الجبر الخطي وتطبيقاته » تاليف سترنك ، 1980 ، و « الجبر الخطي التطبيقي » ، الطبقة الثانية ، تاليف نوبل ودانيال ، 1977 .

تمارين متنوعة

1 . عيّن ثم حل معادلات الاستبدال لمسألة القيم الحدودية . استخدم $\Delta x = 1/3$

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \sqrt{24x}\, u = 0, \quad 0 < x < 1$$

$$\frac{du}{dx}(0) = 1, \quad u(1) = 1.$$

2 . استخدم تبديل المتغيرات $x = (r - a)/(b - a)$، $v(r) = u(x)$ لتحويل المعادلة الاتية :

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) - q(r)v = f(r), \quad a < r < b$$

الى معادلة بدلالة u في الفترة $0 < x < 1$

3 . بدلالة التحويل الذي ذكرناه في التمرين (2) . فان مسألة الحرارة على حلقة تتحول الى :

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{1 + x}\frac{du}{dx} = -(1 + x), \quad 0 < x < 1$$

$$u(0) = 1, \quad u(1) = 0.$$

عين ثم حل معادلات الاستبدال لهذه المسألة مستخدماً $\Delta x = 1/4.$

4 . مسألة القيم الحدودية

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) - \gamma^2 v = 0, \quad a < r < b$$

$$v(a) = 1, \quad v(b) = 0$$

ويمكن تحويلها الى المسألة :

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{\alpha + x}\frac{du}{dx} - \gamma^2L^2u = 0, \quad 0 < x < 1$$

$$u(0) = 1, \quad u(1) = 0$$

حيث ان $L = b - a$ و $\alpha = a/L$. عين ثم حل معادلات الاستبدال باستخدام $\Delta x = 1/4$. $\alpha = 1$, $\gamma L = 1$.

5 . عين معادلات الاستبدال لمسألة الحرارة ادناه ثم حل بالنسبة لـ t الحد $\frac{1}{4}$ ،
و استخدم $\Delta x = 1/4$ ، $\Delta t = 1/32$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 1 - e^{-t}, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1.$$

6 . اعد التمرين (5) ولكن استخدم $u(0, t) = u(1, t) = 1 - e^{-32(\ln 2)t}$ لذلك
$u(0, t_m) = 1 - (0.5)^m$.

7 . قارن الحل العددي للمسألة :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = 1, \quad 0 < x < 1$$

مع حل المسألة التي تحتوي على المعادلة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 16u = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

لهما نفس الشروط الحدودية والابتدائية ، استخدم $\Delta x=1/4$،$\Delta t=1/48$ في كلتا الحالتين .

8 . في التمرين (7) ، ماهي اطول فترة زمن مستقرة لكلتي المسألتين ؟

9 . حل ولعدة ازمان مستخدما $\Delta x = 1/5$ و $r = 1/2$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = 25t, \quad u(1, t) = 0, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1$$

10 . اعد التمرين (9) ، عدا كون الشرط الحدودي الثاني هو $\partial u/\partial x\ (1, t) = 0$.

11 . المسألة ادناه تصف ازاحة سلك نهايته تهتز بسرعة هي :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 1, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1.$$

حل عددياً خلال دورة واحدة (حتى $t = 2$) ، مع $\Delta x = \Delta t = 1/4$

12 . اعد التمرين (11) ، عدا كون الطرف الايمن من الشرط الحدودي هو $u(1, t) = h(t), 0 < t,$ حيث ان :

$$h(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \le 1 \\ 0, & 1 < t \le 2 \end{cases}$$

و $h(t + 2) = h(t)$ حل عددياً . حيث $\Delta x = \Delta t = 1/4$ لقيم كافية لـ t بحيث يصبح الرنين واضحاً .

13 . استخدم $\Delta x = \Delta y = 1/4$ جد الحل العددي للمسألة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \frac{1}{x}, \quad 0 < x < 1$$

$$u(0, y) = 1, \quad u(1, y) = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} y, \quad 0 < y < 1.$$

14 . الحل التحليلي للمسألة في التمرين (13) هو $u(x, y) = (2/\pi)\tan^{-1}(y/x)$.
قارن النتائج العددية مع الحل الصحيح .

15 . استخدم $r = 1/4$, و $\Delta x = \Delta y = 1/4$ جد الحل العددي للمسألة التالية :

$$\nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

$$u(0, y, t) = u(1, y, t) = 0, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < t$$

$$u(x, y, 0) = 1, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1.$$

16 . الحل التحليلي للمسألة في التمرين (15) هو :

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(1 - \cos n\pi)(1 - \cos m\pi)}{\pi^2 mn} \sin n\pi x \sin n\pi y \, e^{-(m^2+n^2)\pi^2 t}$$

استخدم الحد $m = n = 1$ فقط بهذا الحل ، قارب النسبة

$$R = \frac{u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, t_{m+1})}{u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, t_m)}$$

مع النسبة التي تقابل us المحسوبة في التمرين (15) .

BIBLIOGRAPHY المصادر

Abramowitz, M., and I. Stegun (eds). *Handbook of Mathematical Functions*, 10th ed. Washington, D.C., National Bureau of Standards, 1972.

Ames, W.F. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2d ed. New York, Academic Press, 1977.

Andrews, L.C. *Special Functions for Engineers and Applied Mathematicians*. New York, MacMillan, 1985.

Burden, R.L., and J.D. Faires. *Numerical Analysis*, 3d ed. Boston, PWS Publishers, 1985.

Carslaw, H.S., and J.C. Jaeger. *Conduction of Heat in Solids*, 2d ed. New York, Oxford University Press, 1959.

Churchill, R.V., and J.W. Brown. *Fourier Series and Boundary Value Problems*, 3d ed. New York, McGraw-Hill, 1978.

Churchill, R.V. *Operational Mathematics*, 3d ed. New York, McGraw-Hill, 1972.

Courant, R., and D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics*, Vol I. New York, Wiley-Interscience, 1953.

Crank, J. *The Mathematics of Diffusion*, 2d ed. New York, Oxford University Press, 1975.

Dahlquist, G. and A. Björk. *Numerical Methods*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1974.

Davis, P.J., and R. Hersh. *The Mathematical Experience*. Boston, Houghton Mifflin, 1981.

Duff, G.F.D., and D. Naylor. *Differential Equations of Applied Mathematics*. New York, John Wiley & Sons, 1966.

Erdelyi, A., W. Magnus, F. Oberhettinger, and F. Tricomi. *Tables of Integral Transforms*, Vols. 1 and 2. New York, McGraw-Hill, 1954.

Feller, W. *Introduction to Probability Theory and its Applications*, Vol. I, 3d ed. New York, John Wiley & Sons, 1968.

Jerri, A.J. The Shannon Sampling Theorem—Its Various Extensions and Applications: A Tutorial Review *Proceedings of the IEEE* 65:1565–1596, 1977.

Kac, M. Can one hear the shape of a drum? *American Mathematical Monthly* 73 (Slaught Memorial Papers, No. 11):1–23, 1966.

Lamb, H. *Hydrodynamics*, 6th ed. Cambridge, Cambridge University Press, 1932 (Reprinted by Dover, New York, 1945).

Morse, P.M., and H. Feshbach. *Methods of Theoretical Physics*. New York, McGraw-Hill, 1953.

Morley, T. A simple proof that the world is three-dimensional. *SIAM Review* 27:69–71, 1985.

Noble, B., and J.W. Daniel. *Applied Linear Algebra*, 2d ed. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1977.

O'Neil, P.V. *Advanced Engineering Mathematics*. Belmont, CA, Wadsworth, 1983.

Peskin, C.S. *Partial Differential Equations in Biology*. New York, Courant Institute of Mathematical Sciences, 1975.

The Physics of Music, San Francisco, Freeman, 1978.

Pinsky, M.A. The eigenvalues of an equilateral triangle. *SIAM Journal of Mathematical Analysis* 11:819–827, 1980.

Protter, M.H., and H.F. Weinberger. *Maximum Principles in Differential Equations*. New York, Springer-Verlag, 1984.

Ralston, A., and P. Rabinowitz. *A First Course in Numerical Analysis*, 2d ed. New York, McGraw-Hill, 1978.

Rashevsky, N. *Mathematical Biophysics*, 3d ed. New York, Dover, 1960.

Rossing, T.D., The Physics of Kettledrums, *Scientific American*, Nov. 1982, pp. 172–178.

Sagan, H. *Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics*. New York, John Wiley & Sons, 1966.

Schwan, H.P. (ed). *Biological Engineering*. New York, McGraw-Hill, 1969.

Strang, G. *Linear Algebra and its Applications*, 2d ed. New York, Academic Press, 1980.

Street, R.L. *Analysis and Solution of Partial Differential Equations*. Monterey, CA, Brooks/Cole, 1973.

Tolstov, G.P. *Fourier Series*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1962 (Reprinted by Dover, New York, 1976).

Widder, D.V. *The Heat Equation*. New York, Academic Press, 1975.

Ziemer, R.E., W.H. Tranter, and D.R. Fannin. *Signals and Systems*. New York, Macmillan, 1983.

الملاحق

APPENDIX الملحق

TRIGONOMETRIC FUNCTIONS الدوال المثلثية

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{(A + B)}{2} \cos \frac{(A - B)}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{(A + B)}{2} \sin \frac{(A - B)}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{(A + B)}{2} \cos \frac{(A - B)}{2}$$

$$\cos A - \cos B = 2 \sin \frac{(A + B)}{2} \sin \frac{(B - A)}{2}$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}(\cos(A - B) - \cos(A + B))$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}(\sin(A - B) + \sin(A + B))$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}(\cos(A - B) + \cos(A + B))$$

$$\cos A = \frac{1}{2}(e^{iA} + e^{-iA}), \ \sin A = \frac{1}{2i}(e^{iA} - e^{-iA})$$

$$\cos^2 A + \sin^2 A = 1$$

HYPERBOLIC FUNCTIONS الدوال الزائدية

$$\cosh A = \frac{1}{2}(e^{A} + e^{-A}), \ \sinh A = \frac{1}{2}(e^{A} - e^{-A})$$

$$d \cosh u = \sinh u \, du, \ d \sinh u = \cosh u \, du$$

$$\sinh(A \pm B) = \sinh A \cosh B \pm \cosh A \sinh B$$

$$\cosh(A \pm B) = \cosh A \cosh B \pm \sinh A \sinh B$$

$$\sinh A + \sinh B = 2 \sinh \frac{(A+B)}{2} \cosh \frac{(A-B)}{2}$$

$$\sinh A - \sinh B = 2 \cosh \frac{(A+B)}{2} \sinh \frac{(A-B)}{2}$$

$$\cosh A + \cosh B = 2 \cosh \frac{(A+B)}{2} \cosh \frac{(A-B)}{2}$$

$$\cosh A - \cosh B = 2 \sinh \frac{(A+B)}{2} \sinh \frac{(A-B)}{2}$$

$$\sinh A \sinh B = \frac{1}{2}(\cosh(A+B) - \cosh(A-B))$$

$$\sinh A \cosh B = \frac{1}{2}(\cosh(A+B) + \sinh(A-B))$$

$$\cosh A \cosh A = \frac{1}{2}(\sinh(A+B) + \cosh(A-B))$$

$$\cosh^2 A - \sinh^2 A = 1$$

CALCULUS حسبان التفاضل والتكامل

1. Derivative of a product مشتقة الجداء

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$$

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v' + \ldots + \binom{n}{n-1}uv^{(n-1)} + uv^{(n)}$$

2. Rules of integration قوانين التكامل

a. $\int_a^b (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x))dx = c_1 \int_a^b f_1(x)dx + c_2 \int_a^b f_2(x)dx$

b. $\int_a^a f(x)dx = 0$

c. $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$

d. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

3. Derivatives of integrals مشتقات تكاملات

a. $\frac{d}{dt}\int_a^b f(x, t)dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)dx$

b. $\frac{d}{dt}\int_a^t f(x)dx = f(t)$

c. $\frac{d}{dt}\int_{u(t)}^{v(t)} f(x, t)dx = f(v(t),t)v'(t) - f(u(t), t)u'(t) + \int_{u(t)}^{v(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)dx$

4. Integration by parts التكامل بالتجزئة

a. $\int uv'dx = uv - \int vu'dx$

b. $\int uv''dx = v'u - vu' + \int vu''dx$

5. Functions defined by integrals الدوال المعرفة بالتكاملات

a. Natural logarithm اللوغارتم الطبيعي

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{dz}{z}$$

b. Sine-integral function دالة تكامل ـ جيب

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin z}{z}dz$$

c. Normal probability distribution function دالة توزيع الاحتمالية الطبيعية

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2}dz$$

d. Error function دالة الخطأ

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$$

$$\operatorname{erf}(x) = 2\Phi(\sqrt{2}x) - 1$$

e. Integrated Bessel function دالة بيسل التكاملية

$$IJ(x) = \int_0^x J_0(z)dz$$

TABLE OF INTEGRALS جدول التكاملات

1. Rational functions الدوال النسبية

1.1 $\displaystyle\int \frac{dx}{h + kx} = \frac{1}{k} \ln |h + kx|$

1.2 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a}\right)$

1.3 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2)$

1.4 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right|$

1.5 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2} \ln|x^2 - a^2|$

2. Radicals الجذور

2.1 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) \quad \text{or} \quad \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

2.2 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sqrt{x^2 + a^2}$

2.3 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) \quad (x > a)$

2.4 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \sqrt{x^2 - a^2}$

2.5 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad |x| < a$

$$2.6 \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2} \quad |x| < a$$

3. Exponentials and hyperbolic functions الدوال ا الدوال الاسية والزائدية

$$3.1 \quad \int e^{kx}dx = \frac{e^{kx}}{k}$$

$$3.2 \quad \int xe^{kx}dx = \frac{kx - 1}{k^2}e^{kx}$$

$$3.3 \quad \int \sinh kx\,dx = \frac{\cosh kx}{k}$$

$$3.4 \quad \int \cosh kx\,dx = \frac{\sinh kx}{k}$$

$$3.5 \quad \int x \sinh kx\,dx = \frac{x \cosh kx}{k} - \frac{\sinh kx}{k^2}$$

$$3.6 \quad \int x \cosh kx\,dx = \frac{x \sinh kx}{k} - \frac{\cosh kx}{k^2}$$

4. Sines and cosines الجيب وجيوب التمام

$$4.1 \quad \int \sin \lambda x\,dx = \frac{-\cos \lambda x}{\lambda}$$

$$4.2 \quad \int \cos \lambda x\,dx = \frac{\sin \lambda x}{\lambda}$$

$$4.3 \quad \int x \sin \lambda x\,dx = \frac{\sin \lambda x}{\lambda^2} - \frac{x \cos \lambda x}{\lambda}$$

$$4.4 \quad \int x \cos \lambda x\,dx = \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2} + \frac{x \sin \lambda x}{\lambda}$$

$$4.5 \quad \int x^2 \sin \lambda x\,dx = \frac{2x \sin \lambda x}{\lambda^2} + \frac{(2 - \lambda^2x^2) \cos \lambda x}{\lambda^3}$$

$$4.6 \quad \int x^2 \cos \lambda x\,dx = \frac{2x \cos \lambda x}{\lambda^2} + \frac{(\lambda^2x^2 - 2) \sin \lambda x}{\lambda^3}$$

$$4.7 \quad \int \sin \lambda x \sin \mu x\,dx = \frac{\sin (\mu - \lambda) x}{2(\mu - \lambda)} - \frac{\sin (\mu + \lambda) x}{2(\mu + \lambda)} \quad (\lambda \neq \mu)$$

$$4.8 \quad \int \sin \lambda x \cos \mu x\,dx = \frac{\cos (\mu - \lambda) x}{2(\mu - \lambda)} - \frac{\cos (\mu + \lambda) x}{2(\mu + \lambda)} \quad (\lambda \neq \mu)$$

$$4.9 \quad \int \cos \lambda x \cos \mu x\,dx = \frac{\sin (\mu - \lambda) x}{2(\mu - \lambda)} + \frac{\sin (\mu + \lambda) x}{2(\mu + \lambda)} \quad (\lambda \neq \mu)$$

$$4.10 \quad \int \sin^2 \lambda x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2\lambda x}{4\lambda}$$

$$\textbf{4.11} \int \sin \lambda x \cos \lambda x \, dx = \frac{\sin^2 \lambda x}{2\lambda}$$

$$\textbf{4.12} \int \cos^2 \lambda x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2\lambda x}{4\lambda}$$

$$\textbf{4.13} \int e^{kx} \sin \lambda x \, dx = \frac{e^{kx}(k \sin \lambda x - \lambda \cos \lambda x)}{k^2 + \lambda^2}$$

$$\textbf{4.14} \int e^{kx} \cos \lambda x \, dx = \frac{e^{kx}(k \cos \lambda x + \lambda \sin \lambda x)}{k^2 + \lambda^2}$$

$$\textbf{4.15} \int \sinh kx \sin \lambda x \, dx = \frac{k \cosh kx \sin \lambda x - \lambda \sinh kx \cos \lambda x}{k^2 + \lambda^2}$$

$$\textbf{4.16} \int \sinh kx \cos \lambda x \, dx = \frac{k \cosh kx \cos \lambda x + \lambda \sinh kx \sin \lambda x}{k^2 + \lambda^2}$$

$$\textbf{4.17} \int \cosh kx \sin \lambda x \, dx = \frac{k \sinh kx \sin \lambda x - \lambda \cosh kx \cos \lambda x}{k^2 + \lambda^2}$$

$$\textbf{4.18} \int \cosh kx \cos \lambda x \, dx = \frac{k \sinh kx \cos \lambda x + \lambda \cosh kx \sin \lambda x}{k^2 + \lambda^2}$$

5. Bessel functions دوال بيسل

$$\textbf{5.1} \int xJ_0(\lambda x)dx = \frac{xJ_1(\lambda x)}{\lambda}$$

$$\textbf{5.2} \int x^2J_0(\lambda x)dx = \frac{x^2J_1(\lambda x)}{\lambda} + \frac{xJ_0(\lambda x)}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^3}IJ(\lambda x)$$

$$\textbf{5.3} \int J_1(\lambda x)dx = -\frac{J_0(\lambda x)}{\lambda}$$

$$\textbf{5.4} \int x^{n+1}J_n(\lambda x)dx = \frac{x^{n+1}J_{n+1}(\lambda x)}{\lambda}$$

$$\textbf{5.5} \int J_n(\lambda x)\frac{dx}{x^{n-1}} = -\frac{J_{n-1}(\lambda x)}{\lambda x^{n-1}}$$

$$\textbf{5.6} \int J_0^2(\lambda x)xdx = \frac{x^2}{2}[J_0^2(\lambda x) + J_1^2(\lambda x)]$$

$$\textbf{5.7} \int J_n^2(\lambda x)xdx = \frac{x^2}{2}[J_n^2(\lambda x) - J_{n-1}(\lambda x)J_{n+1}(\lambda x)]$$

$$= \frac{x^2}{2}[J_n'(\lambda x)]^2 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{n^2}{2\lambda^2}\right)[J_n(\lambda x)]^2$$

اجابات التمارين الفردية

الفصل الصفر

بند ١ ، صفحة ،

1 . $\phi(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$

3 . للمعادلة معاملات ثابتة. $k = 0, p = 0; u(t) = c_1 + c_2 t.$

5 . $w(r) = c_1 r^{\lambda} + c_2 r^{-\lambda}$

7 . كامل ثم حل لاجل dv/dx ، وكامل مرة ثانية ؛
$v(x) = c_1 + c_2 \ln|h + kx|.$

9 . $u(x) = c_1 + c_2/x^2$

11 . $u(r) = c_1 + c_2 \ln r$

13 . الحدودية المميزة $m^4 + \lambda^4 = 0$ ؛ الجذور هي $m = \pm(1 \pm i)\lambda/\sqrt{2}$
الحل العام $u(x) = e^{\mu x}(c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x)$
$+ e^{-\mu x}(c_3 \cos \mu x + c_4 \sin \mu x), \mu = \lambda/\sqrt{2}.$

15 . الحدودية المميزة $(m^2 + \lambda^2)^2 = 0$ ؛ الجذور هي $m = \pm i\lambda$ (مكررة) .
الحل العام هو $u(x) = (c_1 + c_2 x) \cos \lambda x + (c_3 + c_4 x) \sin \lambda x.$

17 . $\gamma(t) = \text{Lnt}, u_2(t) = t^b \text{ Int}.$

19 . $u'' + \lambda^2 u = 0; R(\rho) = (a \cos \lambda\rho + b \sin \lambda\rho)/\rho$

21 . $t^2 d^2u/dt^2 = v'' - v'; t\, du/dt = v'; v'' + (k-1)v' + pv = 0.$

23 . العلاقة هي $u'' - p^2 u = 0$ ؛ الحل العام هو $u(t) = c_1 e^{pt} + c_2 e^{-pt}$
اذا كان $u(t) = 0$ ، فان $c_2 = -c_1 e^{2pt}$ ؛ واذا كان $u'(t) = 0$ ، فان $c_2 = c_1 e^{2pt}$. اذا كانت cs باشارات موجبة ، $u(t) = 0$ في بعض الاحيان ، ولكن $u'(t)$ لا يمكن ان يساوي 0 . اذا كانت cs لها الاشارة نفسها ، $u'(t) = 0$ في بعض الاحيان ، ولكن $u(t)$ لا يمكن ان يساوي 0 . واذا كانت احدى الـ c تساوي 0 ، فان $u(t)$ و $u'(t)$ لا يمكن ان تكونا 0 .

بند 2 ، صفحة

1. $u(t) = T + ce^{-at}$

3. $u(t) = te^{-at} + ce^{-at}$

5. $u(t) = \frac{1}{2}t \sin t + c_1 \cos t + c_2 \sin t$

7. $u(t) = \frac{1}{12}e^t + \frac{1}{2}te^{-t} + c_1e^{-t} + c_2e^{-2t}$

9. $u(\rho) = -\frac{1}{6}\rho^2 + \frac{c_1}{\rho} + c_2$

11. $h(t) = -320t + c_1 + c_2e^{-0.1t},\ c_1 = h_0 + 3200,\ c_2 = -3200$

13. $v(t) = t,\ u_p(t) = te^{-at}$

15. $v_1(x) = \sin x - \ln|\sec x + \tan x|,\ v_2 = -\cos x;$
$u_p(x) = -\cos x \ln|\sec x + \tan x|$

17. $v_1(t) = t^2/2,\ v_2(t) = -t;\ u_p(t) = -t^2/2$

19. $v_1(t) = -1/2t,\ v_2(t) = -t/2,\ u_p(t) = -1.$

بند 3 ، صفحة

1. a. B اختياري ، $u(x) = B \sin x$

b. $u(x) = 1 - \cos x - \dfrac{1 - \cos 1}{\sin 1} \sin x$ (وحيد)

2. لا يوجد حل .

3. a. $\lambda = (2n - 1)\dfrac{\pi}{2a}$

c. $\lambda = \dfrac{n\pi}{a},\ n = 0, 1, 2, \ldots$

5. $c = -a/2, \quad c' = h - \dfrac{1}{\mu} \cosh\left(\dfrac{\mu a}{2}\right)$

7. $u(x) = T + c_1 \cosh \gamma x + c_2 \sinh \gamma x$, where $\gamma = \sqrt{\dfrac{hC}{\kappa A}}$ and

$$c_1 = T_0 - T, \quad c_2 = -\frac{\gamma \cosh \gamma a + \sinh \gamma a}{\gamma \sinh \gamma a + \cosh \gamma a}c_1$$

9. $u(x) = T + T^*\left(1 - \cosh \gamma x - \dfrac{1 - \cosh \gamma a}{\sinh \gamma a} \sinh \gamma x\right)$

حيث $$T^* = \frac{\theta I^2 R}{hC} \text{ and } \gamma = \sqrt{\frac{hC}{\kappa A}}$$

بند 4 ، صفحة ،

1 .

a. $u'' + \frac{1}{r}u' - u = 0, \quad r = 0$. a

b. $u'' - \frac{2x}{1-x^2}u' = 0, \quad x = \pm 1$. b

c. $u'' + \cot\phi u' - u = 0, \quad \phi = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots .$. c

d. $u'' + \frac{2}{\rho}u' + \lambda^2 u = 0, \quad \rho = 0$. d

3 . $u(0)$ مقيدة

$$u(\rho) = \frac{H}{6\kappa}(c^2 - \rho^2) + \frac{Hc}{3h} + T$$

5 . عدا $u(\rho) = \frac{1}{\rho}(A \cos \mu\rho + B \sin \mu\rho).\ u(\rho) \equiv 0\ \mu a = \pi, 2\pi,$

نصف القطر الحرج هو. $a = \frac{\pi}{\mu}$

بند 5 ، صفحة ،

1 . $$G(x, z) = \begin{cases} z(a - x)/(-a), & 0 < z \le x \\ x(a - z)/(-a), & x \le z < a \end{cases}$$

3 . $$G(x, z) = \begin{cases} \cosh \gamma z \sinh \gamma(a - x)/(-\gamma \cosh a), & 0 < z \le x \\ \cosh \gamma x \sinh \gamma(a - z)/(-\gamma \cosh a), & x \le z < a \end{cases}$$

5 . $$G(\rho, z) = \begin{cases} \dfrac{(c - \rho)/\rho}{-c/z^2}, & 0 \le \rho < z \\ \dfrac{(c - z)/z}{-c/z^2}, & z \le \rho < c \end{cases}$$

7 . $$G(x, z) = \begin{cases} \dfrac{\sinh \gamma z\, e^{-\gamma x}}{-\gamma}, & 0 < x \le z \\ \dfrac{\sinh \gamma x\, e^{-\gamma z}}{-\gamma}, & z \le x \end{cases}$$

9 . $u(\rho) = (\rho^2 - c^2)/6$

11 .. $$u(x) = \int_0^a G(x, z)f(z)dz = \int_0^x \frac{z(a-x)}{-a}f(z)dz + \int_x^a \frac{x(a-z)}{-a}f(z)dz$$

يوجد حالتان هما :

$$(i)\ x \leq a/2, \text{ so } u(x) = \int_{a/2}^a \frac{x(a-z)}{-a}dz;$$

$$(ii)\ x > a/2, \text{ so } u(x) = \int_x^a \frac{x(a-z)}{-a}dz.$$

النتيجة هي :

$$: u(x) = \begin{cases} -ax/8, & 0 < x < a/2 \\ -x(a-x)^2/2a, & a/2 < x < a \end{cases}$$

13 . (i) عند الحدود اليسرى ، $z > l = x$ ، لذلك ، فان السطر الثاني للمعادلة (17) يتحقق . الشرط الحدودي (2) يتحقق لاجل v لانه يتحقق بـ u_1 . عند الحدود اليمنى ، استخدام السطر الاول للمعادلة (17) .

(ii) عند $x = z$ ، فان كلا سطري المعادلة (17) يعطي القيمة نفسها

$$(iii)\ v'(z+h) - v'(z-h) = \frac{u_1(z)u'_2(z+h) - u'_1(z-h)u_2(z)}{W(z)}$$

عندما تقترب h من 0 ، البسط يقترب من $W(z)$.

(iv) هذا صحيح لان $u_1(x)$ و $u_2(x)$ حلان للمعادلة المتجانسة .

تمارين متنوعة ، صفحة ،

. 1 $$u(x) = T_0 \cosh \gamma x + (T_1 - T_0 \cosh \gamma a)\frac{\sinh \gamma x}{\sinh \gamma a}$$

3 $$u(x) = T_0$$

. 5 $$u(r) = p(a^2 - r^2)/4$$

. 7 $$u(\rho) = H(a^2 - \rho^2)/6 + T_0$$

. 9 $$u(x) = T + (T_1 - T)\cosh \gamma x/\cosh \gamma a$$

. 11 $$u(x) = T_0 + (T - T_0)e^{-\gamma x}$$

. 13 $$h(x) = \sqrt{ex(a - x) + {h_0}^2 + ({h_1}^2 - {h_0}^2)(x/a)}$$

. 15 $$u(x) = w(1 - e^{-\gamma x}\cos \gamma x)EI/k \text{ where } \gamma = (k/4EI)^{1/4}$$

$$u(x) = \begin{cases} T_0 + Ax, & 0 < x < \alpha a \\ T_1 - B(a - x), & \alpha a < x < a \end{cases}$$

$$A = \frac{\kappa_2}{\kappa_1(1 - \alpha) + \kappa_2\alpha} \cdot \frac{T_1 - T_0}{a}, \quad B = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}A$$

. 19 $$u(x) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2x}) - \frac{1}{2}(1 - e^{-2a})\frac{1 - e^{-x}}{1 - e^{-a}}$$

. 21

.a $u(x) = \sinh px/\sinh pa$

.b $u(x) = \cosh px - \dfrac{\cosh pa}{\sinh pa}\sinh px = \sinh p(a - x)$

.c $u(x) = \cosh px/\cosh pa$

.d $u(x) = \cosh p(a - x)/\cosh pa$

.e $u(x) = -\cosh p(a - x)/p \sinh pa$

.f $u(x) = \cosh px/p \sinh pa$

. 23

.a $$u(x) = \frac{x}{2}\ln\left|\frac{1 + x}{1 - x}\right| - 1$$

.b $$u(x) = 1 + (1 - x)\ln\left|\frac{x}{1 - x}\right|$$

. 25 اضرب بـ u' ثم كامل : $\frac{1}{2}(u')^2 = \frac{1}{5}\gamma^2u^5 + c_1$. لان $u(x) \to 0$ عندما $x \to \infty$ ، كذلك ، $u'(x) \to 0$ ؛ وبهذا يكون $c_1 = 0$. الان $u' = -\sqrt{2\gamma^2/5}\, u^{5/2}$ او $u^{-5/2}u' = -\sqrt{2\gamma^2/5}$ (الجذر السالب يقلل u) يمكن اخذ تكاملهما لنحصل على .

$c_2 =$ يعطي $x = 0$ الشرط عند . $(-2/3)u^{-3/2} = -\sqrt{2\gamma^2/5}x + c_2.$
$(-3/2)U^{-3/2}$

اخيراً $u(x) = (U^{-3/2} + (3/2)\sqrt{2\gamma^2/5}x)^{-2/3}$

27. $u(x) = \frac{w_0}{EI}\left(\frac{x^4}{24} - \frac{ax^3}{6} + \frac{a^2x^2}{2}\right)$

الفصل الاول

بند 1 ، صفحة ،

1. a $2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - + \cdots\right)$

b $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{25}\cos 5x + \cdots\right)$

c. $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right)$

d $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{3}\cos 2x + \frac{1}{15}\cos 4x + \frac{1}{35}\cos 6x + \cdots\right).$

3. $f(x + p) = 1 = f(x)$ ، لبعض p ولكل x .

5. اذا كانت c من مضروبات p ، فأن مخطط $f(x)$ بين c و $c + p$ هو نفسه بين 0 و p . خلاف ذلك ، لتكن k عدد صحيح بحيث يقع kp بين c و $c + p$،

$$\int_c^{c+p} f(x)dx = \int_c^{kp} f(x)dx + \int_{kp}^{c+p} f(x)dx = \int_{c^*}^{p} f(x)dx + \int_0^{c^*} f(x)dx$$

حيث $c^* = c - (k - 1)p.$

7. a.

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$$

b.

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6}\sin x - \sin\frac{\pi}{6}\cos x$$

c.

$$\sin x\cos 2x = -\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\sin 3x$$

بند 2 ، صفحة ،

. 1

a. $\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left[\cos \pi x + \frac{1}{9}\cos 3\pi x + \frac{1}{25}\cos 5\pi x + \cdots\right]$

b. $\frac{4}{\pi}\left[\sin \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5}\sin \frac{5\pi x}{2} + \cdots\right]$

c. $\frac{1}{12} - \frac{1}{\pi^2}\left[\cos 2\pi x - \frac{1}{4}\cos 4\pi x + \frac{1}{9}\cos 6\pi x - + \cdots\right].$

$$f(x) = f(x - 2na), \quad 2na < x < 2(n+1)a$$

$$f(x) \sim a_0 + \sum_1^\infty a_n \cos(n\pi x/a) + b_n \sin(n\pi x/a)$$

$$a_0 = \frac{1}{2a}\int_0^{2a} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{a}\int_0^{2a} f(x)\cos(n\pi x/a)dx$$

$$b_n = \frac{1}{a}\int_0^{2a} f(x)\sin(n\pi x/a)dx$$

5 . الفردية (a), (d) (e) ، الزوجية : (b), (c)

a7. $\frac{2}{\pi}\left(\sin \pi x - \frac{1}{2}\sin 2\pi x + - \cdots\right)$

b. هذه الدالة هي سلسلة فوريه .

c. $\frac{4}{\pi^2}\left(\sin \pi x - \frac{1}{9}\sin 3\pi x + \frac{1}{25}\sin 5\pi x - + \cdots\right)$

9 . اذا كان $f(-x) = -f(x)$ و $f(x) = f(a - x)$ ، حيث $0 < x$ $< a$ ، لان المعاملات ذات الادلة الزوجية هي اصفاراً .

مثال : الموجة المربعة .

a. $f(x) = 1 = \frac{2}{\pi}\sum_1^\infty \frac{1 - \cos n\pi}{n}\sin\frac{n\pi x}{a}$

b. $f(x) = \frac{a}{2} - \frac{2a}{\pi^2}\sum_1^\infty \frac{1 - \cos n\pi}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{a}$

$= \frac{2a}{\pi}\sum_1^\infty \frac{-\cos n\pi}{n}\sin\frac{n\pi x}{a}$

d. $f(x) = \frac{2}{\pi}\left[1 - \sum_1^\infty \frac{1 + \cos n\pi}{n^2 - 1}\cos nx\right]$

$= \sin x$

13 . الزوجية ، نعم ، الفردية ، نعم فقط عندما $f(0) = f(a) = 0$.

بند 3 ، صفحة

1 . a . استخدم $x = 0$. b $x = \frac{1}{2}$; c $x = 0$;
3 . الى $f(x)$ في كل مكان .

بند 4 ، صفحة

1 . (c) و (d) ، (f) ، (g) لها سلاسل فوريه المنتظمة .
3 . جميع سلاسل جيب التمام تتقارب بانتظام ، سلاسل الجيب تتقارب بانتظام فقط في حالة (b) .
5 . (c)، (a)

بند 5 ، صفحة .

1 . $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
3 . $f'(x) = 1$ ، $0 < x < \pi$. سلسلة الجيب لا يمكن اشتقاقها ، بسبب التوسيع الدوري الفردي لـ f ليس مبتمراً . ولكن سلسلة جيب التمام يمكن اشتقاقها .
5 . بالنسبة لسلسلة الجيب : $f(0+) = 0$ و $f(a-) = 0$ ، وبالنسبة لسلسلة جيب التمام ليس من الضروري اضافة شرط اضافي .

7 . كلا . الدالة $\ln\left|2 \cos \frac{x}{2}\right|$ ليست مستمرة مقطعياً .

9 . لان f فردية ، دورية ، وملساء مقطعياً ، وكذلك $b_n \to 0$ عندما $\eta \to \infty$. اذن $\sum_{n=1}^{\infty} \left|n^k b_n e^{-n^2 t}\right|$ تتقارب لكل الاعداد الصحيحة k $(t > 0)$ وباستخدام اختبار المقارنة واختبار النسبة :

لبعض M $\left|n^k b_n e^{-n^2 t}\right| \leq M n^k e^{-n^2 t}$

و $\frac{M(n+1)^k e^{-(n+1)^2 t}}{M n^k e^{-n^2 t}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k e^{-(2n+1)t} \to 0$

عندما $n \to \infty$. باستخدام المبرهنة 7 ، (a) تتحقق . الخاصية
(b) تتحقق منها بالتعويض المباشر

بند 6 ، صفحة

1. $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\ln\left|2\cos\frac{x}{2}\right|\right)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

3 . a . المعاملات تؤول للصفر ، بالرغم من $\int_{-1}^{1}|x|^{-1}\,dx$ غير محدد .

5 . التكامل يجب ان يكون محدد ، لان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = \infty$

بند 7 ، صفحة

1 . المساواة المطلوب اثباتها هي

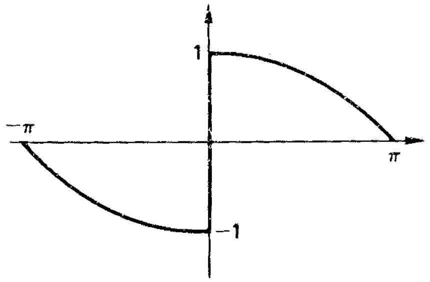
$$2\sin\tfrac{1}{2}y\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos ny\right) = \sin(N+\tfrac{1}{2})y.$$

الطرف الايسر تم تحويله بالشكل

$$\begin{aligned}
&2\sin\tfrac{1}{2}y\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos ny\right)\\
&\quad = \sin\tfrac{1}{2}y + \sum_{n=1}^{N} 2\sin\tfrac{1}{2}y\cos ny\\
&\quad = \sin\tfrac{1}{2}y + \sum_{n=1}^{N}\left(\sin(n+\tfrac{1}{2})y - \sin(n-\tfrac{1}{2})y\right)\\
&\quad = \sin\tfrac{1}{2}y + \sum_{n=1}^{N}\sin(n+\tfrac{1}{2})y - \sum_{n=0}^{N-1}\sin(n+\tfrac{1}{2})y\\
&\quad = \sin(N+\tfrac{1}{2})y
\end{aligned}$$

لان جميع الحدود الاخرى تحذف .

3 . $\phi(0+) = 1,\ \phi(0-) = -1$



5 . a $f'(x) = \frac{3}{4}x^{-1/4}$ حيث $0 < x < \pi$ (وان f' دالة فردية) .
لذلك ، فأن f لها مماس عمودي عند $x = 0$ ، بالرغم من انها مستمرة في تلك النقطة

b. $\phi(y) = \dfrac{|y|^{3/4}}{2 \sin\frac{1}{2}y} \cos\frac{1}{2}y, \ -\pi < y < \pi$

هي جداء دوال مستمرة وبالتالي فهي مستمرة ، عدا عندما يكون المقام 0 .
عند $y = 0$ ، $\sin\frac{1}{2}y \cong y, \cos\frac{1}{2}y \cong 1, 2$ لذلك ، فان
$\phi(y) \cong |y|^{3/4}/y = \pm|y|^{-1/4}$ قرب $y = 0$.
الآن ، $\int_{-\pi}^{\pi} \phi^2(y)dy$ محدد ، لذلك ، فإن معاملات فوريه لـ ϕ تقترب من 0 .

بند 8 ، صفحة

1 . $\hat{a}_6 = -0.00701, \ a_6 = -0.00569$

3 . $\hat{a}_0 = 1.367$

$$
\begin{aligned}
\hat{a}_1 &= -0.844 & \hat{b}_1 &= -0.043 \\
\hat{a}_2 &= 0.208 & \hat{b}_2 &= -0.115 \\
\hat{a}_3 &= 0.050 & \hat{b}_3 &= -0.050 \\
\hat{a}_4 &= 0.042 & \hat{b}_4 &= 0.00 \\
\hat{a}_5 &= -0.0064 & \hat{b}_5 &= 0.043 \\
\hat{a}_6 &= 0.0167
\end{aligned}
$$

بند 9 ، صفحة .

1 . كل دالة ممثلة (لكل $x > 0$) .

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(\lambda)\cos \lambda x \, d\lambda = \int_0^{\infty} B(\lambda)\sin \lambda x \, d\lambda.$$

.a $A(\lambda) = 2/\pi(1 + \lambda^2), \quad B(\lambda) = 2\lambda/\pi(1 + \lambda^2)$

.b $A(\lambda) = 2 \sin \lambda/\pi\lambda, \quad B(\lambda) = 2(1 - \cos \lambda)/\pi\lambda$

.c $A(\lambda) = 2(1 - \cos \lambda\pi)/\lambda^2\pi, \quad B(\lambda) = 2(\pi\lambda - \sin \lambda\pi)/\pi\lambda^2$

.a
$$\frac{1}{1 + x^2} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda} \cos \lambda x \, d\lambda$$

.b
$$\frac{\sin x}{x} = \int_0^{\infty} A(\lambda) \cos \lambda x \, d\lambda$$

حيث
$$A(\lambda) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & 1 < x \end{cases}$$

5 . دوال معاملات الجيب وجيب التمام لـ $f'(x)$ هي $-\lambda A(\lambda)$ و $\lambda B(\lambda)$ ـ على التوالي.

7 . بدل متغير التكامل من x الى λx.

9.a. **a.** $A(\lambda) \equiv 0, \quad B(\lambda) = \dfrac{2 \sin \lambda\pi}{\pi(1 - \lambda^2)}$

.b **b.** $A(\lambda) = \dfrac{1 + \cos \lambda\pi}{\pi(1 - \lambda^2)}, \quad B(\lambda) = \dfrac{\sin \lambda\pi}{\pi(1 - \lambda^2)}$

.c **c.** $A(\lambda) = \dfrac{2(1 + \cos \lambda\pi)}{\pi(1 - \lambda^2)}, \quad B(\lambda) \equiv 0$

11 . لان $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$ محدد ، الغايات لـ $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ تتبع من تعريف التكامل غير المحدد . كذلك

$$|a_0| \leq \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx \rightarrow 0.$$

بند 10، صفحة .

.a ، ف
$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx = \text{Re} \sum_{0}^{\infty} (re^{ix})^n = \text{Re} \frac{1}{1 - re^{ix}}$$

.b . ض
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!} = \text{Im} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n!} = \text{Im} \exp(e^{ix})$$

3. $$e^{\alpha x} = 2\frac{\sinh \alpha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 + n^2}(\alpha \cos nx - n \sin nx)\right)$$

5
$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda)e^{i\lambda x}\, d\lambda$$

.a
$$C(\lambda) = \frac{1}{2\pi(1 + i\lambda)}$$

.b
$$C(\lambda) = \frac{1 + e^{-i\lambda\pi}}{2\pi(1 - \lambda^2)}$$

تمارين متنوعة ، صفحة

1.
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$b_n = \begin{cases} 0, & n \text{ زوجي} \\ \dfrac{4 \sin n\alpha}{\pi\alpha n^2}, & n \text{ فردي} \end{cases}$$

3. نعم . عندما

$\alpha \to 0$, $(\sin n\alpha)/n\alpha \to 1$.

5.
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x/a)$$

$$b_n = \frac{2h}{\pi^2}\frac{\sin n\pi\alpha}{n^2}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1 - \alpha}\right)$$

.a
$$b_n = 0, \quad a_n = 0, \quad a_0 = 1$$

.b
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x/a), \quad b_n = \frac{2(1 - \cos n\pi)}{n\pi}$$

c و d تشبه a

e تشبه b

f.
$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x/a) + b_n \sin(n\pi x/a)$$

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{1 - \cos n\pi}{n\pi}$$

9.
$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x/a) + b_n \sin(n\pi x/a)$$

$$a_0 = \frac{1}{2}a, \quad a_n = -\frac{2a(1 - \cos n\pi)}{n^2\pi^2}, \quad b_n = -\frac{2a \cos n\pi}{n\pi}$$

$$x = -a, \quad -a/2, \quad 0, \quad a, \quad 2a$$

$$\text{المجموع} = a, \quad 0, \quad 0, \quad a, \quad 0$$

11 .

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$a_0 = \frac{3}{4}, \quad a_n = \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi}$$

$$x = 0, \quad \pi/2, \quad \pi, \quad 3\pi/2, \quad 2\pi$$

المجموع $= 1, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4}, \quad 1$

13 .

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x, \quad b_n = 2(1 + \cos n\pi)/n\pi$$

15 .

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$b_2 = \frac{1}{2}, \quad \text{other } b_n = \frac{4 \sin(n\pi/2)}{\pi(4 - n^2)}$$

17 .

$$\sum_{1}^{N} \cos nx = \text{Re} \sum_{1}^{N} e^{inx} = \text{Re}\frac{e^{ix} - e^{iNx}}{1 - e^{ix}} = \text{Re}\frac{e^{ix/2} - e^{i(2N-1)x/2}}{e^{-ix/2} - e^{ix/2}}$$

المقام الآن هو $-2i \sin(x/2)$.

19 .

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad b_n = \frac{2a \sin(na + \pi)}{n^2a^2 - \pi^2}$$

21 .

$$f(x) = \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin \lambda a}{\lambda\pi} \cos \lambda x + \frac{1 - \cos\lambda a}{\lambda\pi} \sin \lambda x\right) d\lambda$$

23 .

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{2 \sin \lambda\pi}{\pi(1 - \lambda^2)} \sin \lambda x \, d\lambda \quad (x > 0)$$

29 . استخدم

Use $\int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda t}{\lambda} d\lambda = \frac{\pi}{2}$

13 . هذه الاجابات ليست وحيدة .

a. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x, \quad b_n = 2/n\pi$

b . $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x, \quad a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_n = 2(1 - \cos n\pi)/n^2\pi^2$

c . $\int_0^{\infty} B(\lambda) \sin \lambda x \, d\lambda, \quad B(\lambda) = 2(\lambda - \sin \lambda)/(\pi\lambda^2)$

d . $\int_0^{\infty} A(\lambda) \cos \lambda x \, d\lambda, \quad A(\lambda) = 2(1 - \cos \lambda)/(\pi\lambda^2)$

التكاملين في c و d يتقاربان نحو 0 لكل $x > 0$.

33 . استخدم 6 = s في معادلة 7 بند 8

$$\hat{a}_0 = 0.78424 \qquad \hat{a}_4 = -0.00924$$
$$\hat{a}_1 = 0.22846 \qquad \hat{a}_5 = 0.00744$$
$$\hat{a}_2 = -0.02153 \qquad \hat{a}_6 = -0.00347$$
$$\hat{a}_3 = 0.01410$$

35 . $$a_0 = \frac{a}{6}, \quad a_n = \frac{2a}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{2n\pi}{3} - \cos\frac{n\pi}{3}\right)$$

37 . $$a_0 = \frac{5}{8}, \quad a_n = \frac{2}{n^2\pi^2}\left(3\cos\frac{n\pi}{2} - 2 - \cos n\pi\right).$$

39 . $$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_n = \frac{2}{n^2\pi^2}(1 - \cos n\pi).$$

41 . $$a_0 = \frac{a^2}{6}, \quad a_n = \frac{-2a^2}{n^2\pi^2}(1 + \cos n\pi).$$

43 . $$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_n = \frac{-1}{n\pi}2\sin\frac{n\pi}{2}.$$

45 . $$b_n = \frac{1 + \cos\frac{n\pi}{2} - 2\cos n\pi}{n\pi}.$$

47 . $$b_n = a\left(\frac{2\sin(n\pi/2)}{n^2\pi^2} - \frac{\cos n\pi}{n\pi}\right).$$

49 . $$b_n = \frac{2}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{4} - \cos\frac{3n\pi}{4}\right).$$

51 . $$b_n = 2n\pi\frac{(1 - e^{ka}\cos n\pi)}{(a^2k^2 + n^2\pi^2)}$$

53 . $$A(\lambda) = \frac{2}{\pi(1 + \lambda^2)}.$$

55 . $$A(\lambda) = \frac{2(\sin\lambda b)}{\pi\lambda}$$

57 . $$A(\lambda) = \frac{2(1 - \cos\lambda)}{\pi\lambda^2}$$

59 . $$B(\lambda) = \frac{2\lambda}{\pi(1 \ldots}$$

61 . $$\frac{\ldots - \cos\lambda b)}{\lambda\pi}$$

63 $B(\lambda) = \dfrac{2(\lambda - \sin\lambda)}{\lambda^2\pi}$

65 . الحد $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ يظهر في $S_n, S_{n+1}, \ldots, S_N$
وبالتالي ، فإن $N + 1 - n$ مضروباً بـ σ_N .

67 . استخدم معادلة (13) بند 7 والمساواة في تمرين 66 .

الفصل الثاني

بند 1 ، صفحة

1 . اذا كان $\frac{\partial x}{\partial u}(0, t)$ موجباً ، فإن الحرارة تنتقل نحو اليسار ، لذلك ، فإن $u(0, t)$ تكون اكبر من $T(t)$.

3 . $-\kappa\frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = \sigma(u^4(a, t) - T^4)$

5 . احد الاحتمالات : $u(x, t)$ هي درجة حرارة القضيب الذي طوله a وسطحه الجانبي معزول . درجة الحرارة عند النهاية اليسرى تثبتت عند T_0 . والطرف الايمن غمر في وسط درجة حرارته T_1 . درجة الحرارة الابتدائية $f(x)$.

7 . $A\Delta x\, g = hC\Delta x(U - u(x, t))$، حيث h هي ثابت التناسب وان C هي المحيط ، المعادلة (4) تصبح

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{hC}{\kappa A}(U - u) = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}.$$

بند 2 ، صفحة

1 .
$$v'' - \gamma^2(v - T) = 0, \quad 0 < x < a$$
$$v(0) = T_0, \quad v(a) = T_1$$

$$v(x) = T + A\cosh\gamma x + B\sinh\gamma x,$$
$$A = T_0 - T, \quad B = \frac{(T_1 - T) - (T_0 - T)\cosh\gamma a}{\sinh\gamma a}$$

3 . $v(x) = T.$. الحرارة تتولد بمعدل يتناسب مع $u - T.$ اذا كانت $\gamma = \pi/a,$ فإن مسألة حالة الاستقرار ليس لها حل وحيد .

5 . $v(x) = A \ln(b + dx) + B, \quad A = (T_1 - T_0)/\ln(1 + ad/b),$
$B = T_0 - A \ln b$

7 . a
$$v(x) = T_0 + r(2a - x)x/2$$
b
$$v(x) = A + B \sinh \beta x + C \sinh \beta(a - x)$$
$$A = \alpha/\beta^2, \quad B = (T_1 - \alpha/\beta^2)/\sinh \beta a$$
$$C = (T_0 - \alpha/\beta^2)/\sinh \beta a.$$

بند 3 صفحة

1 .
$$w(x, t) = -\frac{2}{\pi}(T_0 + T_1) \sin \frac{\pi x}{a} \exp\left(-\frac{\pi^2 kt}{a^2}\right) - \frac{2}{\pi}\left(\frac{T_0 - T_1}{2}\right) \sin \frac{2\pi x}{a} \exp\left(-\frac{4\pi^2 kt}{a^2}\right)$$

3 . نأخذ $\xi = x/a, \tau = kt/a^2,$ و $u(x, t) = U(\xi, \tau).$ وبهذا يكون

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = \frac{\partial U}{\partial \tau}, \quad 0 < \xi < 1, \quad 0 < \tau$$

هو الصيغة المأخوذة من المعادلة التفاضلية الجزئية .

5 . **5.** $w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{a} \exp(-n^2\pi^2 kt/a^2), \quad b_n = T_0 \frac{2}{\pi} \frac{1 - \cos n\pi}{n}$

7 . $w(x, t)$ كما في 5 اعلاه ، مع $b_n = \frac{2\beta a}{\pi} \cdot \frac{1}{n}$

بند 4 ، صفحة

1 . السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n(t_1)|$ متقاربة

. 3 $a_0 = T_1/2,\ a_n = 2T_1(\cos n\pi - 1)/(n\pi)^2$

. 5 $a_0 = T_0 + T_1/3,\ a_n = 4T_1(-1)^n/n^2\pi^2$

. 7 $\phi'' + \lambda^2\phi = 0, \quad 0 < x < a,$

$$\phi(0) = 0, \quad \phi(a) = 0$$

الحل : $\phi_n = \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = n\pi/a \ (n = 1, 2, \ldots).$

بند 5 ، صفحة

. ١ $v(x, t) = T_0$

3 . مخطط G في الفترة $0 < x < 2a$ رسم بواسطة الفكاس مخطط g في المستقيم $x = a$ (يشبه التوسيع الزوجي)

.5 $g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a}, \quad 0 < x < a$

. a $b_n = \frac{8a(-1)^{n+1}}{\pi^2(2n-1)^2}$

. b $b_n = \frac{4T}{\pi(2n-1)}$

.7 $u(x, t) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \lambda_n x \exp(-\lambda_n^2 kt), \quad \lambda_n = (2n-1)\pi/2a,$

$$b_n = \frac{8T(-1)^{n+1}}{\pi^2(2n-1)^2} - \frac{4T_0}{\pi(2n-1)}$$

9 . حل حالة الاستقرار هو $v(x) = T_0 - T(x(x-2a)/2a^2)$ الانتقال يحقق المعادلات (8) ــ (5) مع

$$g(x) = T_0 - v(x) = \frac{Tx(x - 2a)}{2a^2}.$$

$$u(x, t) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \lambda_n x \exp(-\lambda_n{}^2 kt),$$ .11

$$\lambda_n = (2n - 1)\pi/2a, \quad c_n = \frac{4(T_1 - T_0)(-1)^{n+1}}{\pi(2n - 1)}$$

بند 6 ، صفحة

١ . مخطط $v(x)$ هو حط مستقيم من T_0 عند $x = 0$ الى T^* عند $x = a$ حيث

$$T^* = T_0 + \frac{ha}{k + ha}(T_1 - T_0).$$

في جميع الحالات ، T^* يكون بين T_0 و T_1

3 . الحلول السالبة لاتعطي دوال ذاتية جديدة .

7.

$$b_m = \frac{2(1 - \cos \lambda_m a)}{\lambda_m[a + (\kappa/h)\cos^2 \lambda_m a]}$$

9.

$$b_m = \frac{-2(\kappa + ah)\cos \lambda_m a}{\lambda_m(ah + \kappa \cos^2 \lambda_m a)}$$

بند 7 ، صفحة

. 1 $\lambda_n = n\pi/\ln 2, \ \phi_n = \sin(\lambda_n \ln x)$

. 3

.a $\sin \lambda_n x, \ \lambda_n = (2n - 1)\pi/2a$

.b $\cos \lambda_n x, \ \lambda_n = (2n - 1)\pi/2a$

.c ~~$\sin \lambda_n x$, λ_n a solution of $\tan \lambda a =$~~

.d $\lambda_n \cos \lambda_n x + \sin \lambda_n x$. λ_n a solution of $\cot \lambda a = \lambda$

.e $\lambda_n \cos \lambda_n x + \sin \lambda_n x$. λ_n a solution of $\tan \lambda a = 2\lambda/(\lambda^2 - 1)$

5 . دوال الوزن في العلاقات التعامدية ، وغاية التكامل هي

. a $1 + x$ من 0 الى a

. b e^x من 0 الى a

. c $\frac{1}{x^2}$ من 1 الى 2

d . e^x من 0 الى a

7 . لان λ تظهر في الشرط الحدودي .

بند 8 ، صفحة

1.
$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n, \quad 1 < x < b$$
$$c_n = 2n\pi\frac{(1 - b\cos n\pi)}{(n^2\pi^2 + \ln^2 b)}$$

3.
$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n, \quad 0 < x < a$$
$$c_n = 2n\pi\frac{(1 - e^{a/2}\cos n\pi)}{(n^2\pi^2 + a^2/4)}$$

(تلميح ، جد سلسلة جيب $e^{x/2}$.)

5.
$$b_n = \int_l^r f(x)\psi_n(x)p(x)\,dx$$

7. 1 and $\sqrt{2}\cos n\pi x, \quad n = 1, 2, \ldots$

بند 9 ، صفحة

1 . a ثابت $v(x) = \text{constant}$

b. $v(x) = AI(x) + B$

3 . اذا كان $\partial u/\partial x = 0$ في طرفيه ، فان مسألة حالة الاستقرار تكون وسطية ، لكن المعادلات (١)ـ (3) تكون متجانسة ، لذلك فان فصل المتغيرات تتحقق مباشرة . لاحظ ان $\lambda_0 = 0$ ، $\phi_0 = 1$

الحد الثابت في السلسلة لـ $u(x, t)$ هو

$$a_0 = \int_l^r p(x)f(x)\,dx \Big/ \int_l^r p(x)\,dx.$$

بند 10 ، صفحة

1 .
$$u(x, t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1 - \cos\lambda b}{\lambda}\sin\lambda x\exp(-\lambda^2 kt)\,d\lambda$$

. 3 $u(x, t)$ مع (6) معطاة بالمعادلة $B(\lambda) = \dfrac{2T_0\lambda}{\pi(\alpha^2 + \lambda^2)}$.

. 5
$$u(x, t) = \int_0^\infty A(\lambda) \cos \lambda x \exp(-\lambda^2 kt)\, d\lambda$$
$$A(\lambda) = \frac{2}{\pi\lambda} \sin \lambda b$$

. 7
$$u(x, t) = T_0 + \int_0^\infty B(\lambda) \sin \lambda x \exp(-\lambda^2 kt)\, d\lambda$$
$$B(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (f(x) - T_0) \sin \lambda x\, dx$$

بند 11 ، صفحة

. 1
$$u(x, t) = \int_0^\infty \frac{2 \sin \lambda a}{\pi\lambda} \cos \lambda x \exp(-\lambda^2 kt)\, d\lambda$$

مع معادلة (١) ، او

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-a}^{a} \exp\left(\frac{-(\xi - x)^2}{4kt}\right) d\xi \text{ with Eq. (3).}$$

5 . في معادلة (3) استبدل $f(\xi)$ و $u(x, t)$ بـ ١ .
7 . استخدم تمرين 6 وقاعدة السلسلة لايجاد $\partial^2 u/\partial x^2$ و $\partial u/\partial t$.
كذلك استخدم تمرين 6 للشرط الابتدائي . تحقق من الشرط الحدودي مباشرة .
9 . استخدم التكامل المعطى ، لتحصل على

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} \sin \lambda x\, e^{-\lambda^2 kt} d\lambda.$$

لاحظ ان $B(\lambda) = 2/\lambda\pi$ لا يمكن ايجاده استخدم الصيغ الاعتيادية لدوال معاملات فوريه .

تمارين متنوعة صفحة

1. SS: $v(x) = T_0, \quad 0 < x < a$. 1

EVP: $\phi'' + \lambda^2\phi = 0, \quad \phi(0) = 0, \quad \phi(a) = 0, \quad \lambda_n = n\pi/a, \quad \phi_n = \sin \lambda_n x, \quad n = 1, 2, \ldots$

$$u(x, t) = T_0 + \sum_1^\infty b_n \sin \lambda_n x e^{-\lambda^2_n kt}$$

$$b_n = \frac{2}{a}\int_0^a (T_1 - T_0) \sin \frac{n\pi x}{a} dx$$

SS: $v(x) = T_0 + \frac{r}{2} x(x - a), \quad 0 < x < a$. 3

EVP: $\phi'' + \lambda^2\phi = 0, \quad \phi(0) = 0, \quad \phi(a) = 0, \quad \lambda_n = n\pi/a, \quad \phi_n = \sin \lambda_n x, \quad n = 1, 2, \ldots$

$$u(x, t) = T_0 + \frac{r}{2} x(x - a) + \sum_1^\infty b_n \sin \lambda_n x \exp(-\lambda_n^2 kt)$$

$$b_n = \frac{2}{a}\int_0^a \left[T_1 - T_0 - \frac{r}{2} x(x - a)\right] \sin \frac{n\pi x}{a} dx$$

SS: $v(x) = 0, \quad 0 < x < a$

EVP: $\phi'' + (\lambda^2 - \gamma^2)\phi = 0, \quad \phi'(0) = 0, \quad \phi'(a) = 0$. 5

$$\lambda_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \gamma^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\phi_0 = 1, \quad \phi_n = \cos \frac{n\pi x}{a}$$

$$u(x, t) = a_0 \exp(-\lambda_0^2 kt) + \sum_1^\infty a_n \cos \frac{n\pi x}{a} \exp(-\lambda_n^2 kt)$$

$$a_0 = T_1/2, \quad a_n = \frac{2}{a}\int_0^a T_1(x/a) \cos \frac{n\pi x}{a} dx$$

$u(x, t) = T_0$. 7

$$u(x, t) = T_0 + \sum_{n=1}^\infty c_n \sin \lambda_n x \exp(-\lambda_n{}^2 kt),$$. 9

$$\lambda_n = \frac{(2n - 1)\pi}{2a}, \quad c_n = \frac{(T_1 - T_0) \cdot 4}{(2n - 1)\pi}$$

$$u(x, t) = T_0 + \int_0^\infty B(\lambda) \sin \lambda x \exp(-\lambda^2 kt)\, d\lambda,$$. 11

$$B(\lambda) = \frac{-2\lambda T_0}{\pi(\alpha^2 + \lambda^2)}$$

13 .
$$u(x, t) = \int_0^\infty A(\lambda) \cos \lambda x \exp(-\lambda^2 kt)\, d\lambda,$$
$$A(\lambda) = \frac{2T_0 \sin \lambda a}{\pi\lambda}$$

15 .
$$u(x, t) = \int_0^\infty (A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x) \exp(-\lambda^2 kt)\, d\lambda,$$
$$A(\lambda) = \frac{T_0 \sin \lambda a}{\pi\lambda}, \quad B(\lambda) = \frac{T_0(1 - \cos \lambda a)}{\pi\lambda}$$

او
$$u(x, t) = \frac{T_0}{\sqrt{4\pi kt}} \int_0^a \exp\left(-\frac{(\xi - x)^2}{4kt}\right) d\xi$$
$$= \frac{T_0}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{a - x}{\sqrt{4kt}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right)\right]$$

17 . u هي درجة حرارة القضيب ، السطح الاسطواني معزول في الطرف الايسر . في الطرف الايمن ، الحرارة تدخل القضيب بمعدل ثابت (لان $q(a, t)$ $= -\kappa\frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = -\kappa S$ وبهذا فان الحرارة تسرى نحو اليسار)

19 $(1/6ka)u_3 - (a/6k)u_1$ تتحقق الشروط الحدودية

21 . $u(x, t) = a_0 + \sum a_n \cos n\pi x \exp(-n^2\pi^2 t)$ حيث: $w(x, t) = -\frac{2}{u}\frac{\partial u}{\partial x}$

حيث $a_0 = 2(1 - e^{-1/2})$ $\quad a_n = \dfrac{1 - e^{-1/2}\cos n\pi}{\frac{1}{4} + (n\pi)^2}$

23 .
$$u_2 = \frac{\beta_2 V}{\beta_1 + \beta_2}, \quad u_1 = 1 - \frac{\beta_1 V}{\beta_1 + \beta_2}$$
حيث where $V = 1 - \exp(-(\beta_1 + \beta_2)t)$ و $\beta_i = h/c_i$

25 .
$$u(\rho, t) = \frac{1}{\rho}\sum_{n=1}^\infty b_n \sin \lambda_n \exp(-\lambda_n^2 kt),$$
$$\lambda_n = n\pi/a, \quad b_n = \frac{2}{a}\int_0^a \rho T \sin \lambda_n \rho\, d\rho$$

27
$$v(x) = T_0 + Sx - S\frac{\sinh \gamma x}{\gamma \cosh \gamma a}$$

29 . اذا كانت $\lambda = 0$ المعادلة التفاضلية هي $\phi'' = 0$ حلها العام $\phi(x) = c_1 + c_2 x$. الشروط الحدودية تتطلب ان يكون $c_2 = 0$ ولكنها تسمح $c_1 \neq 0$. وبالتالي ، فان

قيمة λ تجعل الحل غير الصفوي موجوداً ، وبذلك ، فان $\lambda = 0$ هي القيمة الذاتية .

31 . اختار $B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\sin\omega t\, dt$ اذا كان لـ f تمثيل تكامل فورية ، فان اختيار B يجعل $0 < t,\ u(0, t) = f(t)$

33 . $u(x, t) = -10 + 15\mathrm{erf}(x/\sqrt{4kt})$

الفصل الثالث

بند 1 ، صفحة

1 . $[u] = L, \quad [c] = L/t$

3 . $v(x) = \dfrac{(x^2 - ax)g}{2c^2}$

بند 2 ، صفحة

1

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi ct}{a}\right)$$

$$B_n = \frac{2a(1 - \cos n\pi)}{n^2\pi^2 c}$$

3

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

$$a_n = \frac{2a^2}{n^2\pi^2}\left(\sin\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{3n\pi}{4}\right)$$

5 **a.** $\sin\dfrac{n\pi x}{a}$ **b.** $\sin\dfrac{2n - 1}{2}\dfrac{\pi x}{a}$

7 . حلول الجداء هي $\phi_n(x)T_n(t)$ حيث

$$\phi_n(x) = \sin\lambda_n x, \quad T_n(t) = \exp(-kc^2t/2) \times \begin{cases} \sin \mu_n t \\ \cos \mu_n t \end{cases}$$

حيث

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{a}, \mu_n = \sqrt{\lambda_n^2 c^2 - \frac{1}{4}k^2 c^4}$$

9 . حلول الجداء هي $\phi_n(x)T_n(t)$ حيث

$$\phi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

$$T_n(t) = \sin \quad \text{or} \quad \cos\left(\frac{n^2\pi^2 ct}{a^2}\right).$$

الذبذبات هي $n^2\pi^2 c/a^2$ Hz.

11 . نعم

13 . $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \mu_n t + b_n \sin \mu_n t) \sin \lambda_n x$:

$\lambda_n = n\pi/a$, $\mu_n = \sqrt{\lambda_n^2 + \gamma^2 c}$, $a_n = 2h(1 - \cos n\pi)/n\pi$, $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$

بند 3 ، صفحة

1 . الجدول يبين $\dfrac{u(x,t)}{h}$

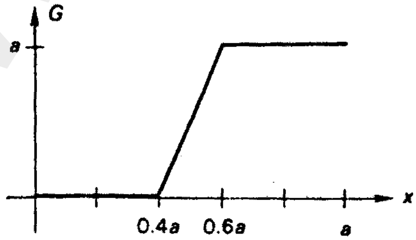
t	0	$0.2a/c$	$0.4a/c$	$0.8a/c$	$1.4a/c$
$x = 0.25a$	0.5	0.5	0.2	-0.5	-0.2
$x = 0.5a$	1.0	0.6	0.2	-0.6	-0.2

3 . $u(0, 0.5a/c) = 0$; $u(0.2a, 0.6a/c) = 0.2\alpha a$; $u(0.5a, 1.2a/c) = -0.2\alpha a$.
(تلميح $G(x) = \alpha x, 0 < x < a.$)

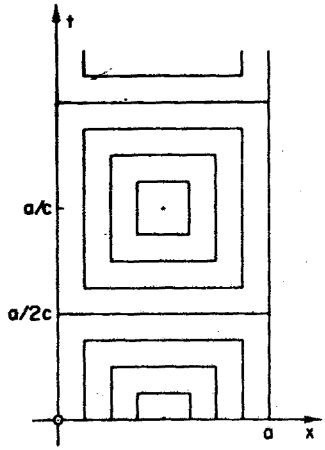
5 .
$$G(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 0.4a \\ 5(x - 0.4a), & 0.4a < x < 0.6a \\ a, & 0.6a < x < a \end{cases}$$

لاحظ ان G دالة مستمرة مخططها هو تركيب من قطع مستقيمة

7.



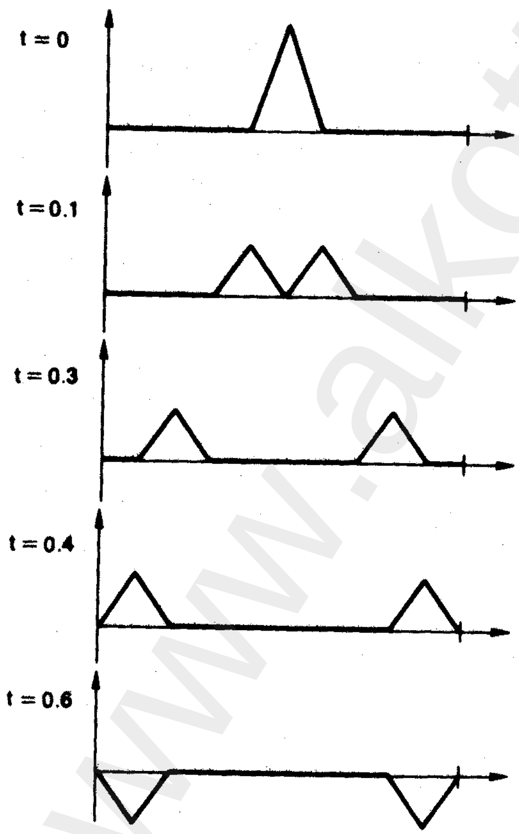
.9



.11 $u(x, t) = -c^2 \cos t + \phi(x - ct) + \psi(x + ct)$

$t = 0$.

.13



بند 4 ، صفحة

1 . اذا كانت f و g ملساء مقطعياً ، و f دالة مستمرة

3 . الذبذبة هي $c\lambda_n$ ، والدورة هي $2\pi/c\lambda_n$ ثانية

5 . فصل المتغيرات يؤدي الآتي بدلاً من المعادلتين (11) و (12) ،

$$T'' + \gamma T' + \lambda^2 C^2 T = 0 \qquad \ldots (11')$$

$$(S(x)\phi')' - q(x)\phi + \lambda^2 P(x)\phi = 0 \qquad (12')$$

حلول المعادلة ($11'$) جميعها تقترب من 0 عندما $t \to \infty$ ، اذا كانت $\gamma > 0$.

7 . الدورة لـ $T_n = a_n \cos \lambda_n ct + b_n \sin \lambda_n t$ هي $\dfrac{2\pi}{\lambda nc}$. جميع الـ T_s لها دورة مشتركة $\overline{p}$ اذا واذا فقط لكل n يوجد عدد صحيح m بحيث يكون $m\left(\dfrac{2\pi}{\lambda_{nc}}\right) = p$ او $m = \left(\dfrac{\rho c}{2\pi}\right)\lambda_n$ عدد صحيح .

بالنسبة لـ λ_n كما مبين و $\beta = \dfrac{q}{r}$ حيث q و r عددين صحيحين ،

وهذا يعني ان $m = \left(\dfrac{\rho c}{2\pi}\right)\dfrac{\alpha}{r}(rn + q)$ او

$$m = \frac{\rho c}{2\pi}\alpha + n + \frac{q}{r}$$

من الواضح ، ان p و α يمكن تثبيتها بحيث تكون m عدد صحيح عندما يكون n عدد صحيح .

بند 5 صفحة

١ . اذا كانت $q \geq 0,$ ، البسط في معادلة (3) يجب ان يكون اكبر او يساوي 0 ، لان $\phi_1(x)$

3 . $2\pi^2/3$ هو احد الحلول من $y = \sin \pi x$

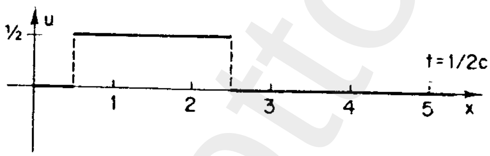
5. $\int_1^2 (y')^2dx = \frac{1}{3}, \int_1^2 \frac{y^2}{x^4}dx = \frac{25}{6} - 6\ln 2; N(y)/D(y) = 42.83; \lambda_1 \leq 6.54.$

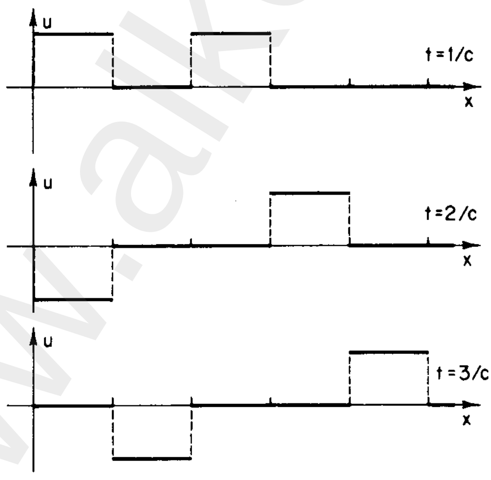
بند 6 ، صفحة

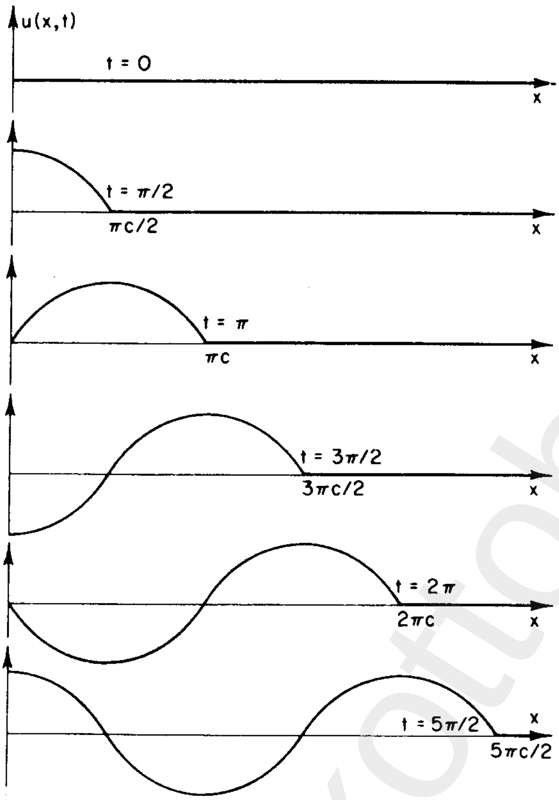
1 . $u(x,t) = \frac{1}{2}[f_e(x+ct) + G_o(x+ct)] + \frac{1}{2}[f_e(x-ct) - G_o(x-ct)],$

حيث f_e توسيع زوجي لـ f وان G_o توسيع فردي لـ G.

3





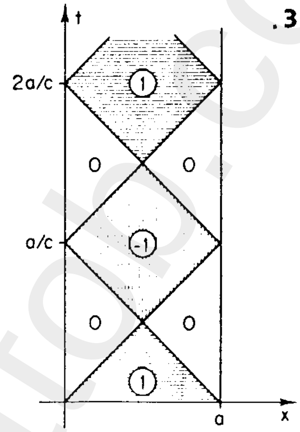


$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy \ . \ 7$$

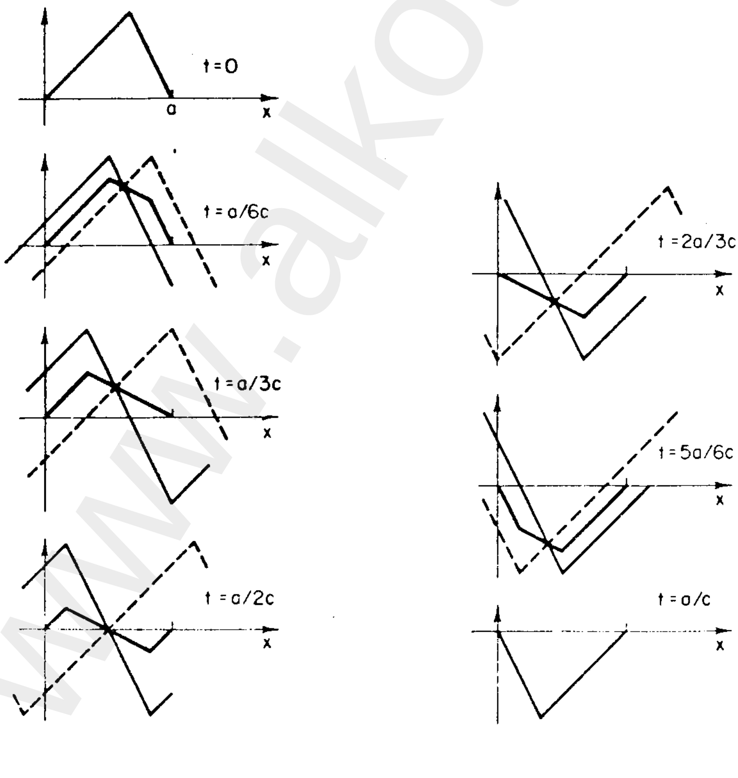
تمارين متنوعة ، صفحة

1. $$u(x, t) = \sum_{1}^{\infty} b_n \sin \lambda_n x \cos \lambda_n ct$$
$$b_n = 2(1 - \cos n\pi)/n\pi$$
$$\lambda_n = n\pi/a$$

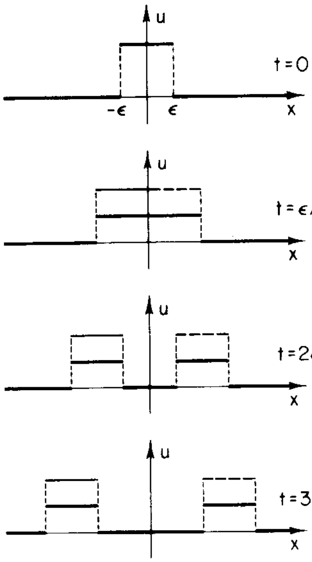
3.



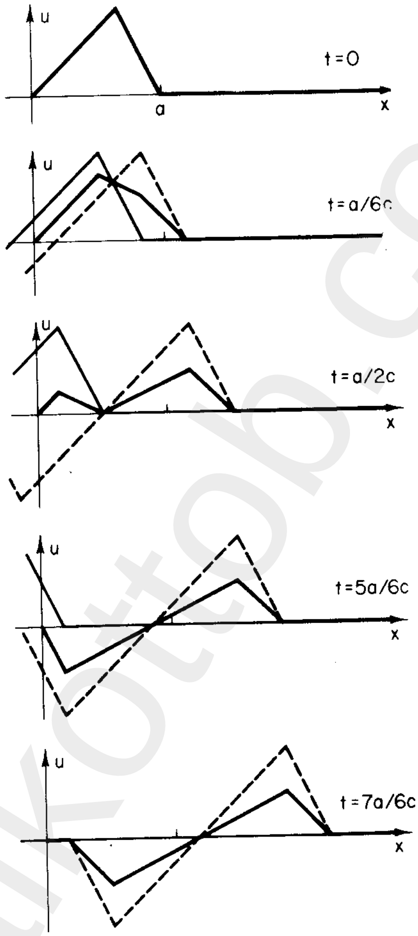
5.



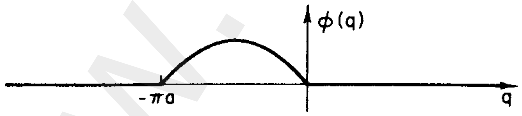
7.


u
t = 0
−ε
ε
x
u
t = ε/c
x
u
t = 2ε/c
x
u
t = 3ε/c
x

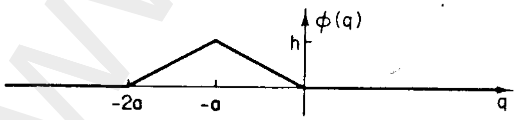
9.


u
t = 0
a
x
u
t = a/6c
u
t = a/2c
x
u
t = 5a/6c
x
u
t = 7a/6c
x

11.


φ(q)
−πa
q

13.


φ(q)
h
−2a
−a
q

15 . $\lambda_1^2 \le 8.324$، استخدام $y(x)=(x-1/4)(5/4-x)$. كذلك $\lambda_1^2 \le 8.265$ ، من $y(x) = \sin \pi(x - 1/4)$. في هذه الحالة ، التكامل يجب حسابهُ عددياً (طريقة شبه المنحرف) .

17 . $f(q) = 12a^2 \operatorname{sech}^2(aq), \quad c = 4a^2$

21 .
$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \lambda_n ct + b_n \sin \lambda_n ct) \sin \lambda_n x$$
$$\lambda_n = (2n - 1)\pi/2a$$
$$a_n = \frac{8aU_0(-1)^{n+1}}{\pi^2(2n - 1)^2}, \quad b_n = \frac{16a^2k(-1)^n}{\pi^3(2n - 1)^3}$$

23 .
$$\frac{Y''}{Y} = \frac{2V}{k}\frac{\psi'}{\psi}$$

الدالة $\phi(x - Vt)$ تحذف من كلا الطرفين .

25 .
$$\phi_n(-Vt) = T_0 \exp(\lambda_n^2 kt/2) b_n, \quad t > 0$$
$$\phi_n(x) = T_1 \exp(\lambda_n^2 kx/2V) b_n, \quad x > 0$$
حيث
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \lambda_n y = 1, \quad 0 < y < b$$

27 .
$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = CR\frac{\partial i}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = CR\frac{\partial e}{\partial t}$$

29 .
$$e(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \lambda_n ct \sin \lambda_n x,$$
$$a_n = \frac{2V(1 - \cos n\pi)}{n\pi}, \quad \lambda_n = n\pi/a$$

31 .
$$e(x, t) = V_0\frac{(a - x)}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \lambda_n x \exp(-\lambda_n^2 kt)$$
$$b_n = -\frac{2V_0 \cos n\pi}{n\pi}, \quad \lambda_n = n\pi/a, \quad k = 1/Rc$$

33 . $e(x, t) = V + \frac{1}{2}(f_o(x + ct) + f_o(x - ct))$

حيث f_o التوسيع الفردي لـ

$$f(x) = -V(1 - e^{-\alpha x}), \quad 0 < x$$

35 c المعطاة تحقق $\phi(x - ct) = e^{-c(x-ct)/k} = e^{(c^2t - cx)/k}$. $c^2 = iωk$,
لذلك . فان $\text{so } \phi(x - ct) = e^{i\omega t - (1+i)px} = e^{-px}e^{i(\omega t - px)}$.
الان، $\frac{1}{2}(\phi(x - ct) + \phi(x - ct)) = e^{-px}$ $(\omega t - px)$

37 . اشتق ثم عوض

الفصل الرابع

بند 1 ، صفحة

1 . $f + d = 0$

3 . $Y(y) = A \sinh \pi y, A = 1/\sinh \pi$

5 . $v(r) = a \ln r + b$

7 .
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}$$

بند 2 ، صفحة

1 . بين بالاشتقاق ثم التعويض على ان كليهما حلاً للمعادلة التفاضلية، محدد ورانسكن للدالتين هو

$$\begin{vmatrix} \sinh \lambda y & \sinh \lambda(b - y) \\ \lambda \cosh \lambda y & -\lambda \cosh \lambda(b - y) \end{vmatrix} = -\lambda \sinh \lambda b \neq 0$$

3 . في حالة $b = a$, استخدم حدين من السلسلة $u(a/2, a/2) = 0.32$.

5 .
$$u(x, y) = \sum_{1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \frac{\sinh(n\pi y/a)}{\sinh(n\pi b/a)}$$
$$b_n = \frac{8}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

7. a. $u(x, y) = 1$, ولكن الصيغة يمكن ايجادها وذلك الطريقة في هذا البند وهي .

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sinh \lambda_n y + \sinh \lambda_n(b - y)}{\sinh \lambda_n b} \cos \lambda_n x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\cosh \mu_n x}{\cosh \mu_n a} \sin \mu_n y$$

حيث

$$\lambda_n = \frac{(2n - 1)\pi}{2a}, \quad a_n = \frac{4 \sin \frac{(2n - 1)\pi}{2}}{\pi(2n - 1)},$$
$$\mu_n = \frac{n\pi}{b}, \quad b_n = \frac{2(1 - \cos n\pi)}{n\pi}.$$

b . $u(x, y) = y/b$, وهذا يمكن ايجاده بالطريقة في هذا البند . في هذه الحالة ، 0 هو القيمة الذاتية .

c.
$$\frac{4}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos \lambda_n y}{(2n - 1)} \frac{\sinh \lambda_n(a - x)}{\sinh \lambda_n a}$$
$$\lambda_n = \left(\frac{2n - 1}{2} \frac{\pi}{b}\right)$$

بند 3 ، صفحة

. 1
$$a_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx$$

$$A(\mu) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty g_2(y)\sin\mu y\,dy$$

. 3

. 5 $u(x, y)$ اعطيّ بالصيغة (5) بحيث $B(\mu) = 0$ و $A(\mu) = 2\mu/\pi\,(1+\mu^2)$.

. 7
$$u(x, y) = \sum_1^\infty b_n \sin\lambda_n x \exp(-\lambda_n y)$$
$$+ \int_0^\infty \left(A(\mu)\frac{\sinh\mu x}{\sinh\mu a} + B(\mu)\frac{\sinh\mu(a-x)}{\sinh\mu a}\right)\sin\mu y\,d\mu$$

$\lambda_n = n\pi/a, \quad b_n = 2(1 - \cos n\pi)/n\pi$

$A(\mu) = B(\mu) = 2\mu/\pi\,(\mu^2 + 1)$

لاحظ كذلك تمرين 8 .

يكون غير مقيد عندما $r \to 0+$ ، اذا كان $n = 1$

.a.9
$$u(x, y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\lambda a}{\lambda}\sin\lambda x\frac{\sinh\lambda y}{\sinh\lambda b}\,d\lambda$$

b
$$u(x, y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\sin\lambda x\frac{\sinh\lambda(b-y)}{\sinh\lambda b}\,d\lambda$$

$$u(x, y) = \int_0^\infty \frac{2}{\pi(1+\lambda^2)}\frac{\sinh\lambda x}{\sinh\lambda a}\cos\lambda y\,d\lambda.$$

$e^{-\lambda y}\sin\lambda x, \quad \lambda > 0.$

$e^{-\lambda y}\sin\lambda x, \quad e^{-\lambda y}\cos\lambda x, \quad \lambda > 0.$

بند 4 ، صفحة

.1 $v(r, \theta)$ اعطي بالصيغة (10) مع $b_n = 0$، $a_0 = \pi/2$.

$a_n = -2\,(1 - \cos n\pi)/\pi n^2 c^n.$

.3 تمرين 1، $v(0, \theta) = \pi/2$ ؛ تمرين 0 $v(0, \theta) = 0$

.5 التقارب منتظم عند θ

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi} f(\theta)\, d\theta$$ 7

$$a_n = \frac{c^n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta\, d\theta, \quad b_n = \frac{c^n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin n\theta\, d\theta$$

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\pi}{nc^{2n}} r^{2n}\sin 2n\theta = v(r, \theta)$$ 9

$$v_n(r, \theta) = r^{n/\alpha}\sin(n\theta/\alpha)$$ 11

بند 5 ، صفحة

1. قطع زائد (a) و (e) ، قطع ناقص (b) ، (c) ، قطع مكافيء (d) .

3. (e) فقط .

5. a. $$u(x, y) = \sum_{1}^{\infty} a_n \sin n\pi x\, e^{-n\pi y}$$

b. $$u(x, y) = \sum_{1}^{\infty} a_n \sin n\pi x \cos n\pi y$$

c. $$u(x, y) = \sum_{1}^{\infty} a_n \sin n\pi x \exp(-n^2\pi^2 y)$$

$$a_n = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\, dx$$

تمارين متنوعة ، صفحة

1. $$u(x, y) = \sum_{1}^{\infty} b_n \frac{\sinh \lambda_n(a-x)}{\sinh \lambda_n a}\sin \lambda_n y$$

$$\lambda_n = n\pi/b, \quad b_n = 2(1-\cos n\pi)/n\pi$$

3. $u(x, y) = 1$ ، لاحظ ان 0 هو القيمة الذاتية

5. $$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n \sinh \lambda_n x + b_n \sinh \lambda_n(a-x)}{\sinh \lambda_n a}\cos \lambda_n y$$

$$\lambda_n = (2n-1)\pi/2b, \quad a_n = b_n = 4(-1)^{n+1}/\pi(2n-1)$$

7. $$u(x, y) = w(x, y) + w(y, x), \text{ where}$$

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\sinh \lambda_n(a-y)}{\sinh \lambda_n a}\sin \lambda_n x$$

$$\lambda_n = n\pi/a, \quad b_n = \frac{8h}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

9. $$u(x, y) = \int_0^\infty A(\lambda) \frac{\sinh \lambda(b - y)}{\sinh \lambda b} \cos \lambda x \, d\lambda$$

$$A(\lambda) = (2 \sin \lambda a)/\lambda\pi$$

11. $$u(x, y) = \int_0^\infty A(\lambda) \cos \lambda x e^{-\lambda y} \, d\lambda$$

$$A(\lambda) = 2\alpha/\pi(\alpha^2 + \lambda^2)$$

13. $$u(x, y) = 1$$

15. $$u(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{c}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{(1 - \cos n\pi)}{n\pi}$$

17. الصيغة نفسها كما في تمرين 15 ، ولكن $a_0 = 2/\pi$

19. $a_n = 2(1 + \cos n\pi)/(1 - n^2)$, $b_n = 0$ (and $a_1 = 0$).

$$u(r, \theta) = (\ln r - \ln b)/(\ln a - \ln b)$$

21. $$u(r, \theta) = \sum_1^\infty b_n \left(\frac{r}{c}\right)^{n/2} \sin(n\theta/2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin(n\theta/2) \, d\theta$$

23. $$2(D + F) = -1$$

25. $$u(x, y) = \frac{y(b - y)}{2} + \sum_1^\infty \frac{a_n \sinh \mu_n x + b_n \sinh \mu_n(a - x)}{\sinh \mu_n a} \sin' \mu_n y$$

$$\mu_n = \frac{n\pi}{b}, \quad a_n = b_n = \frac{2b^2}{\pi^3} \frac{1 - \cos n\pi}{n^3}$$

27. المعادلة تصبح

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x \partial y}, \quad (1 - M^2) \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0.$$

29. $$\phi(x, y) = \int_0^\infty (A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x) e^{-\beta y} \, d\alpha + c$$

حيث c, $\beta = \alpha\sqrt{1 - M^2}$ ، ثابت اختياري ، وان

$$\left.\begin{matrix} A(\alpha) \\ B(\alpha) \end{matrix}\right\} = -\frac{U_0}{\beta\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \left\{\begin{matrix} \cos \alpha x \\ \sin \alpha x \end{matrix}\right\} dx$$

31. اذا كان $(x(s), y(s))$ هي تمثل الوسيط للمنحني الحدودي C ، لذلك ، فان السرعة $y'\boldsymbol{i} - x'\boldsymbol{j}$ عمودية على C ، وان

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = \int_C \frac{\partial u}{\partial x}\, dy - \frac{\partial u}{\partial y}\, dx.$$

الان، باستخدام مبرهنة كرين

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial x}\, dy - \frac{\partial u}{\partial y}\, dx = \int\int_R \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dA$$

والتي هي 0 لان u تحقق معادلة الجهد في R .

33. عوض مباشرة

الفصل الخامس

بند ، صفحة

1 .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad 0 < t$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, b, t) = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t$$

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(a, y, t) = 0, \quad 0 < y < b, \quad 0 < t$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = g(x, y), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b$$

3 .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

بند 2 ، صفحة

1 . اذا كان $a = b$ فان اوطأ القيم الذاتية هي التي يكون دلائلها (m, n) على هذا الترتيب (1,1) ، (2,1) = (1,2) ؛ (2,2) (1,3) = (3,1) ؛ (2,3) = (3,1) ، (4,1) = (1,4) ، (3,3) .

3 . الذبذبات هي $\lambda_{mn}c/2\pi$ (Hz) ، حيث λ_{mn}^2 هي القيم الذاتية التي وجدنا ها في المقرر .

5 The $\lambda_{mn}^2 = (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2$, for $m = 0, 1, 2, \ldots, n = 1, 2, 3, \ldots$.

7 . a. $u(x, y, t) = 1$

وحل b ، c يكون بالصيغة

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n} a_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \exp(-\lambda_{mn}^2 kt)$$

حيث $\lambda_{mn}^2 = (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2$ ، و m و n تكون من 0 الى ∞ .

b.
$$a_{00} = \frac{(a+b)}{2}, \quad a_{m0} = -\frac{2b(1 - \cos m\pi)}{m^2\pi^2}$$

$$a_{0n} = -\frac{2a(1 - \cos n\pi)}{n^2\pi^2}, \quad a_{mn} = 0 \quad \text{خلاف ذلك}$$

c.
$$a_{00} = \frac{ab}{4}, \quad a_{m0} = -\frac{ab(1 - \cos m\pi)}{m^2\pi^2}$$

$$a_{0n} = -\frac{ab(1 - \cos n\pi)}{n^2\pi^2}$$

$$a_{mn} = \frac{4ab(1 - \cos n\pi)(1 - \cos m\pi)}{m^2n^2\pi^4}$$

حيث m ، n اكبر من الصفر .

9 . اختيار الثابت الموجب لـ X''/X او Y''/Y ، تحت الشروط الحدودية في المعادلتين (9) و (10) ، تؤدي الى الحل التافه .

بند 4 ، صفحة

1 . المعادلات التفاضلية الجزئية نفسها ، الشرط الحدودية تصبح متجانسة . وفي الشروط الحدودية استبدلت $g(r, \theta)$ بـ $g(r, \theta) - v(r, \theta)$.

3 . في مسألة الحرارة ، $+ \lambda^2 kT = 0$

وفي معادلة الموجة ، $T'' + \lambda^2 c^2 T = 0$

5. الشروط الحدودية ، المعادلتين (10) ، (11) تستبدل بـ

$$\Theta(0) = 0, \quad \Theta(\pi) = 0$$

الحلول هي $\Theta(\theta) = \sin n\theta, n = 1, 2, \ldots .$

7 . خذ التلميح بنظر الاعتبار ، واستخدم حقيقة كون $\nabla^2\phi = -\lambda^2\phi$ ، الطرف الايسر يصبح

$$(\lambda_k{}^2 - \lambda_m{}^2) \iint_R \phi_k\phi_m$$

بينما الطرف الايمن يساوي 0 ، نسبة الى الشرط الحدودي

بند 5 ، صفحة

1 . $\lambda_n = \alpha_n/a$ ، حيث α_n هي الصفر النوني لدالة بيسل J_0 . الحلول هي

3 . هذا هو فقط قاعدة السلسلة .

$$\phi_n(r) = J_0(\lambda_n r)$$

5 . مبرهنة رول تنص على انه اذا كانت الدالة القابلة الاشتقاق تساوي 0 في منطقتين ، فان مشتقتها تساوي 0 بينهما . من تمرين 4 من الواضح ان J_1 يجب ان يساوي 0 بين اصفار J_0 المتعاقبة .

افحص شكل 9 ـ 5 والجدول 1 ـ 5 .

7 . استخدم الصيغة الثانية لتمرين 6 ، بعد استبدال μ بـ $1 + \mu$ على الجانبين .

9 . $u(r) = T + (T_1 - T)I_0(\gamma r)/I_0(\gamma a).$

بند 6 ، صفحة

1 $v(0, t)/T_0 \cong 1.602 \exp(-5.78\tau) - 1.065 \exp(-30.5\tau)$

حيث

3 . في تمرين 7 بند 5 ، ضع $\mu = 0$ وعوض بـ $x = \lambda r$

5 . التكامل يؤول الى المساواة

$$\int_0^a (r\phi'^2)' dr + \lambda^2 \int_0^a r^2(\phi^2)' \, dr = 0.$$

التكامل الاول يحسب مباشرة . الثاني يجب ان يكامل بالتجزئة .

بند 7 ، صفحة

1 . استخدم

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}J_0(\lambda r)\right) = -\lambda^2 J_0(\lambda r).$$

3 . ذبذبات الاهتزازات هي $\lambda_{mn}c = \alpha_{mn}c/a$. اصغر خمس قيم لـ α_{mn} على الترتيب ، لها الدلائل(0, 1)،(1, 1)،(2, 1)،(0, 2)،(3, 1). لاحظ جدول 1 ــ 5 .

.5 $\phi(a, \theta) = 0$ and $\phi(r, -\pi) = \phi(r, \pi)$, $\dfrac{\partial\phi}{\partial\theta}(r, -\pi) = \dfrac{\partial\phi}{\partial\theta}(r, \pi)$

7 . ضع $J_m(\lambda_{mn}r) = \phi_n$. لذلك ، فان $(r\phi_n')' = -\lambda_{mn}r\phi_n$ و $(r\phi_q')' = -\lambda_{mq}r\phi_q$ هي الحلول التي تتحقق للدوال في التكاملية . مباشرة من البرهان في فصل 2 ، بند 7 .

بند 8 ، صفحة

.1 $\phi(x) = x^\alpha[AJ_p(\lambda x) + BY_p(\lambda x)]$, where $\alpha = (1-n)/2$, $p = |\alpha|$.

For $\lambda^2 = 0$, $Z = A + Bz$.

.3 $\phi(\rho + ct) = \overline{F}_o(\rho + ct) + \overline{G}_e(\rho + ct)$

.5 $\psi(\rho - ct) = \overline{F}_o(\rho - ct) - \overline{G}_e(\rho - ct)$

حيث $\overline{F}_o(x)$ هي التوسيع الدوري الفردي بدورة $2a$ لـ $xf(x)/2$ ، وان $\overline{G}_e(x)$ هي التوسيع الدوري الزوجي بدورة $2a$ لـ $\int (x/2c)g(x)\,dx$

7 . دالة الوزن هي ρ^2 والفترة هي بين 0 و a .

9 . $v(x) = (b - x)(x - a)/(a + b)x^2$

11 . كلا . الفكرة هي ايجاد حل المعادلة التفاضلية الجزئية التي تعتمد على متغير واحد فقط . هذا مستحيل اذا كانت f تعتمد على x و y .

13 . $$a_n = \frac{\int_a^b v(x)X_n(x)x^3\,dx}{\int_a^b X_n^2(x)x^3\,dx}.$$

بند 9 ، صفحة

1 . $[k(k+1) - \mu^2]a_{k+1} - [k(k-1) - \mu^2]a_{k-1} = 0$, valid for $k = 1, 2, \ldots$.

3 . $$P_5 = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

5 . $$y = A\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

7 . حلول الجداء هي

$$u_{mn}(\rho, \phi) = J_{m+1/2}(\lambda_{mn}\rho)P_m(\cos\phi)$$

$m = 0, 1, \ldots$ و λ_{mn} اختيرت لتحقق الشرط الحدودي عند $\rho = c$.

9 . قاعدة ليبنز تنص على انهُ

$$(uv)^{(k)} = \sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}u^{(k-r)}v^{(r)}.$$

الطرف الايمن يشبه مبرهنة ذي الحدين .

11 . $u(\rho, \phi) = \sum_0^\infty b_n\rho^n P_n(\cos\phi)$ where $b_0 = \frac{1}{2}$, and

$$b_n = \frac{1}{2}[P_{n-1}(0) - P_{n+1}(0)]$$

تمارين متنوعة ، صفحة

1.
$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin \mu_m y \exp(-\mu_m^2 kt) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cos \lambda_n x \sin \mu_m y \exp(-(\mu_m^2 + \lambda_n^2)kt)$$
$$\mu_m = m\pi b, \quad \lambda_n = n\pi/a$$
$$a_m = T\,\frac{1 - \cos m\pi}{m\pi}$$
$$a_{mn} = \frac{4T}{\pi^3}\,\frac{(\cos n\pi - 1)(1 - \cos m\pi)}{n^2 m}$$

3.
$$u(a/2, b/2, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{m\pi}{2} \exp(-(\lambda_n^2 + \mu_m^2)kt)$$

حيث where $\lambda_n = n\pi/a$, $\mu_m = m\pi/b$, and
$$b_{mn} = \frac{4T}{\pi^2}\,\frac{(1 - \cos m\pi)(1 - \cos n\pi)}{mn}$$

اول ثلاثة حدود هي ، عندما $a = b$،
$(m, n) = (1,1)$ و $(1,3)$ و $(3,1)$ و $(3,3)$
وجميع الحدود بدليل زوجي تساوي 0،

$$u(a/2, a/2, t) \cong \frac{16t}{\pi^2}\left(e^{-2\tau} - \frac{2}{3}e^{-10\tau} + \frac{1}{9}e^{-18\tau}\right)$$
حيث $\tau = kt\pi^2/a^2$

5. $u(r) = (a^2 - r^2)/2$ and $u(r) = \sum_1^{\infty} C_n J_0(\lambda_n r)$, with $C_n = \dfrac{2a^2}{\alpha_n^3 J_1(\alpha_n)}$

7.
$$w(x, t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \lambda_n x \exp(-\lambda_n^2 kt)$$
$$v(y, t) = \sum b_m \sin \mu_m y \exp(-\mu_m^2 kt)$$

حيث $\mu_m = m\pi/b$ ، $\lambda_n = n\pi/a$ ، والشروط الحدودية هي

$$v(y, 0) = 1, \quad 0 < y < b; \quad w(x, 0) = Tx/a, \quad 0 < x < a.$$

$J_0(\lambda r)\exp(-\lambda^2 kt)$. 9

$B_k = b_k/k(k+1)$ for $k = 1, 2, \ldots$; b_0 must be 0, and is arbitrary . 11

يجب ان تساوي 0 ، و B_0 اختياري

$$((1-x^2)y')' - \frac{m^2}{1-x^2}y + \mu^2 y = 0$$. 13

$u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sinh \lambda_n z}{\sinh \lambda_n b} J_0(\lambda_n r)$ حيث $\lambda_n = \alpha_n/a$ and $a_n = \frac{2U_0}{\alpha_n J_1(\alpha_n)}$. 15

. 17 $u(r, z, t) = \sin \mu z J_0(\lambda r) \sin \nu ct$ هو حل الجداء اذا كان $\mu = m\pi/b$ ، $\lambda = \alpha_n/a$ و $\nu = \sqrt{\mu^2 + \lambda^2}$. ذبذبات الاهتزاز هي νc او

$$c\sqrt{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_n}{a}\right)^2}.$$

. 19 كلا الحدين يحققان $\nabla^2\phi = -(5\pi^2)\phi$. على $y = 0$ ، $x = 1$ ، كلا الحدين يساوي 0 وعلى $y = x$ فان القيم تتساوي ولكن بعكس الاشارة .

. 21 كل حد يحقق $\nabla^2\phi = -(16\pi^2/3)\phi$. على $y = 0$ ،

$\phi = \sin(2n\pi x) - \sin(2n\pi x)$ ، على $y = \sqrt{3}x$

$\phi = \sin(4n\pi x) + 0 - \sin(2n\pi \cdot 2x)$ ، على $y = \sqrt{3}(1-x)$

$\phi = \sin(4n\pi x) + \sin(2n\pi(1-2x)) - \sin 2n\pi.$

. 23 $\phi_n = J_{3n}(\lambda r)\sin 3n\theta$ و $J_{3n}(\lambda) = 0$. لذلك ، فان $\lambda_1 = 6.380$ والذي هو اقل من $\sqrt{16\pi^2/3} = 7.255$

$b = -1$. 25

. 27 كون $y(x) = hJ_0(kx)/J_0(ka)$ ، حيث $k = \omega/\sqrt{gU}$

الحل لا يمكن ان يأخذ هذه الصيغة اذا كان $J_0(ka) = 0$

29. $u(r, t) = R(t)T(t)$; $R(r) = r^{-m}J_m(\lambda r)$, حيث $m = (n-2)/2$; $T(t) =$. 29
$a\cos\lambda ct + b\sin\lambda ct.$

الفصل السادس

بند 1 ، صفحة

1. c. $\dfrac{s^2 + 2\omega^2}{s(s^2 + 4\omega^2)}$ d. $\dfrac{\omega \cos \phi - s \sin \phi}{s^2 + \omega^2}$

e. $\dfrac{e^2}{s - 2}$ f. $\dfrac{2\omega^2}{s(s^2 + 4\omega^2)}$

3. a. $\dfrac{e^{-as}}{s}$ b. $\dfrac{(e^{-as} - e^{-bs})}{s}$ c. $\dfrac{(1 - e^{-as})}{s^2}$

5. a. $e^{-t} \sinh t$ b. e^{-2t} c. $e^{-at} \dfrac{\sin \sqrt{b^2 - a^2}t}{\sqrt{b^2 - a^2}}$

7. a. $\dfrac{(e^{at} - e^{bt})}{(a - b)}$ b. $\dfrac{t}{2a} \sinh at$ d. $\dfrac{t^2 e^{at}}{2}$

e. $f(t) = 1, \quad 0 < t < 1; \quad = 0, \quad 1 < t$

بند 2 ، صفحة

1. a. e^{2t} b. e^{-2t} c. $\dfrac{(3e^{-t} - e^{-3t})}{2}$ d. $\dfrac{1}{3} \sin 3t$

3. a. $\dfrac{(1 - e^{-at})}{a}$ b. $t - \sin t$ c. $\dfrac{(\sin t - \frac{1}{2} \sin 2t)}{3}$

d. $\dfrac{(\sin 2t - 2t \cos t)}{8}$ e. $-\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2}t + e^{-t} - \dfrac{1}{4}e^{-2t}$

5. a. $\dfrac{(e^{2t} - e^{-2t})}{4}$ b. $\dfrac{1}{2} \sin 2t$

c. $\dfrac{3}{2} + \dfrac{i\sqrt{2} - 3}{4} \exp(-i\sqrt{2}t) - \dfrac{i\sqrt{2} - 3}{4} \exp(i\sqrt{2}t)$

d. $4(1 - e^{-t})$

7. a. $1 - \cos t$ b. $\dfrac{(e^t - \cos \omega t + \omega \sin \omega t)}{(\omega^2 + 1)}$ c. $t - \sin t$

1. **a.** $s = -\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2, \quad n = 1, 2, \ldots$

b. $s = \pm i\frac{2n-1}{2}\pi, \quad n = 1, 2, \ldots$

c. $s = \pm in\pi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

d. $s = i\eta, \quad \text{where} \quad \tan\eta = \frac{-1}{\eta}$

e. $s = i\eta, \quad \text{where} \quad \tan\eta = \frac{1}{\eta}$

3. **a.** $\frac{\sinh\sqrt{s}x}{s^2\sinh\sqrt{s}}$ **b.** $\frac{1}{s} - \frac{\cosh\sqrt{s}(\frac{1}{2}-x)}{s(s+1)\cosh(\sqrt{s}/2)}$

5. **a.** $u(x, t) = x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin n\pi x}{n\pi\cos n\pi}\exp(-n^2\pi^2 t)$

b. $u(x, t)$ is 1 minus the solution of Example 3.

1. $t + \frac{x^2}{2}$

3. $$v(x, t) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)(\frac{1}{2}-x)\sin(2n-1)\pi t}{(2n-1)^2\sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)}$$

5. **a.** $\frac{\omega}{\omega^2-\pi^2}\left(\frac{1}{\pi}\sin\pi t - \frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)\sin\pi x$

b. $\frac{1}{2\pi^2}(\sin\pi t - \pi t\cos\pi t)\sin\pi x$

7. **a.** $u(x, t) = x - \frac{\sin\sqrt{a}x}{\sin\sqrt{a}}e^{-at} + \frac{2a}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x\exp(-n^2\pi^2 t)}{n(a-n^2\pi^2)\cos n\pi}$

b. The term $-\frac{x\cos n\pi x}{\cos n\pi}\exp(-n^2\pi^2 t)$ arises.

تمارين متنوعة

1. $$U(s) = \frac{T_0}{\gamma^2 + s} + \frac{\gamma^2 T}{s(\gamma^2 + s)}$$

$$u(x, t) = T_0 \exp(-\gamma^2 t) + T(1 - \exp(-\gamma^2 t))$$

3. $$U(s) = \frac{\cosh \sqrt{s}x}{s^2 \cosh \sqrt{s}}$$

$$u(x, t) = t - \frac{1 - x^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cos \rho_n x}{\rho_n \sin \rho_n} \exp(-\rho_n{}^2 t)$$

حيث: $\rho_n = (2n - 1)\pi/2$

5. $$u(x, t) = \frac{x(1 - x)}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cos \rho_n\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\rho_n \sin (\rho_n/2)} \exp(-\rho_n{}^2 t)$$

حيث $\rho_n = (2n - 1)\pi$

7. $$u(x, t) = x + \sum_{1}^{\infty} \frac{2 \sin n\pi x}{n\pi \cos n\pi} \exp(-n^2\pi^2 t)$$

9. $$U(x, s) = \frac{1}{s}(1 - \exp(-\sqrt{s}x))$$

11. $$f(t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi t^3}} \exp(-x^2/4t)$$

13. $$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{2n + 1 - x}{\sqrt{4t}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{2n + 1 + x}{\sqrt{4t}}\right)\right]$$

15. $$F(s) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s^2 + n^2}$$

17. $$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a} G\left(\frac{in\pi}{a}\right) e^{in\pi t/a}$$

19. $F(s)$ يجب ان تكون بالصيغة $F(s) = G(s)/H(s)$ حيث $G(s)$ لا يمكن ان يكون غير منتهياً . حلول $H(s) = 0$ يجب ان تُكون سلسلة هندسية من الاعداد الخيالية ، وان $H'(s) \neq 0$ اذا كان $H(s) = 0$.

21. $$F(s) = \frac{(1 - e^{-\pi s})^2}{s(1 - e^{-2\pi s})} = \frac{1 - e^{-\pi s}}{s(1 + e^{-\pi s})}$$

23. $$F(s) = \frac{1 + e^{-\pi s}}{(s^2 + 1)(1 - e^{-\pi s})}$$

25 $$u(x, t) = \frac{\sin \omega x \sin \omega t}{\sin \omega} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2\omega}{\omega^2 - n^2\pi^2} \sin n\pi x \sin n\pi t$$

الفصل السابع

بند 1 ، صفحة

الحل :

1. $16(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) = -1, i = 1, 2, 3, u_0 = 0, u_4 = 1.$
$u_1 = 11/32, u_2 = 5/8, u_3 = 27/32.$

3. $16(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) - u_i = -\frac{1}{2}i, i = 1, 2, 3, u_0 = 0, u_4 = 1.$
الحل : $u_1 = 0.285, u_2 = 0.556, u_3 = 0.800.$

5. الحل : $u_0 = 0.422, u_1 = 0.277, u_2 = 0.148, u_3 = 0.051$

7. الحل الحقيقي هو $u(x) = -\sin\sqrt{10}x/\sin\sqrt{10}$ ، لها نهاية عظمى حوالي 50 . مسألة القيم الحدودية تكون شاذة تقريباً .

9. المعادلة عندما $i = 5$ تدمج مع الشرط الحدودي ، فانها تصبح $2u_4 - 3.4u_5 = -1.4$. الحل :

$$u_1 = 1.382, u_2 = 1.146, u_3 = 1.057, u_4 = 1.023, u_5 = 1.014.$$

11. حيث u_{-1} ثم حذفها . وبجمع المعادلات ، المعادلة المراد حلها هي

الحل : $u_0 = 0{\cdot}795 , u_1 = 0{\cdot}839 , u_2 = 0{\cdot}919$

بند 2 ، صفحة

1. الخط m من الحل يجب ان يكون نفس الخط $m+1$ من الجدول 4 ـ 7

3. $r = 2/5, \quad \Delta t = 1/40$

5. $\Delta t = 1/32$. تذكر ان $u_4(m) = u_0(m) = m\Delta t$ جميع الاعداد في الجدول يجب ان تكون مضروبة بـ Δt .

7 . $\Delta t = 1/32$. جميع الاعداد في الجدول يجب ان تكون مضروبة بـΔt.

3.

l \ m	0	1	2	3	4
0	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
1	*1*	0.	0.	0.	0.
2	*1*	0.4	0.	0.	0.
3	*1*	0.48	0.16	0.	0.
4	*1*	0.56	0.224	0.064	0.
5	*1*	0.6016	0.2944	0.1024	0.0512

5. . Remember that l numbers in the table should be multiplied by .

l \ m	0	1	2	3	4
0	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
1	*1*	0	0	0	*1*
2	*2*	1/2	0	1/2	*2*
3	*3*	1	1/2	1	*3*
4	*4*	7/4	1	7/4	*4*
5	*5*	5/2	7/4	5/2	*5*

7. . All numbers in this table should be multiplied by

l \ m	0	1	2	3	4
0	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
1	*0*	1	1	1	*0*
2	*0*	3/2	2	3/2	*0*
3	*0*	2	5/2	2	*0*
4	*0*	9/4	3	9/4	*0*
.					
.					
.					
∞	*0*	3	4	3	*0*

9 . $\Delta t = \frac{1}{32}$. تذكر ان $u_{-1} = u_1$ جميع عناصر الجدول يجب ان تكون مضروبة بـ $\Delta x = \frac{1}{4}$.

l / m	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	1	2	3	4
2	1	3/2	2	3	4
3	3/2	3/2	9/4	3	4
4	3/2	15/8	9/4	25/8	4
5	15/8	15/8	5/2	25/8	4

بند 3 ، صفحة

1 .

l / m	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1/4	1/4	1/4	0
2	0	1/4	1/2	1/4	0
3	0	1/4	1/4	1/4	0
4	0	0	0	0	0
5	0	− 1/4	− 1/4	− 1/4	0

3 .

l / m	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	$\alpha/4$	1/4	$\alpha/4$	0
2	0	1/4	$\alpha/2$	1/4	0
3	0	$\alpha/4$	1/4	$\alpha/4$	0
4	0	0	0	0	0
5	0	$-\alpha/4$	− 1/4	$-\alpha/4$	0

في هذا الجدول ، $\alpha = 1/\sqrt{2}$

·5

t_m	m \ i	0	1	2	3	4
0	0	*0*	*1/2*	*1*	*1/2*	*0*
0.177	1	*0*	1/2	3/4	1/2	*0*
0.354	2	*0*	3/8	1/4	3/8	*0*
0.530	3	*0*	0	−1/8	0	*0*
0.707	4	*0*	−7/16	−3/8	−7/16	*0*
0.884	5	*0*	−5/8	−11/16	−5/8	*0*

·7

m \ i	0	1	2	3	4
0	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
1	*0*	0	0	0	*1*
2	*0*	0	0	1	*1*
3	*0*	0	1	1	*1*
4	*0*	1	1	1	*0*
5	*0*	1	1	0	*−1*
6	*0*	0	0	−1	*−1*
7	*0*	−1	−2	−1	*−1*
8	*0*	−2	−2	−2	*0*

9. Run: $u_i(m+1) = (2 - 2\rho^2 - 16\Delta t^2)u_i(m) + \rho^2 u_{i-1}(m) + \rho^2 u_{i+1}(m) - u_i(m-1)$. Start: $u_i(1) = \frac{1}{2}((2 - 2\rho^2 - 16\Delta t^2)u_i(0) + \rho^2 u_{i-1}(0) + \rho^2 u_{i+1}(0))$.

١ طول‌زمن مستقر : $\Delta t = 1/\sqrt{24}\ (\rho^2 = 2/3)$

m \ i	0	1	2	3	4
0	*0*	*0.50*	*1.00*	*0.50*	*0*
1	*0*	0.33	0.33	0.33	*0*
2	*0*	−0.28	−0.56	−0.28	*0*
3	*0*	−0.70	−0.70	−0.70	*0*
4	*0*	−0.19	−0.38	−0.19	*0*
5	*0*	0.45	0.45	0.45	*0*
6	*0*	0.49	0.98	0.49	*0*
7	*0*	0.21	0.21	0.21	*0*
8	*0*	−0.35	−0.71	−0.35	*0*

بند 4 ، صفحة

1 . عند $(1/4, 1/4), 11/256$ ، وعند $(1/2, 1/4), 14/256$ ، وعند $(1/2, 1/2), 18/256$.

3 . 4 في كلتا الحالتين الحل المضبوط هو $u(x, y) = xy$ ، وان الحل العددي مضبوط .

5 . الاحداثيات والقيم المقابلة لـ u_i هي : $(1/7, 1/7), 5\alpha$ ، $(2/7, 1/7), 10\alpha$ ، $(3/7, 1/7), 14\alpha$ ، $(1/7, 2/7), 21\alpha$ ، $(2/7, 2/7), 32\alpha$. هنا $\alpha = 19/1159$

7 . الاحداثيات والقيم المقابلة لـ u_i هي : $(1/4, 1/4), 165\beta$ $(1/2, 1/4), 218\beta$; $(3/4, 1/4), 176\beta$; $(1/4, 1/2), 174\beta$; $(1/2, 1/2), 263\beta$ $\beta = 1/268.$

بند 5 ، صفحة

1 . استخدام معادلة (8) لاجل $r = 1/4$

m \ l	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1/4	1/4	1/4
2	1/16	1/16	1/16	5/16	3/8	5/16
3	3/32	1/8	3/32	23/64	27/64	23/64

3 . لاحظ ان $u_1 = u_2 = u_4 = u_5$ ، معادلة الاستبدال تصبح $u_1(m + 1) = u_3(m)/4, u_3(m + 1) = u_1(m).$

m \ l	1	3
0	1	1
1	1/4	1
2	1/4	1/4
3	1/16	1/4
4	1/16	1/16

5 . استخدم معادلة (8) لاجل $r = 1/4$ لاحظ ان $u_4 = u_2, u_7 = u_3, u_8 = u_6.$

m \ l	1	2	3	5	6	9
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1/4	0	1/4	1/2
2	0	1/16	5/16	1/8	7/16	5/8
3	1/32	7/64	3/8	1/4	17/64	23/32

7 . استخدم نفس الترقيم كما في تمرين 5 . لاحظ ان $u_1 = u_3 = u_7 = u_9$ و $u_2 = u_4 = u_6 = u_8$. المعادلة المعجلة تصبح

$$u_1(m+1) = \frac{1}{2}u_2(m) - u_1(m-1)$$

$$u_2(m+1) = \frac{1}{2}u_1(m) + \frac{1}{4}u_5(m) - u_2(m-1),$$

$$u_5(m+1) = u_2(m) - u_5(m-1)$$

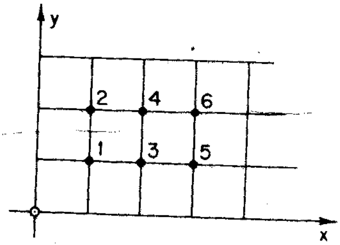
$m=$	0	1	2	3	4	5	6	7
u_1	0	0	0	1/8	0	−5/16	0	15/32
u_2	0	0	1/4	0	−3/8	0	5/16	0
u_5	0	1	0	−3/4	0	3/8	0	−1/16

9 .

m \ l	1	2	5
0	1	1	1
1	1/2	3/4	1
2	−1/4	0	1/2
3	−1/2	−3/4	−3/2
4	−1/2	−5/4	−2
5	−3/4	−3/4	−1

11 . لاحظ الشكل ادناه لترقيم النقاط

m \ l	1	2	3	4	5	6
0	1	0	0	0	0	0
1	0	1/4	1/4	0	0	0
2	−3/4	0	0	1/4	1/8	0
3	0	−1/2	−7/16	0	0	3/16



تمارين متنوعة ، صفحة

.1 $\dfrac{u_{i+1} - 2u_i - u_{i-1}}{(\Delta x)^2} - \sqrt{24x_i}\, u_i = 0,\ i = 0, 1, 2,$

$\dfrac{u_1 - u_{-1}}{2\Delta x} = 1,\ u_3 = 1;$

$$\begin{aligned} -18u_0 + 18u_1 \quad &= 6 \\ 9u_0 - 20.83u_1 + 9u_2 &= 0 \\ 9u_1 - 22u_2 &= -9 \end{aligned}$$

$u_0 = -0.248,\ u_1 = 0.08,\ u_2 = 0.44$

.3 $\dfrac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2} + \dfrac{1}{1 + x_i}\,\dfrac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} = -(1 + x_i),$

$i = 1, 2, 3.\ u_0 = 1,\ u_4 = 0.$

$$\begin{aligned} -32u_1 + 17.60u_2 \quad &= -15.65 \\ 14.67u_1 - 32u_2 + 17.33u_3 &= -1.5 \\ 14.86u_2 - 32u_3 &= -1.75 \end{aligned}$$

$u_1 = 0.822,\ u_2 = 0.606,\ u_3 = 0.335$

5 . $u_i(m + 1) = (u_{i-1}(m) + u_{i+1}(m))/2$. لاحظ ان $u_3(m) = u_1(m)$.

m \ i	0	1	2
0	0	0	0
1	0.03	0	0
2	0.06	0.015	0
3	0.09	0.03	0.15
4	0.12	0.053	0.03
5	0.14	0.075	0.053
6	0.17	0.1	0.075
7	0.20	0.122	0.10
8	0.22	0.15	0.122

7 . المسألة الاولى : $u_i(m+1) = (u_{i+1}(m) + u_i(m) + u_{i-1}(m))/3$

المسألة الثانية $u_i(m+1) = (u_{i+1}(m) + u_{i-1}(m))/3$

	المسألة الاولى					المسألة الثانية				
m \ i	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0
1	0	2/3	1	2/3	0	0	1/3	2/3	1/3	0
2	0	5/9	7/9	5/9	0	0	2/9	2/9	2/9	0
3	0	14/27	17/27	14/27	0	0	2/27	4/27	2/27	0
4	0	31/81	45/81	31/81	0	0	4/81	4/81	4/81	0

9 . $u_i(m+1) = (u_{i+1}(m) + u_{i-1}(m))/2$

$m \backslash i$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	1/2	0	0	0	0	0
2	1	1/4	0	0	0	0
3	3/2	1/2	1/8	0	0	0
4	2	13/16	1/4	1/16	0	0
5	5/2	9/8	7/16	1/8	1/32	0
6	3	87/32	5/8	15/64	1/16	0

11 .

$m \backslash i$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1
2	0	0	0	1	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	1	1	1
5	0	1	1	1	1
6	0	0	1	1	1
7	0	0	0	1	1
8	0	0	0	0	1

13 . لتكن $u_{ij} \cong u(x_i, y_j)$. فإن $u_{11} = u_{22} = u_{33} = 0.5,\ u_{12} = 0.698,$
$u_{13} = 0.792,\ u_{21} = 0.302,\ u_{23} = 0.624,\ u_{21} = 0.209,\ u_{32} = 0.376.$

15 . العدد كما في شكل 4 ـ 7 . لذلك ، فإن $u_1 = u_3 = u_7 = u_9$
$u_2 = u_4 = u_6 = u_8$

$m=$	0	1	2	3	4	5
u_1	1	1/2	3/8	1/4	3/16	1/8
u_2	1	3/4	1/2	3/8	1/4	3/16
u_5	1	1	3/4	1/2	3/8	1/4