

مقدمة في حساب التغيرات وتطبيقاته

ا.د. فالح بن عمران محمد الدوسري

قسم العلوم الرياضيه - جامعة ام القرى
مكة المكرمه ص . ب ٥٦١٩٩

د. محمد سويلم حمد

قسم الرياضيات - كلية التربيه للبنات
المدينه المنوره ص . ب ٣١٩٣

الطبعه الاولى ١٤٢٦ هـ الموافق ٢٠٠٥ م

المقدمة

الحمد لله الذي خلق الانسان وعلمه البيان ، نحمده على احسانه ونشكره اعترافاً بآلائه ونعمه التي لا تعد ولا تحصى ، والصلاة والسلام على صفوة الأنبياء ورسله سيدنا محمد ، وعلى آله وصحبه أجمعين والتابعين لهم بإحسان الى يوم الدين وبعد ؛

فقد اهتم حساب التفاضل والتكامل بالقيم القصوى (العظمى والصغرى) للدوال ، لكثرة تطبيقاتها ، لكنه لا يمكن ان يعلمنا عن ماهية اقل مسافة بين نقطتين معلومتين في مستوٍ ، او اقصر مسافة بين نقطتين معلومتين على سطح معلوم او اقل زمن يستغرقه جسيم للتحرك من نقطة الى اخرى على سطح معين ، او عن شكل المنحنى المغلق ذو المحيط المعلوم الذي يحد اكبر مساحة ممكنه ولا عن شكل المنحنى الذي ينزلق عليه جسيم في اقل زمن ممكن . وللإجابة عن تلك الأسئلة ، وإيجاد فرع من الرياضيات يضع الحلول المناسبة لمثل تلك المسائل التي حل بعضها الرياضيان السويسريان يوحنا برنولي (1667م - 1748م) ويعقوب برنولي (1654م - 1705م) ، وكذلك الألماني ليبنز (1646م - 1716م) ، والإنجليزي نيوتن (1642م - 1727م) ، والفرنسي لوبتال (1661م - 1704م) فقد وضع السويسري اويلر (1707م - 1783م) اساسيات هذا الفرع من التحليل الرياضي معرفاً ما يسمى الداليات Functionals "دوال من مجموعة الدوال او من فضاء متري الى مجموعة الاعداد الحقيقيه " ، وأوجد الشرط الضروري (معادله او معادلات اويلر) لوجود القيم القصوى والتي ادت الى حل امثال تلك المسائل وغيرها في الميكانيكا التحليليه والمرونه ، ونشر ابحاثه في هذا المجال سنة 1741م ، وبعد دراسته الفرنسي لاجرانج (1736م - 1813م) لأعمال اويلر في 1755م ، توصل الى نفس الشروط بطريقه اخرى "ولهذا السبب يسمى البعض

معادله اويلر ، معادله اويلر - لاجرانج" ، وأرسل ذلك الى اويلر فأعجب بها وسماها حساب التغيرات ، والتي اصبحت عنواناً لهذا الفرع من التحليل الرياضي المهتم بالقيم القصوى للداليات ، والذي تطور ، وحل الكثير من المشاكل في الرياضيات والفيزياء ووضعت شروط ضروريه وكافيه اخرى لوجود القيم القصوى من قبل الفرنسي لجندر (١٧٥٢م - ١٨٣٣م) ، والألمانيان ، جاكوبي (١٨٠٤م - ١٨٥١م) ، وفيرشتراس (١٨١٥ - ١٨٩٧م) وبعد ظهور نظريه التحكم (Control Theory) ، استخدم حساب التغيرات لإستنتاج معادله بلمان التي قدمت اسلوباً آخرأ لأشتقاق معادله هاملتون كما استخدم حساب التغيرات من قبل الروسي بونترياجن لحساب دوال التحكم وايجاد الشروط الضروريه للتحكم الأقصى .

ولتزويد القارئ بمقدمه بسيطه عن هذا الموضوع وبعض تطبيقاته وحاجه طلبه الجامعات وكليات البنات الى مرجع باللغة العربيه في هذا المجال نقدم جهدنا المتواضع الذي ضم ستة فصول تناولنا الأول منها الداليات وخواصها وابسط مسائل التغيرات بنقاط اطراف ثابتة ، ثم مفهوم التغير للداليات الذي بدأ مع كل من اويلر ولاجرانج ثم عمم في اعمال كل من الايطالي فولتيرا (١٨٦٠م - ١٩٤٠م) ، والفرنسي هادمارد (١٨٦٥م - ١٩٦٣) ، اما التغير بمفهومه الحديث فقد ظهر في اعمال الفرنسي جاتيكنس ، ثم تناولنا القيم القصوى للداليات وشروط اويلر الضروري لوجود قيم قصوى ، وتناولنا في الفصل الثاني بعض الحالات الخاصه من معادله اويلر - لاجرانج ، والداليات عديده المتغيرات اضافة للداليات المعتمده على مشتقات ذات رتب عليا وداليات بشروط إضافيه و معادله هاملتون وبعض تطبيقاتها ، وتناولنا في الفصل الثالث مسائل التغيرات بداليات ذات تكاملات متعدده والمسأله العكسيه وأشتقاق معادله شرودنجر في الميكانيك الكمي (ميكانيكا الكم) ، اما الفصل الرابع فقد خصص لدراسه مسائل التغيرات بنقاط اطراف متحركه بدأ بأبسط المسائل

ثم الداليات عديده المتغيرات واشتقاق معادله هاملتون - جاكوبي ودراسة بعض تطبيقاتها ، ثم دراسته منحنيات القيم القصوى ذات النقاط الركنيه وشروطها . وخصص الفصل الخامس لدراسة الشروط الضرورية والكافية لوجود قيم قصوى لكل من لجندرو جاكوبي وفيرشتراس ، وتناولنا في الفصل الأخير مبادئ التحكم الأمثل من صياغة المسألة الى قاعده بلمان وتطبيقاتها والشروط الضرورية للتحكم الأقصى ، فقاعده القيمة القصوى وبعض تطبيقاتها . كما اشتمل الكتاب على قائمه للمراجع ودليل الرموز المستخدمه ، إضافة لدليل عربي انجليزي للمصطلحات ، سائلين الله العلي القدير ان يرحمنا ويرحم والدينا ، ويجعل اعمالنا خالصة لوجهه الكريم ، وآخر دعوانا ان الحمد لله رب العالمين.

١٢ ربيع الأول ١٤٢٦ هـ

٢١ - ٤ - ٢٠٠٥ م

❖ المحتوى ❖

- الفصل الاول : صياغة المسألة والشروط الضرورية للقيم القصوى ١
- ١-١ : الداليات وابسط مسائل التغيرات. ١
- ١-٢ : القيم القصوى للداليات. ١٣
- ١-٣ : شرط اويلر الضروري ١٨
- تمارين ٢٤
- الفصل الثاني : مسائل التغيرات بنقط اطراف ثابتة. ٢٦
- ٢-١ : حالات خاصه من معادلة اويلر - لاجرانج. ٢٦
- ٢-١-١ : اذا كانت F لاتعتمد على Y' : ٢٦
- ٢-١-٢ : اذا كانت الدالة F خطيه في Y' ٢٩
- ٢-١-٣ : اذا كانت الدالة F تعتمد فقط على Y' : ٣١
- ٢-١-٤ : اذا كانت $F = F(x, y')$: ٣١
- ٢-١-٥ : اذا كانت $F = F(y, y')$: ٣٣
- ٢-٢ : داليات عديدة المتغيرات. ٣٥
- ٢-٢-١ : معادلات اويلر - لاجرانج للداليات المعتمدة على N من المتغيرات ٣٦
- ٢-٢-٢ : معادلات اويلر. لاجرانج القانونيه. ٣٩
- ٢-٢-٣ : قاعده هاملتون. ٤٢
- ٢-٣ : داليات تعتمد على مشتقات ذات رتب عليا. ٤٧
- ٢-٤ : داليات بشروط اضافيه. ١٢
- تمارين ٥٩

الفصل الثالث : مسائل التغيرات بداليات ذات تكاملات متعددة والمسألة العكسيه...٦٥

٣- ١ : مسائل التغيرات بداليات ذات تكاملات متعددة وبعض تطبيقاتها ٦٥

٣- ٢ : المسألة العكسيه ٧٤

تمارين ٧٩

الفصل الرابع : مسائل التغيرات ذات نقاط اطراف متحركه ٨١

٤- ١ : مسائل التغيرات للدالي $J[Y]$ بنقاط اطراف متحركه ٨١

٤- ١- ١ : ايسط المسائل بنقط أطراف متحركه ٨١

٤- ١- ٢ : المنحنيات الحرجه للدالي $J[Y]$ عندما تتحرك نقطتي الأطراف

على منحنيين ٨٥

٤- ٢ : داليات عديدة المتغيرات ٩٠

٤- ٣ : معادله هاملتون - جاكوبي ٩٦

٤- ٤ : منحنيات القيم القصوى ذات النقاط الركنيه ١٠٢

٤- ٤- ١ : انعكاس منحنيات القيم القصوى ١٠٣

٤- ٤- ٢ : انكسار منحنيات القيم القصوى ١٠٧

٤- ٤- ٣ : الشروط الركنيه ١٠٩

تمارين ١١٤

الفصل الخامس : الشروط الضرورية والكافيه للقيم القصوى ١١٧

٥- ١ : شرط لجندر ١١٧

٥- ٢ : شروط جاكوبي ١٢٢

٥- ٣ : شرط فيرشراس ١٣٠

تمارين ١٤٥

الفصل السادس : التحكم الأمثل ١٤٨

١- ٦: صياغة المسألة وربط الضوابط وتجميع التكاليف ١٤٨

٦- ٢: قاعدة الأمثلية وبعض تطبيقاتها ١٥٣

٦- ٣: الشروط الضرورية للتحكم الأمثل ١٥٩

٦- ٤: قاعدة القيمة القصوى وبعض تطبيقاتها ١٦٣

تمارين ١٦٨

المراجع ١٧٠

دليل الرموز (Symbols) ١٧٢

دليل (فهرس) المصطلحات ١٧٣

الفصل الاول

صياغة المسألة والشروط الضرورية للقيم القصوى

يهتم حساب التغيرات بدراسة القيم العظمى، والصغرى للداليات، ويضم هذا الفصل ثلاثة بنود، تناولنا في الاول منها تعاريف الداليات وبعض انواعها وامثله على ابسط انواع مسائل التغيرات، وتناولنا في الثاني دراسة القيم العظمى والصغرى للداليات وضم البند الثالث الشروط الأساسية، وشرط اويلر الضروري لمعرفة القيم الحرجة وقيم الثبات.

1-1: الداليات وابسط مسائل التغيرات.

تعريف 1-1-1:

إذا كانت F مجموعة الدوال وكانت R مجموعة الأعداد الحقيقية فتسمى الدالة $J: F \rightarrow R$ دالي (Functional).

إذا الدالي هو دالة تقترن كل داله او منحني بعدد حقيقي وللداليات صور مختلفه تبعاً لمتغيراتها نذكر منها مايلي:

$$\int_a^b F(x) dx, \quad J[y(x)] = \int_a^b F[x, y(x), y'(x)] dx$$

$$J[y(x)] = \int_a^b F[x, y(x), y^{(1)}(x), \dots, y^{(n)}(x)] dx$$

$$J[y_1, \dots, y_n] = \int_a^b F[x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n'] dx$$

وفيما يلي بعض الامثله على الداليات.

مثال ١- ١- ١:

طول القوس (Arc Length) لمنحنى $y=y(x)$ في المستوى، والذي يصل بين النقطتين $A(a, c)$ ، $B(b, d)$ يمثل دالي لأن $L:F \rightarrow R$ ، حيث

$$L[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

مثال ١- ١- ٢:

اقل مساحة سطحه S لسطح $z=z(x, y)$ ناتجه من منحنى مغلق تمثل دالي ايضاً لأن $S:F \rightarrow R$ ، حيث

$$S[z(x, y)] = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

حيث D هو مسقط السطح على المستوى xy . لاحظ انه يمكن انشاء هذا السطح بغمز سلك رفيع له شكل المنحنى المغلق في سائل صابوني، ثم رفعه من السائل.

وحيث ان حساب التغيرات يهتم بدراسة طرق تعيين القيم القصوى (العظمى، والصغرى) للداليات، فقد اطلق على المسائل المتعلقة بمعرفة القيم القصوى للداليات، مسائل التغيرات (Variation Problems)، وفيما يلي بعض الامثله على ابسط انواعها .

مثال ١- ١- ٣: (مسألة اقصر بعد بين نقطتين في المستوى)

(The Geodesics Problems:

إذا كان المستوى هو R^2 فتكون المسألة ايجاد منحنى $y=y(x)$ يصل بين نقطتين $A(a, c)$ ، $B(b, d)$ في المستوى xy ذو اقل طول ممكن، وفي هذه الحالة يكون الدالي هو طول الخط $L[y(x)]$ ، الذي يجعل قيمة

$$L[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

قيمه صغرى اما اذا كان المستوى هو R^3 ، فقد تكون المسألة هي ايجاد اقصر منحنى يصل بين النقطتين $A, B \in R^3$ ، الواقعتين على السطح $F(x, y, z) = 0$ ، وتكون المشكله هي جعل قيمة

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx$$

اقل ما يمكن . ولقد حلت هذه المسألة عام ١٦٩٨ م من قبل الرياضي السويسري يعقوب برنولي (١٦٥٤ - ١٧٠٥ م).

مثال ١- ١- ٤: (مسألة ذات المحيط المعلوم Isoperimetric Problem)

تتعلق هذه المسألة ايجاد منحنى مغلق ذو محيط معلوم يحدد اكبر مساحه ممكنه وهي من اقدم مسائل التغيرات التي شغلت اهتمام الرياضيين. لاحظ ان طول المنحنى يكون ثابتاً ، كما ان

$$L = \int_{t_0}^t \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2} dt$$

هو دائرة كما كان معلوم لقدماء اليونانيين .

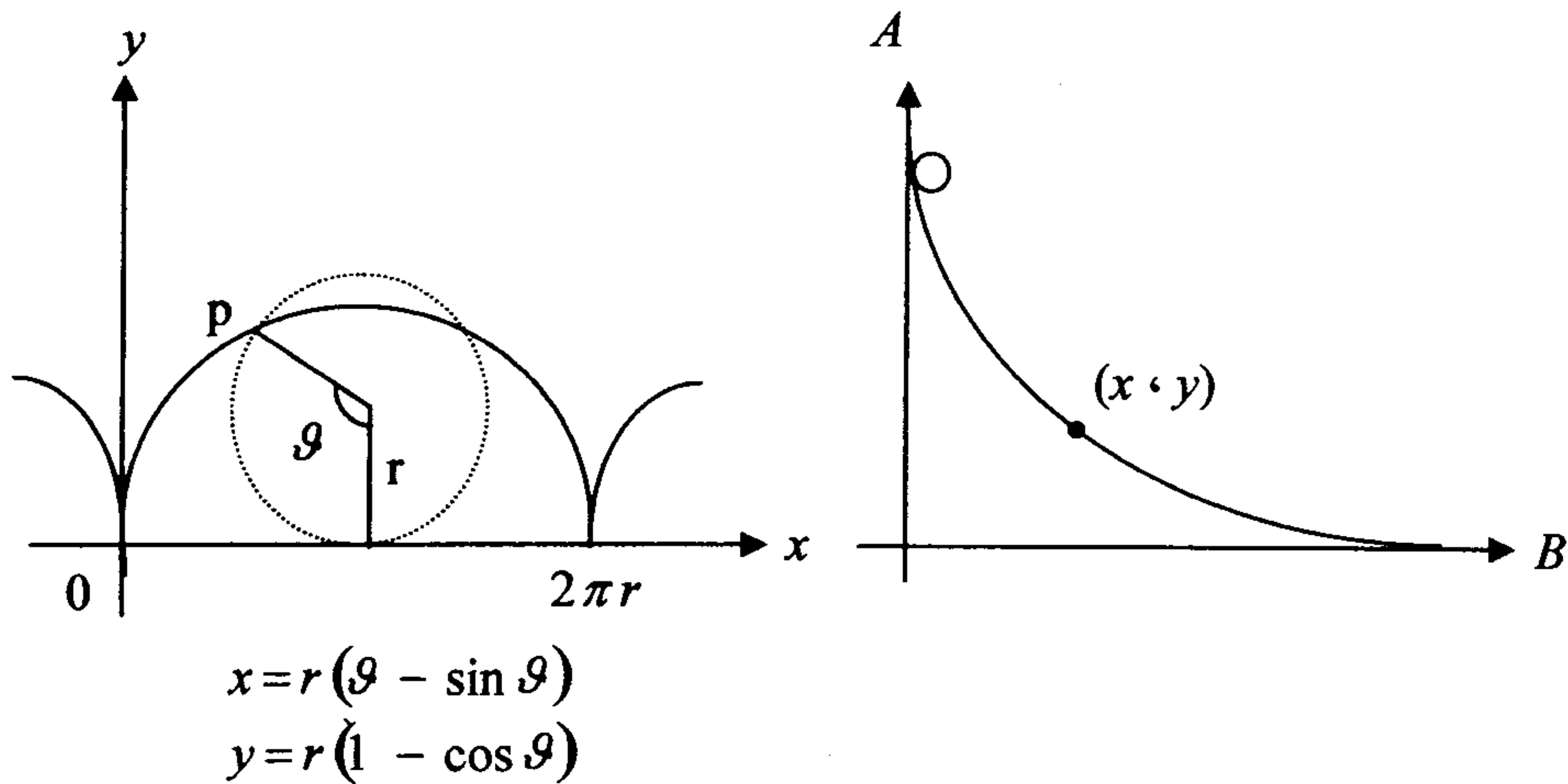
مثال ١- ١- ٥: (مسألة منحنى اقصر زمن Brachistochrone)

وهي مسألة ايجاد اقصر منحنى يصل بين نقطتين معلومتين في المستوى R^2 بشرط ان انزلاق جسم (خرزه) على ذلك المنحنى بدون احتكاك من $A(0,0)$

الى $B(b, y_1)$ يستغرق اقل زمن ممكن ، واول من قدم الحل لهذه المسألة الرياضي
السويدي يوحنا برنولي (1667 - 1748م) عام 1696م ، كما حلت من قبل يعقوب
برنولي ، والألماني ليبنز (1646 - 1716م) والإنجليزي نيوتن (1642 - 1727م) ،
والفرنسي لوبيتال (1661 - 1704م) لاحظ (كما سنثبت لاحقاً) أن

$$t(y(x)) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx$$

حيث g التعجيل او التسارع الأرضي ، $y(0)=0$ ، $y(b)=y_1$ ، كما أن
المنحنى المطلوب هو الدحروجي ' cycloid ' وهو المحل الهندسي لنقطه على دائرة
متدحرجه على خط مستقيم " شكل (1- 1)



شكل (1- 1)

والآن ليكن V فضاء متجهات (linear or vector space) على الحقل R ولنقرن
مع كل عنصر $v \in V$ العدد الحقيقي $\|v\|$ والذي يسمى معياراً أو مقياس
(Norm) v بحيث أن

$$\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0 \quad , \quad \|v\| \geq 0 \quad (1)$$

$$\alpha \in \mathbb{R} \quad \square \quad v \in V \quad \text{لكل} \quad |\alpha v| = |\alpha| \cdot \|v\| \quad (\text{ب})$$

$$u, v \in V \quad \text{لكل} \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad (\text{ج})$$

نجد أن (V, d) حيث $d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ، $d(v, v) = \|v - v\|$ فضاء ميري (metricspace) ، وسنهتم بدراسة مسائل التغيرات للداليات في الفضاء ℓ حيث D_n, D_1, ℓ فضاء الدوال المتصلة على الفترة $[a, b]$ ، ولكل $f \in \ell$ يكون $\|f(x)\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ ، وإذا كان D_1 فضاء جميع الدوال المتصلة على $[a, b]$ والتي تكون مشتقتها الأولى متصلة على $[a, b]$ ولكل $f \in D_1$ يكون

$$\|f(x)\|_{D_1} = \max_{x \in [a, b]} |f(x)| + \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$$

$$= |f(x)|_{\ell} + |f'(x)|_{\ell}$$

أما $D_n, n=1, 2, \dots$ فهو فضاء الدوال f المتصلة على $[a, b]$ ، والتي تكون مشتقتها $f^{(r)}$ ، $r=1, 2, \dots, n$ متصلة على $[a, b]$ ولكل $f \in D_n$ يكون

$$f(x) = f^{(0)}(x) \quad \text{حيث} \quad \|f(x)\| = \sum_{r=0}^n \max_{x \in [a, b]} |f^{(r)}(x)| = \sum_{r=0}^n \|f^{(r)}(x)\|_{\ell}$$

تعريف ١-١-٢:

يقال عن دالي $J: F \rightarrow \mathbb{R}$ ، أنه دالي خطي (linear functioned) ، إذا كان

$$k \in \mathbb{R} \quad , \quad y \in F \quad \text{لكل} \quad J[k y(x)] = k \cdot J[y(x)] \quad (1)$$

$$J[y_1(x) + y_2(x)] = J[y_1(x)] + J[y_2(x)] \quad \text{لكل} \quad y_1, y_2 \in F \quad (\text{ب})$$

مثال ١-١-٦:

$$J[f(x)] = \int_a^b \alpha(x), f(x) dx \quad \text{دالي خطي حيث} \quad \alpha(x)$$

دالة ثابتة.

الاثبات:

بما ان

$$\begin{aligned} J[k f(x)] &= \int_a^b \alpha(x) k f(x) dx & (1) \\ &= k \int_a^b \alpha(x) f(x) dx = k \cdot J[f(x)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J[f_1(x) + f_2(x)] &= \int_a^b \alpha(x) (f_1(x) + f_2(x)) dx & (ب) \\ &= \int_a^b \alpha(x) f_1(x) dx + \int_a^b \alpha(x) f_2(x) dx \\ &= J[f_1(x)] + J[f_2(x)] \end{aligned}$$

تعريف 1- 1- 3:

يقال عن الدالي $J: F \rightarrow R$ انه متصل عند النقطة $y = y_0(x)$ ، إذا كان

لكل $\varepsilon > 0$ توجد $\delta > 0$ بحيث ان

$$\|y - y_0\| < \delta \quad \Rightarrow \quad |J(y(x)) - J(y_0(x))| < \varepsilon$$

ومن ثم ان J دالي متصل عند $y = y_0(x)$ ، إذا كان $\lim_{y \rightarrow y_0} J[y(x)] = J[y_0(x)]$

مثال 1- 1- 7:

اثبت ان $J[y(x)] = \int_a^b \alpha(x) y(x) dx$ بحيث $\alpha(x)$ دالة ثابتة ، انه دالي خطي ومتصل في الفضاء ℓ .

الاثبات :

لاحظ ان $J[y(x)]$ دالي خطي حسب مثال (1- 1- 6) ولكي نثبت ان

$J[y(x)]$ دالي متصل، لاحظ ان $\alpha(x)$ داله محدده، إذا $|\alpha(x)| \leq M$ ،

M ثابت، وعليه فإن لكل $\delta = \frac{\varepsilon}{M(b-a)}$ نجد ان $\|y - y_0\|_\varepsilon < \delta$ ،

$$\begin{aligned} |J(y(x)) - J(y_0(x))| &= \left| \int_a^b \alpha(x) (y - y_0) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |\alpha(x)| |y - y_0| dx \\ &\leq M \cdot \max_{x \in [a,b]} |y - y_0| (b - a) \\ &\leq M \cdot \|y - y_0\|_\varepsilon (b - a) < \varepsilon \end{aligned}$$

حيث

$$\|y - y_0\|_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{M(b-a)} = \delta$$

مثال 1- 1- 8 :

اثبت ان الدالي $L: D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ، حيث $L[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$ متصل

على D_1 .

الاثبات :

بما ان

$$|L[y(x)] - L[y_0(x)]| = \left| \int_a^b (\sqrt{1 + y'^2} - \sqrt{1 + y_0'^2}) dx \right|$$

إذا

$$|L[y(x)] - L[y_0(x)]| \leq \int_a^b \left| \sqrt{1 + y'^2} - \sqrt{1 + y_0'^2} \right| dx$$

$$\begin{aligned}\sqrt{1+y'^2} - \sqrt{1+y_0'^2} &= \frac{(1+y'^2) - (1+y_0'^2)}{\sqrt{1+y'^2} + \sqrt{1+y_0'^2}} \\ &= \frac{(y' - y_0')(y' + y_0')}{\sqrt{1+y'^2} + \sqrt{1+y_0'^2}}\end{aligned}$$

إذاً

$$|L[y(x)] - L[y_0(x)]| \leq \int_a^b \frac{|y' - y_0'| |y' + y_0'|}{\sqrt{1+y'^2} + \sqrt{1+y_0'^2}} dx$$

لكن المشتقات y' , y_0' متصله في الفترة المغلقه $[a, b]$ ، اذاً

$$\frac{|y' + y_0'|}{\sqrt{1+y'^2} + \sqrt{1+y_0'^2}} \leq M$$

وعلاوة على ذلك فمن تعريف المقياس في الفضاء D_1 نجد ان :

$$\max_{x \in [a, b]} |y' - y_0'| = \|y' - y_0'\|_C \leq \|y - y_0\|_{D_1}$$

ومن ثم فإن

$$\begin{aligned}|L[y(x)] - L[y_0(x)]| &\leq M \int_a^b |y' - y_0'| dx \\ &\leq M \max_{x \in [a, b]} |y' - y_0'| (b-a) \\ &\leq M \|y - y_0\|_{D_1} (b-a)\end{aligned}$$

إذاً لكل $\varepsilon > 0$ يمكن اختيار $\delta = \varepsilon / M(b-a)$ ، وعليه فإن لكل $y \in D_1$ حيث

$$\|y - y_0\|_{D_1} < \delta$$

$$\|L[y(x)] - L[y_0(x)]\| \leq M(b-a) \|y' - y_0'\|_{D_1} < \varepsilon$$

إذا $L[y(x)]$ دالي متصل في

والآن الى بعض الحقائق الأساسية المتعلقة بالداليات الخطيه المتصله والقضايا الآتية ، والتي أثبتت عام ١٨٧٩م من قبل الرياضي الألماني باول ديوبوا ريموند (Paul Du Bois Reymon) (١٨٣١ - ١٨٨٩م)

قضيه ١ - ١ - ١: (اويلر - لاجرانج)

إذا كانت $\alpha(x)$ داله متصله على الفتره $[a, b]$ ، وكان $\int_a^b \alpha(x) f(x) dx = 0$ لكل $f(x) \in \ell$ بحيث أن $f(a) = f(b) = 0$ ، فإن $\alpha(x) = 0$ لكل $x \in [a, b]$.

البرهان :

إذا أثبتنا أن $\alpha(x) = 0$ لكل $x \in (a, b)$ ، فإن اتصال $\alpha(x)$ على $[a, b]$ يؤدي الى كون $\alpha(x) = 0$ لكل $x \in [a, b]$ ، لذا نفرض أن $\alpha(x^*) \neq 0$ ، $x^* \in (a, b)$. إذاً إما $\alpha(x^*) > 0$ أو $\alpha(x^*) < 0$ ، ويكفي ان نثبت القضييه عندما $\alpha(x^*) > 0$ لأنه اذا كانت $\alpha(x^*) < 0$ ، فإن $-\alpha(x^*) < 0$ بما ان $\alpha(x)$ مستمره بالفرض ، إذاً $\alpha(x) > 0$ لكل $x \in (c, d)$ حيث c, d اعداد حقيقيه تحقق العلاقه $a < c < x^* < d < b$ وعليه اذا كانت

$$f^*(x) = \begin{cases} (x-c)(d-x) & \forall x \in [c, d] \\ 0 & \forall x \in [a, b] - [c, d] \end{cases}$$

فإن $f^* \in \ell$ ، كما ان $f^*(c) = f^*(d) = f^*(a) = f^*(b) = 0$

$$\int_c^d \alpha(x) (x-c) (d-x) dx = 0 \quad \text{إذاً}$$

لكن $\alpha(x) > 0$ بالفرض، $(x-c) > 0$ ، $(d-x) > 0$

إذاً $\alpha(x) (x-c) (d-x) > 0$ لكل $x \in (c, d)$

وعليه فإن $\int_c^d \alpha(x) (x-c) (d-x) dx > 0$ وهذا تناقض.

إذاً

$$\alpha(x) = 0 \quad \text{لكل } x \in [a, b]$$

□

ملاحظة: يمكن تعميم القضية (1- 1- 1) كالآتي

إذا كانت $\alpha(x)$ دالة متصلة على $[a, b]$ ، وكان

$$\int_a^b \alpha(x) f(x) dx = 0 \quad \text{لكل } f(x) \in D_n \text{ بحيث أن } f^{(r)}(a) = f^{(r)}(b) = 0 \text{ لكل } r \in \mathbb{N}$$

فإن $\alpha(x) = 0$ لكل $x \in [a, b]$.

ولإثبات تلك العبارة نتبع نفس البرهان في قضية (1- 1- 1)، وجعل

$$f^*(x) = \begin{cases} (x-c)^{n+1} (d-x)^{n+1} & \forall x \in [c, d] \\ 0 & \forall x \in [a, b] - [c, d] \end{cases}$$

نحصل على المطلوب.

قضية 1- 1- 2:

إذا كانت $\alpha(x)$ دالة متصلة على $[a, b]$ ، وكان

$$\int_a^b \alpha(x) f'(x) dx = 0 \quad \text{لكل } f(x) \in D_1 \text{ بحيث أن } f(a) = f(b) = 0$$

فإن $\alpha(x) = C$ لكل $x \in [a, b]$ ، حيث $C \in \mathbb{R}$.

البرهان :

نفرض ان C معروف بالعلاقه $\int_a^b [\alpha(x) - C] dx = 0$ ، ولنفرض ان

لكن $f(a) = f(b) = 0$ ، كما ان $f(x) \in D_1$ ، إذا $\int_a^x [\alpha(\omega) - C] d\omega$

$$\begin{aligned} \int_a^b [\alpha(x) - C] f'(x) dx &= \int_a^b \alpha(x) f'(x) dx - C \int_a^b f'(x) dx \\ &= 0 - C(f(b) - f(a)) = 0 \end{aligned}$$

كما ان

$$\int_a^b [\alpha(x) - C] h'(x) dx = \int_a^b [\alpha(x) - C] [\alpha(x) - C] dx = \int_a^b [\alpha(x) - C]^2 dx$$

إذا

$$\int_a^b [\alpha(x) - C]^2 dx = 0$$

وعليه فإن $x(x) - C = 0$ ومنها نجد ان $\alpha(x) = C$ لكل $x \in [a, b]$.

□

قضيه ١-١-٣ :

إذا كانت $\alpha(x)$ داله متصله على $[a, b]$ ، وكان

$f(a) = f(b) = 0$ ، بحيث ان $f(x) \in D_2$ لكل $f(x) \in D_2$ ، $\int_a^b \alpha(x) f''(x) dx = 0$

و $f'(a) = f'(b) = 0$ ، فإن $\alpha(x) = c_0 + c_1 x$ لكل $x \in [a, b]$ ،
 . $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$

البرهان :

نفرض ان C_0, C_1 معرفان بالعلاقتين الآتيتين

$$\int_a^b dx \int_a^x [\alpha(t) - C_0 - C_1 t] dt = 0 \quad , \quad \int_a^b [\alpha(x) - C_0 - C_1 x] dx = 0$$

$$\text{كـمـا ان } f(x) \in D_2 \quad \text{إذا} \quad f(x) = \int_a^x dt \int_a^t [\alpha(r) - C_0 - C_1 r] dr$$

$$\text{وعليه فإن} \quad , \quad f'(a) = f'(b) = 0 \quad , \quad f(a) = f(b) = 0$$

$$\int_a^b [\alpha(x) - C_0 - C_1 x] f''(x) dx = \int_a^b \alpha(x) f''(x) dx - C_0 [f'(b) - f'(a)] - C_1 \int_a^b x f''(x) dx$$

$$= 0 - 0 - C_1 \int_a^b x f''(x) dx = -C_1 \int_a^b x f''(x) dx$$

$$= -C_1 \left[x f'(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) dx \right]$$

$$= -C_1 [x [f'(b) - f'(a)] - [f(b) - f(a)]] = 0$$

لكن

$$\int_a^b [\alpha(x) - C_0 - C_1 x] f''(x) dx = \int_a^b [\alpha(x) - C_0 - C_1 x] [\alpha(x) - C_0 - C_1 x] dx$$

$$= \int_a^b [\alpha(x) - C_0 - C_1 x]^2 dx$$

$$\text{إذا} \quad \int_a^b [\alpha(x) - C_0 - C_1 x]^2 dx = 0 \quad \text{وعليه فإن} \quad \alpha(x) = C_0 + C_1 x \quad \text{لكل}$$

$$. \quad x \in [a, b]$$

□

قضية ١ - ١ - ٤ :

إذا كان كل من $\alpha(x)$ ، $\beta(x)$ دالة متصله على $[a, b]$ وكان

$$\int_a^b [\alpha(x) f(x) + \beta(x) f'(x)] dx = 0 \quad \text{لكل} \quad f(x) \in D_1 \quad \text{بحيث ان}$$

$$\text{لكل} \quad \beta'(x) = \alpha(x) \quad \text{فإن} \quad \beta(x) \quad \text{قابلة للأشتقاق و} \quad f(a) = f(b) = 0$$

$$. x \in [a, b]$$

البرهان :

نتكن $A(x) = \int_a^x \alpha(t) dt$ ، إذا $A'(x) = \alpha(x)$ ومن التكامل بالتجزئ ، نجد ان

$$\begin{aligned} \int_a^b \alpha(x) f(x) dx &= A(x) f(x) \Big|_a^b - \int_a^b A(x) f'(x) dx \\ &= A(x) [f(b) - f(a)] - \int_a^b A(x) f'(x) dx \\ &= 0 - \int_a^b A(x) f'(x) dx = - \int_a^b A(x) f'(x) dx \end{aligned}$$

وعليه فإن

$$\int_a^b [\alpha(x) f(x) + \beta(x) f'(x)] dx = \int_a^b [-A(x) + \beta(x)] f'(x) dx = 0$$

إذا $\beta(x) - A(x) = C$ حسب قضية (١- ١- ٢) وعليه فإن $\beta'(x) = A'(x)$ لكن $A'(x) = \alpha(x)$ إذا $\beta'(x) = \alpha(x)$ لكل $x \in [a, b]$.

□

١-٢ : القيم القصوى للداليات

تعود دراسة التغير بالنسبة لبعض الداليات الى كل من اويلرولجرانج ، ثم عممت تلك المفاهيم في اعمال كل من الايطالي فولتيرا (١٨٦٠ - ١٩٤٠م) ، والفرنسي هادمارد (١٨٦٥ - ١٩٦٣م) ، اما التغير بمفهومه الجديد فقد ظهر في اعمال الفرنسي جاتكس (Gateaux) ولتعريف التغير بمفهومه الجديد ، لاحظ انه اذا كان \mathbb{X} فضاءً معيارياً (مترياً) ، فإن المجموعة $\{y \in \mathbb{X} \mid \|y-x\| < r\}$ كرهه كره مركزها x ونصف قطرها r ويرمز عادةً لتلك الكرة بالرمز $B_r(x)$ ويقال عن مجموعه جزئية D من \mathbb{X} انها مجموعة مفتوحة (open set) ، إذا

*

كان لكل $x \in D$ نجد ان $B_r(x) \subseteq D$. ويقال عن مجموعه جزئية D انها
مجموعه مغلقة إذا كانت مكملتها مجموعته مفتوحة .

مثال ١- ٢- ١ :

إذا كانت $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ نقطتين في \mathbb{R}^2 ، وعرّفنا

$$\|A - B\| = d(AB) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

نجد ان \mathbb{R}^2 فضاء متري كما ان $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b, c < y < d\}$
مجموعه جزئية مفتوحة من \mathbb{R}^2 ، لأن لكل $P(x, y) \in D$ يوجد $B_r(P) \subseteq D$
حيث

$$0 < r = \min \{x - a, b - x, y - c, d - y\} \in \mathbb{R}$$

والآن الى تعريف التغير بالنسبة للداليات .

تعريف ١- ٢- ١ :

إذا كان J دالياً معرفاً على المجموعة الجزئية المفتوحة D من الفضاء
المتري \mathbb{R}^n ، فيقال ان للدالي J تغير عند النقطة $x \in D$ ، إذا وجد دالي δJ تكون

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(x + \varepsilon h) - J(x)}{\varepsilon} = \delta J(x, h) \text{ و } h \in \mathbb{R}^n \text{ لكل } h \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{إذا } \delta J(x, 0) = 0 \text{ كما ان } \delta J(x, h) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} (J(x + \varepsilon ah)) \right|_{\varepsilon=0}$$

$$\delta J(x, ah) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} (J(x + \varepsilon ah)) \right|_{\varepsilon=0} = a \cdot \left. \frac{d}{d\alpha} (J(x + \alpha h)) \right|_{\alpha=0} = a \delta J(x, h)$$

وبالتعويض عن h بالرمز Δx ، نجد ان

$$\delta J(x, \Delta x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(x + \varepsilon \Delta x) - J(x)}{\varepsilon} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} J(x + \varepsilon \Delta x) \right|_{\varepsilon=0}$$

مثال ١- ٢- ٢ :

احسب التغير للدالي

$$J(y(x)) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx$$

$$F(x, y, y') = \sqrt{\frac{1+(y')^2}{2g(y_0 - y)}} \quad \text{ثم اوجد } \delta J(y, \Delta y) \text{ عندما}$$

الحل :

$$\text{بما ان } J(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx \text{ , إذا}$$

$$J(y + \varepsilon \Delta y) = \int_a^b F(x, y + \varepsilon \Delta y, y' + \varepsilon \Delta y') dx$$

وعليه فإن

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} J(y + \varepsilon \Delta y) &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b F(x, y + \varepsilon \Delta y, y' + \varepsilon \Delta y') dx \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial \varepsilon} F(x, y + \varepsilon \Delta y, y' + \varepsilon \Delta y') dx \end{aligned}$$

من

$$\frac{\partial F(x, y + \varepsilon \Delta y, y' + \varepsilon \Delta y')}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial F(x, y + \varepsilon \Delta y, y' + \varepsilon \Delta y')}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial F(x, y + \varepsilon \Delta y, y' + \varepsilon \Delta y')}{\partial y'} \Delta y'$$

سب قاعدة السلسلة ، إذا

$$\left. \frac{\partial F(x, y + \varepsilon \Delta y, y' + \varepsilon \Delta y')}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} \cdot \Delta y'$$

فيه فإن

$$\delta J(y, \Delta y) = \int_a^b \left[\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} \cdot \Delta y' \right] dx$$

وعندما

$$F(x, y, y') = \sqrt{\frac{1+(y')^2}{2g(y_0-y)}}$$

نجد ان

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} = \frac{1}{2(y_0-y)} \sqrt{\frac{1+(y')^2}{2g(y_0-y)}}$$
$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{2g(y_0-y)[1+(y')^2]}}$$

وعليه فإن

$$\delta J(y, \Delta y) = \int_a^b \left[\frac{1}{2(y_0-y)} \sqrt{\frac{1+(y')^2}{2g(y_0-y)}} \cdot \Delta y + \frac{y' \Delta y}{\sqrt{2g(y_0-y)[1+(y')^2]}} \right] dx$$

□

والآن الى تعريف القيم القصوى للداليات ودراسة خواصها

تعريف ١- ٢- ٢:

لتكن D مجموعة جزئية غير خالية في الفضاء المترى X ، ولتكن $y_0 \in D$

J دالياً على D .

(١) يقال عن $J(y_0)$ انها قيمة عظمى محلية (Local Maximum Value)

للدالي J ، إذا وجدت كره $B_r(y_0)$ ، بحيث ان $J(y) \leq J(y_0)$ لكل

$$y \in D \cap B_r(y_0)$$

(ب) يقال عن $J(y_0)$ انها قيمة صغرى محلية (Local Minimum Value)

للدالي J إذا كان $J(y) \geq J(y_0)$ لكل $y \in D \cap B_r(y_0)$.

(ج) يقال عن $J(y_0)$ انها قيمة قصوى (Extremum Value) للدالي J عند

$y_0 \in D$ إذا كانت $J(y_0)$ قيمة عظمى او صغرى للدالي J ، وتسمى القيمة

القصوى قيمه قصوى ضعيفه إذا كان للفرق $\Delta J(y)$ نفس الاشاره لكل $y \in D_1$ ، وتسمى قيمه عظمى قويه إذا كان للفرق $\Delta J(y)$ نفس الاشاره لكل $y \in \ell$ ، ولإيجاد العلاقة بين القيم القصوى للداليات والتغير ، نورد مايلي .

مبرهنه ١- ٢- ١ :

إذا كان للدالي J المعرف على المجموعة الجزئية المفتوحة D في الفضاء المتري \mathbb{R}^n ، قيمة قصوى عند $y_0 \in D$ ، وكان للدالي J تغيراً عند y_0 ، فإن $\delta J(y_0, h) = 0$ لكل $h \in \mathbb{R}^n$.

البرهان:

نفرض ان $J(y_0) \in D$ قيمه صفري محليه للدالي J ، إذا $J(y_0 + \varepsilon h) - J(y_0) \geq 0$ لكل الاعداد الصغيره ε ، ولكل $h \in \mathbb{R}^n$ ، وعليه فإن $\frac{J(y_0 + \varepsilon h) - J(y_0)}{\varepsilon} \geq 0$ لكل الاعداد الصغيره الموجبه ε ، بينما $\frac{J(y_0 + \varepsilon h) - J(y_0)}{\varepsilon} \leq 0$ لكل الاعداد الصغيره السالبه ε . وبالتالي فإن

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon < 0}} \frac{J(y_0 + \varepsilon h) - J(y_0)}{\varepsilon} \leq 0 , \quad \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{J(y_0 + \varepsilon h) - J(y_0)}{\varepsilon} \geq 0$$

إذا كانت تلك النهايات موجوده . إذا

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(y_0 + \varepsilon h) - J(y_0)}{\varepsilon} = 0$$

لكل نقطه نهايه صفري $y_0 \in D$ ، عندما تكون تلك النهايه موجوده .

وبالمثل نجد ان

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(y_0 + \varepsilon h) - J(y_0)}{\varepsilon} = 0$$

عندما $y_0 \in D$ نقطه (منحني) نهايه عظمى . لكن

$$\delta J(y_0, h) = 0 \text{ إذا } \delta J(y_0, h) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(y_0 + \varepsilon h) - J(y_0)}{\varepsilon}$$

□

ملاحظه: إذا كانت $\delta J(y_0, h) = 0$ لكل $h \in \mathbb{R}$ ، فإن ذلك قد لا يعني ان $J(y_0)$ قيمة قصوى للدالي J ، كما يوضح ذلك المثال الآتي.

مثال ١- ٢- ٣:

(١) إذا كان $J: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، وكان $J(x) = x^3$ لكل $J \in \mathbb{R}$ ، فإن $\delta J = J'$

وعليه فإن $J'(0) = 0$ ، بينما $J(0)$ ليست قيمة قصوى للداله J .

(ب) إذا كان $J: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ، $J(x) = x_2^2 - x_1^2$ لكل

$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ، فإن

$$\delta J(x, h) = \frac{\partial J}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial J}{\partial x_2} h_2 = -2x_1 h_1 + 2x_2 h_2$$

لكل $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ إذا $\delta J(0, 0) = 0$ ، لكن $J(0, 0)$

ليست قيمة قصوى للدالي J .

١- ٣- شرط اويلر الضروري (Euler's Necessary Condition)

سنركز اهتمامنا في هذا الجزء على تحديد الشرط الضروري المؤدي الى ما يعرف بمعادلة اويلر لاجرانج التي تؤدي الى معرفة القيم الحرجه او قيم الثبات (Stationary Values) للداليات، إضافة الى بعض التطبيقات.

مبرهنه ١- ٣- ١:

إذا كان للدالي $J(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx \in D_1$ ، حيث

$y(a) = A, y(b) = B$ قيمة قصوى على المنحني $y(x)$ ، فإن

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad \dots (1)$$

أي ان الشرط الضروري لأمتلاك $J(y)$ قيماً قصوى عند $y(x)$ هو تحقيق $y(x)$ للمعادلة التفاضليه (١).

البرهان

بما ان $\delta J(y, \Delta y) = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \Delta y' \right) dx$ حسب مثال (١- ٢- ٢)، إذاً

$$\delta J(y, \Delta y) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \Delta y \, dx + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \Delta y' \, dx$$

لكن بالتكامل بالتجزئه ، نجد ان

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \Delta y' \, dx = \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \Delta y \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \cdot \Delta y \, dx$$

وحيث ان $\Delta y(a) = \Delta y(b) = 0$ ، إذاً

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \Delta y' \, dx = - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \cdot \Delta y \, dx$$

وعليه فإن

$$\delta J(y, \Delta y) = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \Delta y \, dx$$

لكن للدالي $J(y)$ قيمه قصوى عند $y = y(x)$ ، إذاً $\delta J(y, \Delta y) = 0$ حسب

مبرهنه (١- ٢- ١)، وعليه فإن $\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \Delta y \, dx = 0$ ، لكن Δy داله

متصله على $[a, b]$ ، إذاً $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$ حسب قضيه (١- ١- ١) .

□

تُعرف المعادله (١) بمعادله اويلر نسبة للرياضي اويلر الذي توصل اليها

عام ١٧٤١ م ، وبعد دراسة لانجرانج لأعمال اويلر توصل عام ١٧٥٥م الى نفس

المعادلة بطريقه اخرى وكان عمره ١٩ سنه فأرسل ذلك الى اويلر الذي اثنى اليه

كثيراً واطلق على تلك الطريقة حساب التغيرات، ولهذا السبب تسمى المعادله
(١) بمعادله اويلر- لانجرانج، والتي تساعد على ايجاد القيم القصوى وقيم
التوقف او الثبات للداليات .

$$\frac{d}{dx} (F_y) = F_{xy} + F_{yy} \cdot y' + F_{y'y} \cdot y'' , \frac{\partial F}{\partial y} = F_y , \frac{\partial F}{\partial y'} = F_{y'}$$

ملاحظه: حيث ان $\frac{\partial F}{\partial y} = F_y$ ، $\frac{\partial F}{\partial y'} = F_{y'}$ إذا معادله اويلر- لانجرانج هي

$$(F_{y'y}) \cdot y'' + (F_{yy}) \cdot y' + (F_{xy}) - F_y = 0$$

وهي معادله تفاضلية من الرتبة الثانية، تُسمى منحنيات تكاملاتها
 $y = (y, x, C_1, C_2)$ المنحنيات الحرجه او منحنيات التوقف والتي قد تكون
منحنيات قيم قصوى للدالي $J(y)$.

والان الى بعض التطبيقات والأمثله الآتية

الموقف

مثال ١- ٣- ١:

أوجد المنحنيات التي قد يكون للدالي $J[y(x)] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2) dx$ قيم قصوى
عليها حيث $y(0) = 0$ ، $y(\pi/2) = 1$.

الحل

حيث ان $F = y'^2 - y^2$ إذا $\frac{d}{dx} F_y = 2y''$ ، $F_y = 2y'$ ، $F_y = -2y$

وبالتالي فإن معادله اويلر- لانجرانج

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

تأخذ الصورة $y'' + y = 0$ ، وحل هذه المعادله هو

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

وباستخدام الشروط الحدية (الإبتدائية) نجد ان $C_1 = 0$ ، $C_2 = 1$ ومن ثمة

فإن $y = \sin x$ هو المنحني الذي توجد عليه القيم القصوى للدالي

$$J[y(x)] = \int_0^{\frac{1}{2}} (y'^2 - y^2) dx$$

مثال ١- ٣- ٢:

على أي منحنى يمكن للدالي التالي

$$J[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + 12xy) dx$$

حيث $y(0) = 0$ ، $y(1) = 1$ ، ان يحصل على قيمه القصوى

الحل

معادلة اويلر- لاجرانج $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$ تأخذ الصورة $y'' = 6x$ ، وحل هذه المعادله هو

$$y = x^3 + C_1 x + C_2$$

وباستخدام الشروط الحديه نجد ان $C_1 = C_2 = 0$ ، إذا يمكن الحصول على القيم القصوى للدالي $J(y)$ على المنحنى $y = x^3$.

مثال ١- ٣- ٣:

اوجد معادلة المنحنى الواصل بين النقطتين $(0,0)$ ، $(1,e)$ ، والذي يجعل للدالي $J(y) = \int_0^1 (y^2 + y'^2 - 2ye^x) dx$ قيمة توقف .

الحل

بما ان $y(0) = 0$ ، $y(1) = e$ ، $F(x,y,y') = (y^2 + y'^2 - 2ye^x)$

$$F_{y'} = 2y' ، F_y = 2y + 2e^x$$

وتصبح معادلة اويلر كالاتي

$$2y + 2e^x - \frac{d}{dx} (2y') = 0$$

$$y + e^x - y'' = 0$$

$$y'' - y = e^x \quad \dots (1)$$

وبالتالي فإن

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية حلها العام هو $y = y_c + y_p$ ، حيث y_c هو حل للمعادلة المتجانسة $y'' - y = 0$ ، y_p هو الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة (1) . لكن $y_c = Ae^{-x} + Be^x$ ، $y_p = \frac{1}{D^2 - 1}(e^x) = \frac{1}{2}xe^x$ ،

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 1}(e^x) = \frac{1}{2}xe^x , y_c = Ae^{-x} + Be^x \text{ لكن (1) .}$$

إذاً $y_c = Ae^{-x} + Be^x + \frac{1}{2}xe^x$ ، وباستخدام الشروط الحدية

$$Ae^{-1} + Be = \frac{1}{2}e , A + B = 0 , y(0) = 0 , y(1) = e$$

$$A = \frac{e^2}{2(1 - e^2)} , B = \frac{e^2}{2(e^2 - 1)} \text{ وعليه فإن}$$

$$y = \frac{e^2}{2(e^2 - 1)} [e^x - e^{-x}] + \frac{1}{2}xe^x \text{ وبالتالي فإن}$$

$$y = \frac{e^2}{(e^2 - 1)} \text{ Sinh}x + \frac{1}{2}xe^x$$

هو المنحني الذي يجعل للدالي $J(y)$ قيمة توقف .

ملاحظة : على الرغم من كون معادله اويلر . لاجرانج معادله تفاضلية من الرتبة الثانية ، الى انه قد يكون للدالي $J(y)$ قيمة قصوى على منحني $y(x)$ لكن $y''(x)$ غير موجوده كما يوضح ذلك المثال الآتي :

$$\text{ليكن } J(y) = \int_{-1}^1 y^2 (2x - y')^2 dx \text{ ، } y(1) = 1 , y(-1) = 0 \text{ ، إذاً معادله}$$

اويلر- لاجرانج هي $y^2 y'' + yy'^2 - 2y^2 - 4x^2 y = 0$ وهي معادله تفاضلية من

الرتبة الثانية . لاحظ ان $J(y) = 0$ قيمه صفري للدالي $J(y)$ على المنحني

$$y(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x \leq 0 \\ x^2 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

وبالرغم من ذلك فإن $y''(0)$ غير موجوده .

والآن الى المبرهنه الآتية .

ميرهنه ١- ٣- ٢:

لتكن $y = y(x)$ داله مشتقتها الأولى متصله ، كما ان
 $F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0$ فإذا كانت المشتقات الجزئية الأولى والثانية للداله
 $F(x, y, y')$ بالنسبه الى كل من x, y, y' متصله (مستمرة) ، وكان
 $F_{y'y'} \neq 0$ فان $y''(x)$ موجوده ومتصله عند كل النقاط (x, y) .

البرهان

بما ان $\Delta F_y = F_y(x + \Delta x, y + \Delta y, y' + \Delta y') - F_y(x, y, y')$
 $= \Delta x \bar{F}_{y'x} + \Delta y \bar{F}_{y'y} + \Delta y' \bar{F}_{y'y'}$

حيث $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \bar{F}_{y'x} = F_{y'x}$ ، $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \bar{F}_{y'y} = F_{y'y}$ ، $F_{y'x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \bar{F}_{y'x}$ لأن المشتقه
 الثانية للداله $F(x, y, y')$ موجوده ومتصله إذاً

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\bar{F}_{y'x} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \bar{F}_{y'y} + \frac{\Delta y'}{\Delta x} \bar{F}_{y'y'} \right)$$

لكن من معادله اويلر. لاجرانج ، نجد ان

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta x} = \frac{d}{dx}(F_y) = F_y$$

إذاً $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\bar{F}_{y'x} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \bar{F}_{y'y} + \frac{\Delta y'}{\Delta x} \bar{F}_{y'y'} \right)$ موجود . لكن $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \bar{F}_{y'x} = F_{y'x}$ و y'

موجوده ، $F_{y'y}$ متصله ، إذاً $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \bar{F}_{y'y} = y' F_{y'y}$ ، وعليه فان

$$y'' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x} \bar{F}_{y'y'} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x} \cdot F_{y'y'}$$

موجوده .

وحيث ان $F_{y'y'} \neq 0$ و $F_y - F_{xy} - F_{yy'} \cdot y' - F_{y'y} \cdot y'' = 0$

إذاً $y'' = \frac{F_y - F_{xy} - F_{yy'} \cdot y'}{F_{y'y}}$ وهي داله متصله لكل النقاط (x, y) .

□

تمارين

(١) اثبت ان $J[y(x)] = \int_0^1 (\sin x) y^3(x) dx$ دالي متصل في D_1

(٢) اثبت ان $J[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$ دالي غير خطي في الفضاء ℓ

(٣) اثبت ان كلاً مما يأتي دالي خطي

$$J[f(x)] = \int_a^b f(x) dx \quad (أ)$$

$$L[y(x)] = \int_a^b [p(x)y(x) + q(x)y'(x)] dx \quad (ب)$$

(٤) هل ان $J[y(x)]$ دالي خطي في D_1 عندما

$$J[y(x)] = \int_0^1 x^2 y(x) dx \quad (أ)$$

$$J[y(x)] = \int_0^1 x^2 y^2(x) dx \quad (ب)$$

$$J[y(x)] = \int_{\frac{1}{2}}^1 (\sin x) y(x) dx \quad (ج)$$

(٥) احسب $\delta J[y, \Delta y]$ عندما

$$J(y) = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (أ)$$

$$J(y) = \int_a^b x^2 (y')^2 dx \quad (ب)$$

(٦) ادرس الداليات الآتية من حيث وجود منحنيات القيم القصوى

$$y(1) = 1 , y(0) = 0 , J(y) = \int_0^1 x y y' dx \quad (1)$$

$$y(1) = 2 , y(0) = 1 , J(y) = \int_0^1 (xy + y^2 - 2y^2 y') dx \quad (ب)$$

$$J(y) = \int_a^b (y^2 - y'^2 - 2y \sin x) dx \quad (ج)$$

$$J(y) = \int_a^b (y^2 - y'^2 - 2y \cosh x) dx \quad (د)$$

$$y(3) = 2 , y(1) = 1 , J(y) = \int_1^3 (x^2 y'^2 - yy') dx \quad (هـ)$$

$$y(1) = 0 , y(0) = 0 , J(y) = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} y'^2 + y' + yy' + y \right] dx \quad (و)$$

(٧) اوجد الحل العام لمعادلة أويلر لاگرانج ، بالنسبة للدالي

$$J(y) = \int_a^b f(x) (1 + y'^2)^{1/2} dx$$

ثم حدد ذلك الحل عندما

$$f(x) = x \quad (ب) \quad f(x) = x^{1/2} \quad (i)$$

(٨) اوجد القيم القصوى للدالي

$$J(y) = \int \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{1 + y'^2} dx$$

ملاحظه : استخدم الإحداثيات القطبية .

(٩) اوجد معادله اقصر منحنى يصل بين النقطتين (x_0, y_0, z_0) ،

(x_1, y_1, z_1) الواقعتين على الأسطوانه الدائريه القائمه

$$z = z(0) , y = a \sin \vartheta , x = a \cos \vartheta$$

$$F = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\vartheta}\right)^2} \quad \text{لاحظ ان}$$

الفصل الثاني

مسائل التغيرات بنقط اطراف ثابتة

يضم هذا الفصل اربعة بنود ، تناولنا في الأول منها بعض الحالات الخاصة من معادلات اويلر - لاجرانج وتكاملاتها ، اما في البند الثاني فقد درسنا الداليات متعددة المتغيرات اضافة الى الشكل القانوني لمعادلات اويلر - لاجرانج ، وقاعدة هاملتون وبعض تطبيقاتها ، وتناولنا في البند الثالث الداليات التي تعتمد على مشتقات ذات رتب عليا والحصول على ما يسمى معادله اويلر - بواسون اما البند الرابع فقد خصص لدراسة الداليات بشروط اضافيه وبعض تطبيقاتها .

٢-١: حالات خاصة من معادلة اويلر - لاجرانج

يضم هذا الجزء خمس حالات خاصة من معادلة اويلر - لاجرانج وبعض تطبيقاتها الهندسيه والفيزيائيه

٢-١-١: اذا كانت F لاتعتمد على y' :

في هذه الحالة تكون $F = F(x, y(x))$ ، وعليه فان معادلة اويلر هي $F_y(x, y) = 0$ ، وحل هذه المعادله لايحوي أي ثوابت اختياريه وبالتالي فإنه لايحقق الشروط الحديه $y(a) = y_0$ ، $y(b) = y_1$ ومن ثم لايوجد حل لمسألة التغيرات هذه الا عندما يمر المنحنى $F_y(x, y) = 0$ بالنقاط الحديه (a, y_0) ، (b, y_1) ، فيكون للدالي قيم قصوى على ذلك المنحنى .

مثال ٢-١-٢ :

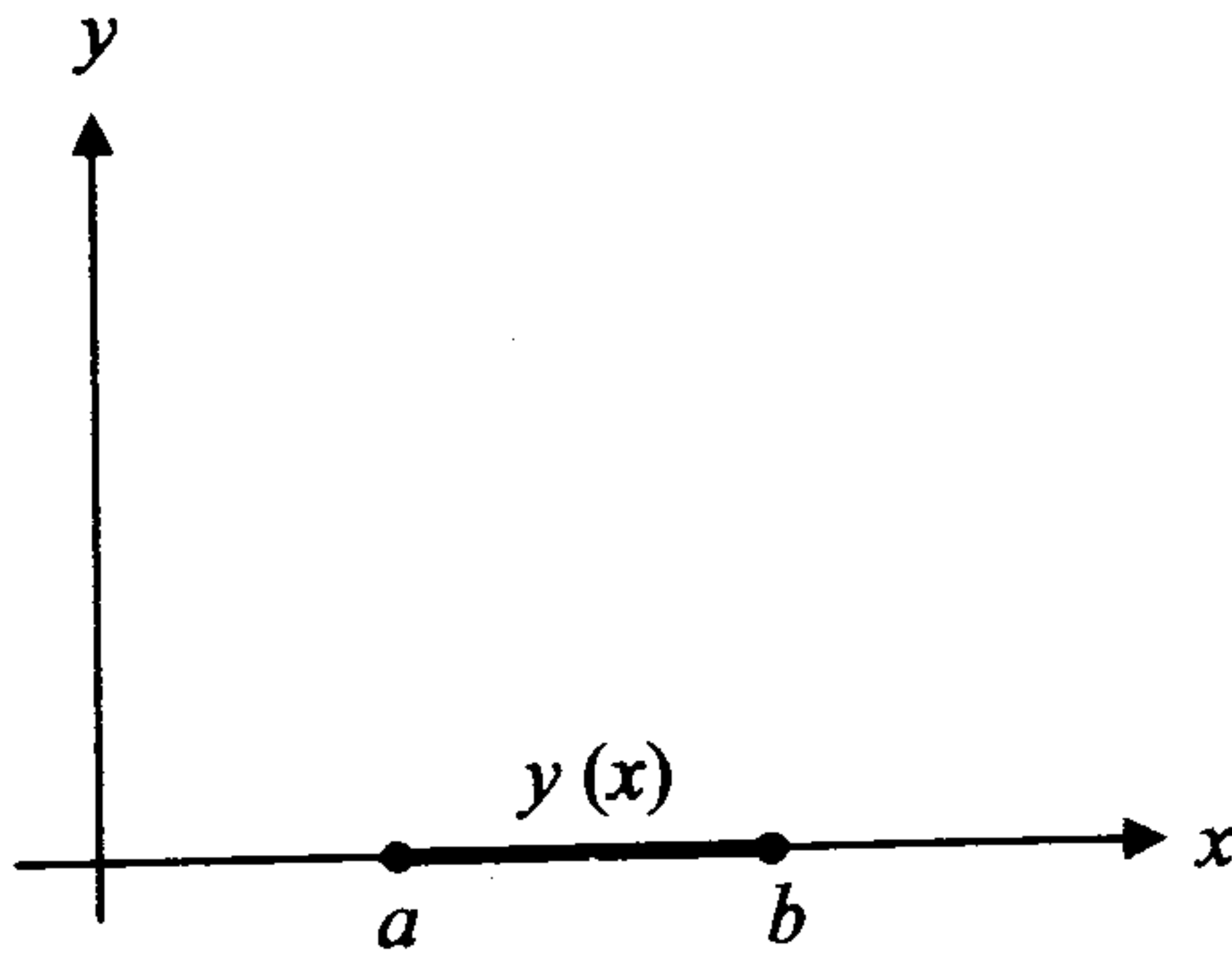
ليكن $J[y] = \int_a^b (x - y)^2 dx$. إذا $F(x, y) = (x - y)^2$ وعليه فإن $F_y = 0$

وبالتالي فإن $y = x$. لاحظ ان $J(y) = 0$ لكل نقطة من نقاط المستقيم $y = x$.

مثال ٢- ١- ٢ :

اذا كان $J[y] = \int_a^b y^2 dx$ ، $y(a) = y_0$ ، $y(b) = y_1$. فإن معادلة اويلر .

لاجرانج هي $F_y = 0$ وعليه فإن $y(x) = 0$ ، وبالتالي فإن منحنى القيم القصوى يمر بنقط الحدود عندما $y_0 = 0$ ، $y_1 = 0$ انظر الشكل (٢- ١)



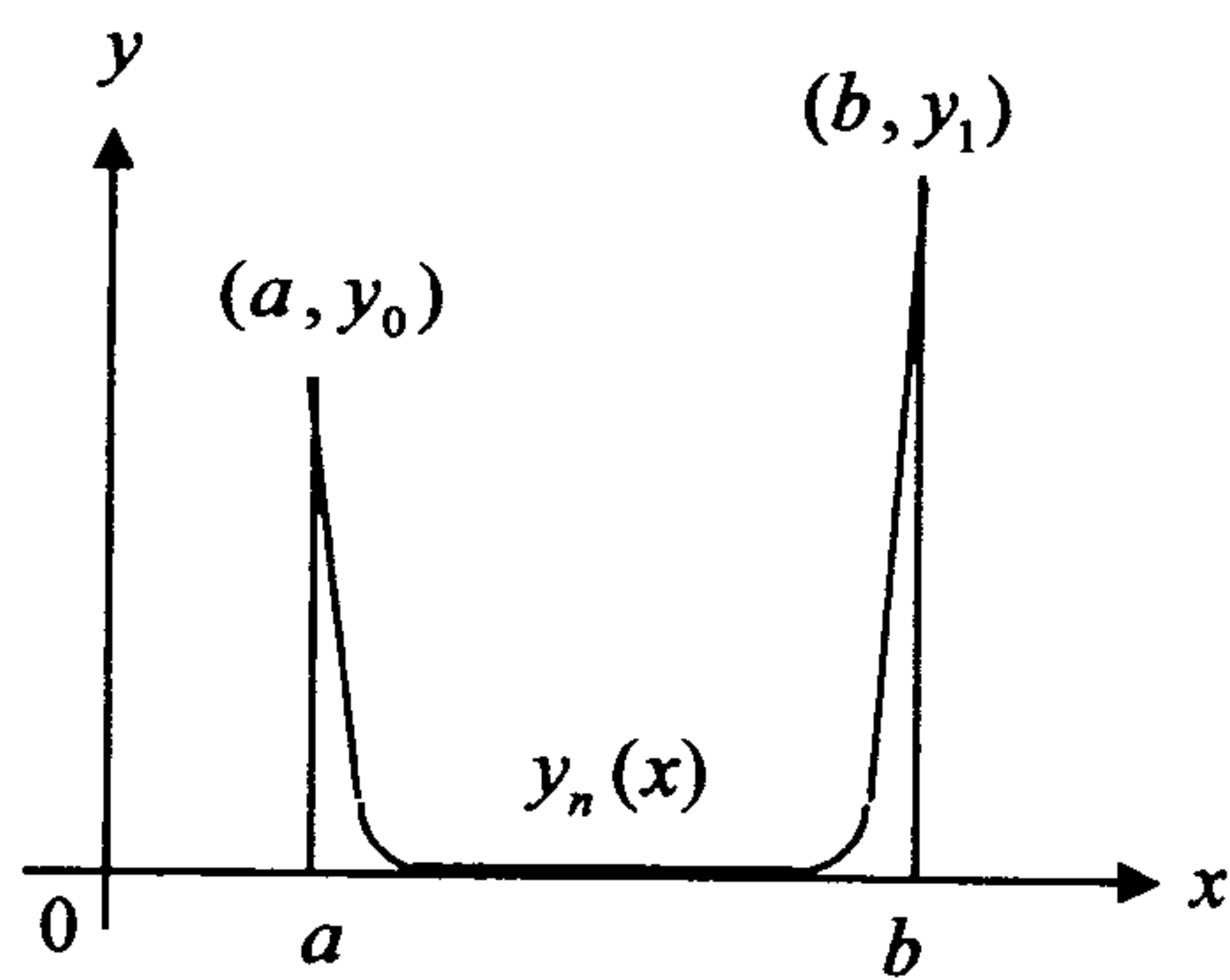
شكل (٢- ١)

اذا كان $y_0 = 0$ ، $y_1 = 0$ فإن الدالة $y(x) = 0$ تعطي قيمة صغرى للدالي

$$J[y(x)] = \int_a^b y^2 dx$$

$J[y(x)] \geq 0$ و $J(y) = 0$ عندما $y(x) = 0$.

ولكن اذا كان على الأقل احدي النقط y_0 ، y_1 لاتساوي صفر فإن الدالي لا يحصل على قيمه الصغرى على دوال متصله . حيث انه من الممكن اختيار متتابعة من الدوال المتصلة $y_n(x)$ والتي رسمها يتكون من أقواس لمنحنى يبدأ من النقطة (a, y_0) ثم يتجه الى محور x ثم يأخذ جزء من محور x ينطبق تقريبا مع الفترة (a, b) وأخيرا جزء من المنحنى القريب من b ويرتفع الى النقطة (b, y_1) انظر الشكل (٢- ٢) .

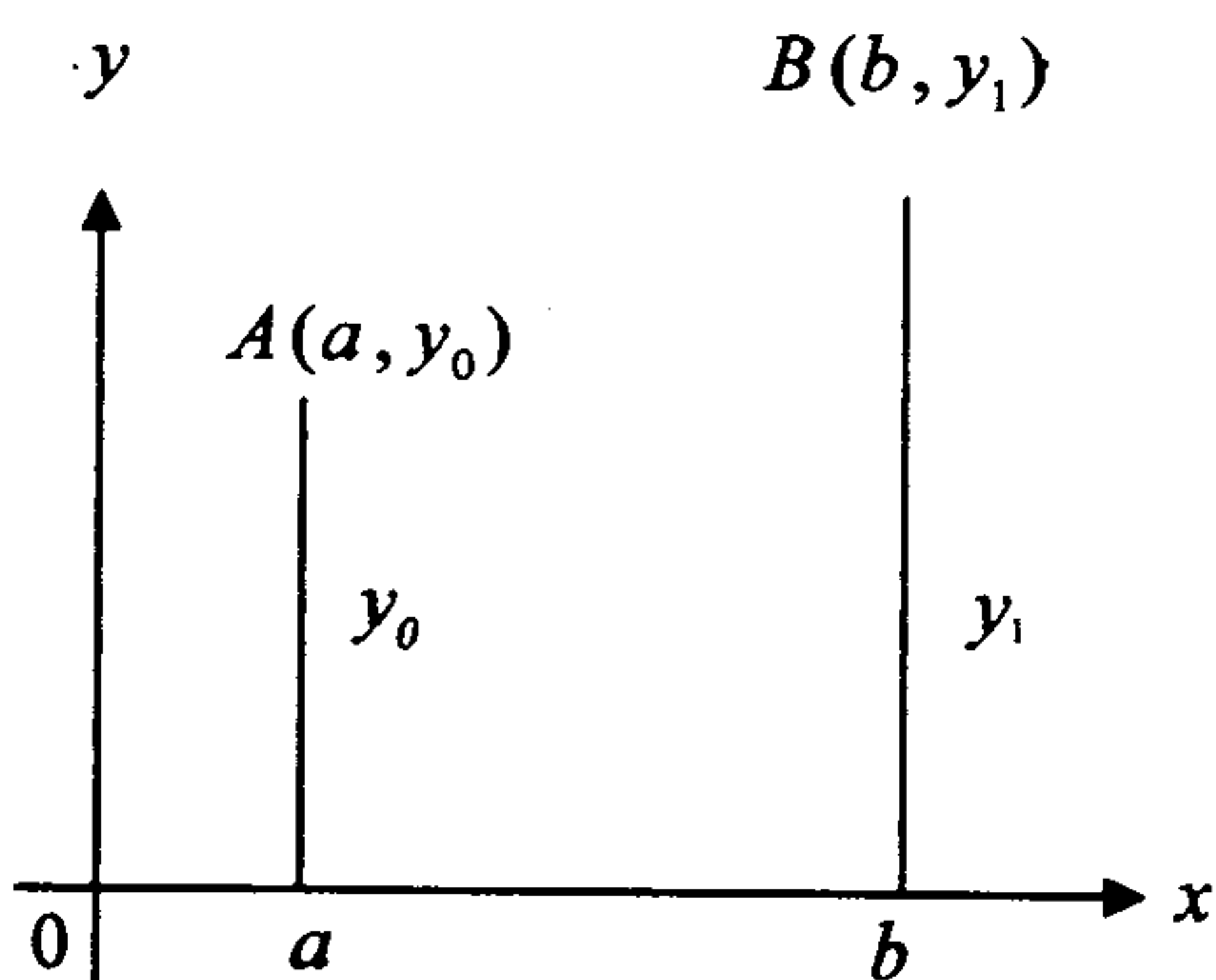


شكل (٢-٢)

واضح ان قيم الدالي على المتتابعة $y = y_n(x)$ تكون مختلفة قليلا عن الصفر. ومن ثم فإن أصغر حد لقيم الدالي يكون صفرا ولا يمكن الحصول على هذا الحد على منحنى متصل حيث انه لأي منحنى متصل $y(x) \neq 0$ فإن $\int_a^b y^2 dx > 0$ ولكن هذا الحد الأصغر لقيم الدالي يمكن الحصول عليه من

الدالة غير المتصلة الآتية، انظر الشكل (٢-٣)

$$\begin{aligned} y(a) &= y_0, \\ y(x) &= 0, \quad a < x < b \\ y(b) &= y_1. \end{aligned}$$



شكل (٣-٢)

٢- ١- إذا كانت الدالة F خطية في y'

وفي هذه الحالة نجد ان

$$F(x, y, y') = M(x, y) + N(x, y) \cdot y'$$

$$J[y(x)] = \int_a^b [M(x, y) + N(x, y) \cdot y'] dx \quad \text{وعليه فإن}$$

وبالتالي فإن معادلة اويلر $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$ تكون على الصورة :

$$\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y} \cdot y' - \frac{dN}{dx} = 0$$

لكن

$$\frac{dN}{dx} = \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \cdot y'$$

إذا

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0 \quad \dots (1)$$

وكما سبق فإن هذه المعادلة ليست معادلة تفاضلية والمنحنى

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

لا يحقق الشروط الحدية وبالتالي فإن .

مسألة التغيرات في هذه الحالة ليس لها حل في مجموعة الدوال المتصلة .

ولكن إذا كان $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ فإن $M dx + N dy$ معادله تفاضلية تامة ويكون :

$$\begin{aligned} J[y(x)] &= \int_a^b \left(M + N \frac{dy}{dx} \right) dx \\ &= \int_a^b (M dx + N dy) \end{aligned}$$

لا يعتمد على مسار التكامل وتكون قيمه الدالي ثابتة على كل المنحنيات

نسمح بها . وبالتالي تكون مسألة التغيرات هنا ليس لها معنى .

مثال ٢- ١- ٣:

ليكن $J[y(x)] = \int_0^1 (y^2 + x^2 y') dx$ ، حيث $y(1) = a$ ، $y(0) = 0$

$$F(x, y, y') = M + N \cdot y' \quad \text{إذا}$$

وعليه فإن معادلة اويلر $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$ تأخذ الشكل $y - x = 0$ ونلاحظ

ان الشرط الحدي الأول $y(0) = 0$ يتحقق . بينما الشرط الثاني $y(1) = a$ يتحقق فقط إذا كانت $a = 1$. ولكن إذا كانت $a \neq 1$ فإنه لا توجد منحنيات قصوى تحقق الشروط الحدية .

مثال ٢- ١- ٤:

ليكن

$$\begin{aligned} J[y(x)] &= \int_a^b (y + x y') dx \\ &= \int_a^b d(x, y) = b y_1 - a y_0 \end{aligned}$$

حيث $y(a) = y_0$ ، $y(b) = y_1$ إذا $\frac{\partial M}{\partial y} = 1$ ، $\frac{\partial N}{\partial y} = 1$

وعليه فإن المكامل $y dx + x dy$ معادله تفاضلية تامة وبالتالي فإن التكامل لا يعتمد على المسار .

$$\begin{aligned} J[y] &= \int_a^b y dx + x dy \\ &= \int_a^b d(x y) = b y_1 - a y_0 \end{aligned}$$

واضح ان قسمة الدالي تعتمد فقط على نقطة البداية والنهاية ولا تعتمد على مسار التكامل أي المنحنى الذي نكامل عليه ومن ثم فإن مسألة التغيرات هنا تصبح لا معنى لها .

٢- ١- إذا كانت الدالة F تعتمد فقط على y' :

وفي هذه الحالة تكون إذاً $F = F(y')$ وتكون معادله أويلر على الشكل

$$F_{y'y'} \cdot y'' = 0 \text{ لأن } F_y = F_{xy} = F_{yy} = 0 \text{ ومن ثم فإن } y'' = 0 \text{ أو } F_{y'y'} = 0.$$

أولاً: إذا كانت $y'' = 0$ فإن $y = C_1x + C_2$ تمثل عائلة من المستقيمات ذات ثابتين.

ثانياً: إذا كان للمعادلة $F_{y'y'}(y') = 0$ جذر حقيقي أو أكثر $y' = k_i$ فإن

$y = k_i x + C$ تمثل عائلة من المستقيمات بثابت واحد وهي محتواه في العائلة

السابقة ذات الثابتين. ولهذا إذا كان $F = F(y')$ فإن المنحنيات القصوى

للدالي تكون خطوط مستقيمة $y = C_1x + C_2$.

مثال ٢- ١- ٥:

أوجد طول اقصر منحن يصل بين النقطتين $(-1, -2)$ ، $(2, 7)$.

الحل

$$\text{بما أن } J[y(x)] = \int_{-1}^2 \sqrt{1+y'^2} dx, y(2) = 7, y(-1) = -2 \text{ إذاً}$$

وعليه فإن معادلة أويلر لاجرانج هي $F_y = \frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0$ ومنها

$$F_y = C, \text{ وبالتالي فإن } \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C, \text{ وعليه فإن } y' = \frac{C}{\sqrt{1-C^2}} = m$$

إذاً $y = mx + b$. لكن $y(-1) = -2$ ، $y(-1) = -2$ إذاً $m = 3$ ، $b = 1$

وعليه فإن اقصر منحنى هو المستقيم $y = 3x + 1$.

٢- ١- ٤: إذا كانت $F = F(x, y')$

وفي هذه الحالة نجد ان معادلة أويلر لاجرانج هي

$$\frac{d}{dx} F_y(x, y') = 0$$

وعليه فإن $F_y(x, y') = C$ وبالتالي فإن $y' = f(x, C)$ ، مما يؤدي إلى

$$y = \int_0^x f(t, c) dt + C_1 .$$

مثال ٢- ١- ٦:

ليكن $J[y] = \int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2 y'^2} dx$ ، $y(1) = 0$ ، $y(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$ ، إذا $F = F(x, y')$

وعليه فإن $F_y = C$ ، لكن $F_y = \frac{x^2 y'}{\sqrt{1+x^2 y'^2}}$ ، إذا $\frac{x^2 y'}{\sqrt{1+x^2 y'^2}} = C$ ، وعليه

فإن $y' = \frac{C}{x \sqrt{x^2 - C^2}}$ وبالتالي فإن $y+k = \cos^{-1}\left(\frac{C}{x}\right)$ ، إذا $x \cos(y+k) = C$

لكن $y(1) = 0$ ، $y(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$ ، إذا $k = \frac{5\pi}{6}$ ، $C = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ ، وعليه فإن

$$x \cos\left(y + \frac{5\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$J(y)$ قيم قصوى عليه .

مثال ٢- ١- ٧:

ليكن $J[y] = \int_1^2 \frac{1}{x} \sqrt{1+y'^2} dx$ ، $y(1) = 0$ ، $y(2) = 1$ ، إذا

$F = F(x, y')$ وعليه فإن معادلة اويلر - لاجرانج تأخذ الشكل $F_y = C$. لكن

$$F_y = \frac{y'}{x \sqrt{1+y'^2}} \quad \text{إذا} \quad \frac{y'}{x \sqrt{1+y'^2}} = C \quad \text{وعليه فإن} \quad y' = \frac{Cx}{\sqrt{1-C^2 x^2}}$$

وبالتالي فإن $y = \int \frac{Cx}{\sqrt{1-C^2 x^2}} dx = \frac{1}{C} \sqrt{1-C^2 x^2} + a$ ، إذا

$$(y-a)^2 + x^2 = \frac{1}{C^2}$$

وهي عائلة دوائر مركزها على محور الصادات ،

لكن $y(1) = 0$ ، $y(2) = 1$ ، إذا $a = 2$ ، $C = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ، وعليه فإن منحنى التوقف هو $(y-2)^2 + x^2 = 5$.

٢- ١- ٥ إذا كانت $F = F(y, y')$

وفي هذه الحالة نجد ان $F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) = F_y - F_{y'y'} \cdot y' - F_{y'y''} \cdot y''$ ، وعليه فإن

$$F_y \cdot y' - F_{y'y'} \cdot y'^2 - F_{y'y''} \cdot y'y'' = \frac{d}{dx}(F - y'F_{y'})$$

وبالتالي فإن $F - y'F_{y'} = C$ ، حيث C ثابت ويحل هذه المعادلة بالنسبة الى y' ، واجراء عملية فصل المتغيرات او بعض التعويضات المناسبة نحصل على المنحنى الذي قد يكون للدالي $J[y]$ قيم قصوى عليه .

مثال ٢- ١- ٨ :

اوجد معادله المنحنى المار بالنقطتين (a, A) ، (b, B) ، والذي اذا دار حول محور السينات وُلد سطحاً مساحته اقل ما يمكن .

الحل

بما ان $y(a) = A$ ، $y(b) = B$ ، إذا $S[y(x)] = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1+y'^2} dx$

وعليه فإن $F = F(y, y')$ ، وبالتالي فإن $F - y'F_{y'} = C$ ،

$$y \sqrt{1+y'^2} - y' \cdot \frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} = C \quad \text{وعليه فإن} \quad \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = C$$

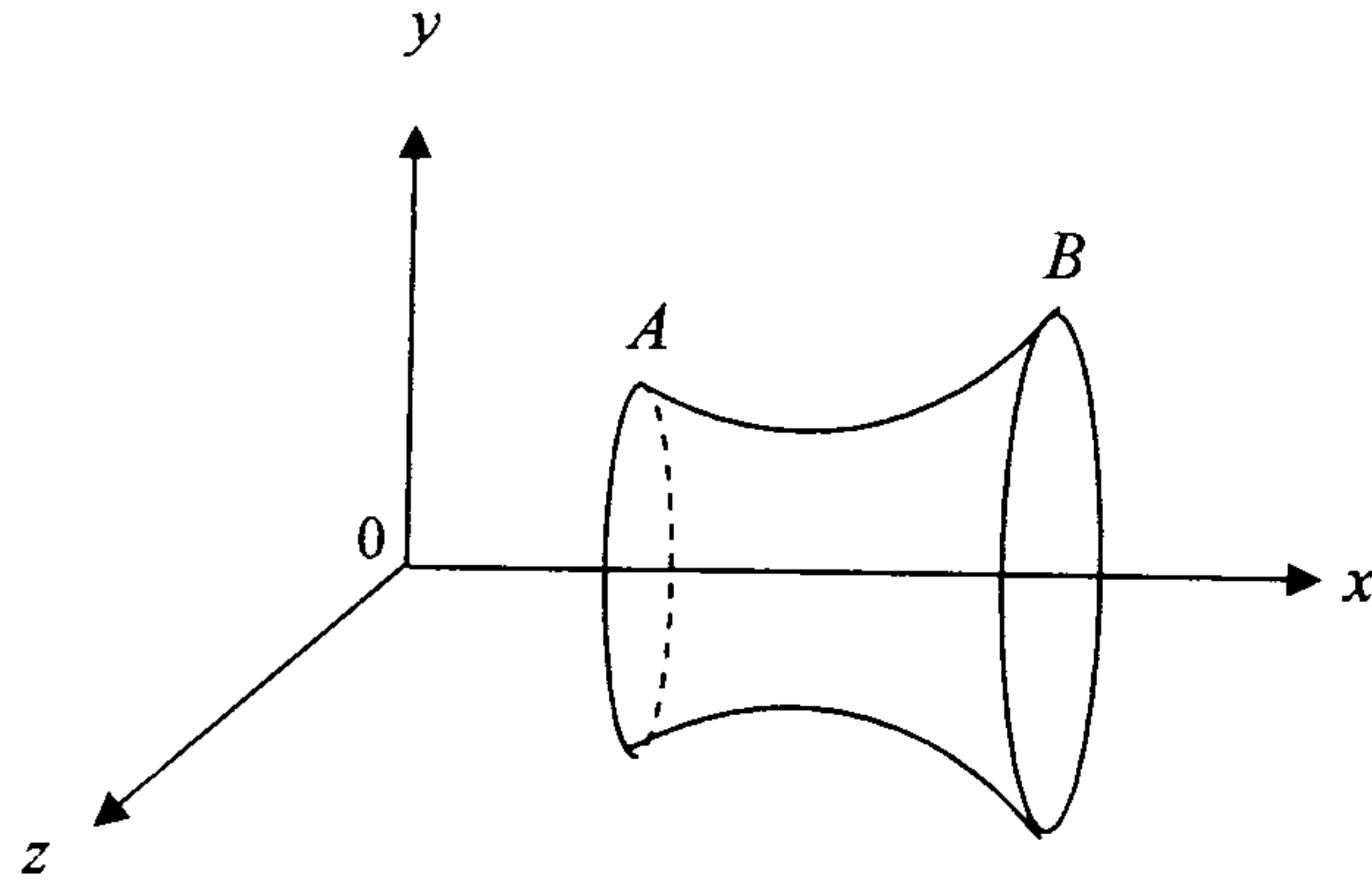
ولحل هذه المعادلة نفرض ان

$$y = C \sqrt{1+y'^2} = C \text{Cosht} \quad \text{إذا} \quad y' = \text{Sinht}$$

$$\text{وحيث ان} \quad y' = \frac{dy}{dx} \quad \text{إذا} \quad dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C \text{Sinht}}{\text{Sinht}} dt = C dt \quad \text{وعليه فإن}$$

$$y = C \cosh\left(\frac{x - C_1}{C}\right) \text{ وبالتالي فإن } t = \frac{x - C_1}{C} \text{ إذا } x = Ct + C_1$$

وهذه المعادلة تمثل عائلة من منحنيات السلسلة (الكاتينة) ودورانها يعطي سطوح
يسمى كل منها سطح سلسلي الشكل أو كاتينة (Catenoid) والثابتان
 C_2, C_1 يمكن تعيينهما طبقاً للشروط الحدية والتي تعتمد على موضع النقط A
, B . انظر الشكل (٢-٤)



شكل (٢-٤)

مثال ٢- ١- ٩: "مسألة منحنى اقصر زمن"

وهي مسألة ايجاد منحنى الذي اذا انزلق عليه جسم كتلته m بدون احتكاك من
 $A(0, 0)$, $B(b, y_1)$ استغرق اقل زمن ممكن. ولإيجاد ذلك المنحنى
لاحظ ان عند أي اية لحظة واي نقطه (x, y) نجد ان الطاقه الحركيه
للجسم تساوي الطاقه الكامنه له، وهذا يعني ان

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}, \quad v = \frac{ds}{dt} \text{ لكن } v = \sqrt{2gy} \text{ وعليه فإن } \frac{1}{2}mv^2 = mgy$$

$$\text{إذا } \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy} \text{ وبالتالي فإن } dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}}$$

إذا

$$y(b) = B, y(0) = 0, \quad t[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} dx$$

وعليه فإن $1+y'^2 = \frac{1}{Cy}$ وهذا يعني ان $y' = \sqrt{\frac{1-Cy}{Cy}}$ ومنها نجد ان

$$1-2Cy = \cos \vartheta \quad \text{والآن افرض ان} \quad dx = \sqrt{\frac{Cy}{1-Cy}} dy \quad \text{إذا} \quad dx = \sqrt{\frac{Cy}{1-Cy}} dy$$

$$\text{نجد ان} \quad dy = \frac{1}{2C} \sin \vartheta d\vartheta, \quad Cy = \frac{1-\cos \vartheta}{2} \quad \text{وعليه فإن}$$

$$x = \frac{1}{2C} \int \sqrt{\frac{1-\cos \vartheta}{1+\cos \vartheta}} \cdot \sin \vartheta d\vartheta = \frac{1}{2C} \int \sqrt{\frac{1-\cos \vartheta}{1+\cos \vartheta}} \cdot \frac{1-\cos \vartheta}{1-\cos \vartheta} \cdot \sin \vartheta d\vartheta$$

$$= \frac{1}{2C} \int (1-\cos \vartheta) d\vartheta = \frac{1}{2C} (\vartheta - \sin \vartheta) + C_2$$

$$\text{وعليه فإن} \quad x = \frac{1}{2C} \cos^{-1}(1-2cy) - \sqrt{\frac{y}{C} - y^2} + c_2 \quad \text{لكن} \quad y(0) = 0$$

$$\text{إذا} \quad C_2 = 0 \quad \text{وعليه فإن} \quad x = \frac{1}{2C} \cos^{-1}(1-2cy) - \sqrt{\frac{y}{C} - y^2} \quad \text{وهي معادله}$$

$$\text{(Cycloid)} \quad \text{لأن} \quad y = \frac{1}{2C} (\vartheta - \cos \vartheta), \quad x = \frac{1}{2C} (\vartheta - \sin \vartheta) \quad \text{تمثلان}$$

معادلة (Cycloid).

٢-٢: داليات عديدة المتغيرات

يقيم هذا الجزء الشروط الضرورية لوجود منحنيات حرجه (توقف)

بالنسبة للداليات من الشكل $J[y_1(x), \dots, y_n(x)]$ اضافة الى الشكل القانوني

لمعادلات اويلر. لاجرانج وبعض التطبيقات الهندسية والفيزيائية وخاصة قاعدة

هاملتون ومعادلات لاجرانج.

٢- ١- ٢ : معادلات اويلر - لاجرانج للداليات المعتمدة على n من المتغيرات .

ليكن

$$y_i(b) = B_i, y_i(a) = A_i, J[y_1(x), \dots, y_n(x)] = \int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') dx$$

$$. [a, b] \text{ دوال متصله على } \frac{\partial F}{\partial y_i'}, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y_i}, y_i(x) \in D_1$$

لأيجاد الشروط الضرورية لوجود منحنيات توقف (حرجه) قد يكون للدالي J قيم قصوى عندها ، لاحظ ان

$$\begin{aligned} \delta J[y_1, \dots, y_n] &= \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} J(y_1 + \varepsilon \Delta y_1, \dots, y_n + \varepsilon \Delta y_n, y_1' + \varepsilon \Delta y_1', \dots, y_n' + \varepsilon \Delta y_n') \right|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b F(x, y_1 + \varepsilon \Delta y_1, \dots, y_n + \varepsilon \Delta y_n, y_1' + \varepsilon \Delta y_1', \dots, y_n' + \varepsilon \Delta y_n') dx \\ &= \int_a^b \frac{d}{d\varepsilon} F(x, y_1 + \varepsilon \Delta y_1, \dots, y_n + \varepsilon \Delta y_n, y_1' + \varepsilon \Delta y_1', \dots, y_n' + \varepsilon \Delta y_n') dx \\ &= \int_a^b \left[\sum \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} \cdot \Delta y_i + \frac{\partial F}{\partial y_i'} \cdot \Delta y_i' \right) \right] dx \end{aligned}$$

لكن Δy_i ، $i = 1, \dots, n$ دوال مستقلة $\Delta y_i(a) = \Delta y_i(b) = 0$ ، اذا يمكن اختيار أي واحد منها وجعل الباقي صفراً ، وعليه اذا كان $\delta J = 0$ ، فإن

$$\int_a^b (F_{y_i} \Delta y_i + F_{y_i'} \Delta y_i') dx = 0$$

لكن $\frac{d}{dx} (F_{y_i'}) = F_{y_i}$ اذا $[a, b]$ دوال متصله على F_{y_i} ، $F_{y_i'}$ ، $\Delta y_i(x) \in D_1$ حسب قضيه (١- ١- ٤) . وعليه فإن $F_{y_i} - \frac{d}{dx} (F_{y_i'}) = 0$ ، لكل $i = 1, \dots, n$ ،

هي معادلات اويلر - لاجرانج ، وهي الشرط الضروري لوجود منحنيات حرجه للدالي J وهي n من المعادلات التفاضليه من الرتبة الثانيه حلها يعطي عائله من المنحنيات ذات $2n$ من الثوابت في فضاء بعده $(n + 1)$ ، قد يكون للدالي J قيم قصوى عليها .

مثال ٢- ٢- ١

اوجد منحنيات التوقف ، التي قد يكون للدالي

$$J[y, z] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 + z'^2 + 2yz) dx$$

$$. \text{حيث } J(0) = z(0) = 0, \text{ قيماً قصوى عليها } , z(\frac{\pi}{2}) = -1, y(\frac{\pi}{2}) = 1$$

الحل

بما ان $F_z - \frac{d}{dx}(F_{z'}) = 0$ ، $F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0$ ، $F = y'^2 + z'^2 + 2yz$
اذاً $y'' - z = 0$ و $z'' - y = 0$ وعليه فإن $y^{(4)} - y = 0$ وحل هذه
المعادلة التفاضليه هو $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$
وحيث ان $y'' = z$ اذاً $z = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x$
ولتعيين الثوابت C_1, C_2, C_3, C_4 نستخدم الشروط الحدية فنجد ان
 $C_1 = C_2 = C_3 = 0, C_4 = 1$ ، وعليه فإن منحنيات التوقف للدالي $J(y, z)$ هي
 $y(x) = \sin x, z(x) = -\sin x$

مثال ٢- ٢- ٢

اوجد منحنيات التوقف للدالي

$$J[y, z] = \int_a^b F(y' + z') dx$$

الحل

بما ان معادلتى اويلر. لاجرانج هما

$$F_{y'y'} \cdot y'' + F_{y'z'} \cdot z'' = 0 \quad \dots (1)$$

$$F_{y'z'} \cdot y'' + F_{z'z'} \cdot z'' = 0 \quad \dots (2)$$

اذاً بضرب المعادلة (1) في $F_{z'z'}$ والمعادلة (2) في $F_{y'y'}$ ثم الطرح نحصل على

$$\left[F_{yy} F_{zz} - (F_{yz})^2 \right] \cdot y'' = 0$$

ويفرض ان $F_{yy} F_{zz} - (F_{yz})^2 \neq 0$ ، اذا $y'' \neq 0$ ، وعليه فإن $y = C_1 x + C_2$ وبالمثل نجد ان $z'' = 0$ ومنه نجد ان $z = C_3 x + C_4$ ، ومن ثم فإن $z(x)$ و $y(x)$ تمثل عائله من الخطوط المستقيمه حيث C_1, C_2, C_3, C_4 ثوابت اختياريه يمكن تعيينها من الشروط الحديه .

وكحاله خاصه من (٢- ٢- ٢) نجد ان "منحني اقصر مسافه بين النقطتين

$$J[y(x), z(x)] = \int_0^1 \sqrt{1+y'^2} z'^2 dx$$

في R^3 ، تتحدد بجعل قيمه $(1, 0, -1), (0, 1, 0)$ ، اقل ما يمكن ، هما المستقيمان

$z = C_3 x + C_4$ ، $y = C_1 x + C_2$ ، وباستخدام الشروط الحديه نجد ان

$$z = -2x + 1, y = -x + 1 \text{ ، وعليه فإن } C_1 = -1, C_2 = 1, C_3 = -2, C_4 = 1$$

مثال ٢- ٢- ٣

اوجد منحني التوقف للدالي

$$J[y(x), z(x)] = \int_a^b (-2y^2 + 2yz - y'^2 + z'^2) dx$$

حيث $y(b) = b_1, z(b) = b_2, y(a) = a_1, z(a) = a_2$

الحل

بما ان معادلات اويلر- لاجرانج هي

$$F_y - \frac{d}{dx} (F_{y'}) = 0 \Rightarrow y'' - 2y + z = 0$$

$$F_z - \frac{d}{dx} (F_{z'}) = 0 \Rightarrow y - z'' = 0$$

اذاً $z^{(4)} - 2z^{(2)} + z = 0$ ، وعليه اذا كان $u(x) = z^{(2)} - z$ ، فإن

$u^{(2)} - u = 0$ وبالتالي فإن $u(x) = Ae^x + Be^{-x}$ ، وعليه فإن

$z^{(2)} - z = Ae^x + Be^{-x} = 0$ ، فاذا كان $u(x) = Ae^x + Be^{-x} = 0$

فإن استخدام $z = Ce^x + De^{-x}$ ، فإن $z^{(2)} - z = 0$ ، فإن استخدام طريقة تغيير الوسيط (Method of Variation of Parameters) لحل المعادله التفاضليه $z^{(2)} - z = Ae^x + Be^{-x}$ يمكننا من اثبات ان

$$z(x) = C(x)e^x + D(x)e^{-x} \\ = \left(C_0 - \frac{A}{4}\right)e^x + \left(D_0 - \frac{B}{4}\right)e^{-x} + \frac{x}{2}(Ae^x - Be^{-x})$$

وعليه فإن

$$y(x) = \left(C_0 + \frac{3}{4}A\right)e^x + \left(D_0 + \frac{3}{4}B\right)e^{-x} + \frac{x}{2}(Ae^x - Be^{-x})$$

وباستخدام الشروط الحديه يمكننا ايجاد C_0 , D_0 , A , B .

٢- ٢- ٢ معادلات اويلر. لاجرانج القانونيه

(Canonical Euler - Lagrange Equations)

ليكن

$$J[y_1, \dots, y_n] = \int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') dx \quad \dots (1)$$

إذا نعادلات اويلر- لاجرانج هي

$$i = 1, \dots, n \quad , \quad F_{y_i} - \frac{d}{dx}(F_{y_i'}) = 0 \quad \dots (2)$$

وهي مجموعه مكونه من n من المعادلات التفاضليه من الرتبه الثانيه ، حلها يعطي منحنيات التوقف او المنحنيات الحرجه التي قد يكون للدالي J قيم قصوى عليها ولتسهيل حل تلك المعادلات بالتعبير عنها كنظام مكون من $(2n)$ من المعادلات ذات الرتبه الأولى دون التأثير على طبيعة المسائل او المشاكل التي تعالجها ، نفرض ان

$$i = 1, \dots, n \quad , \quad P_i = F_{y_i'} \quad \dots (3)$$

يطلق على P_i المتغير المرافق للمتغير y_i ، ولنفرض انه يمكن حل المعادله (3)

والتعبير عن y'_i بدلالة P_i ، y_i ، x ومن ثم يمكن تعريف داله جديده H ، تسمى داله هاملتون (The Hamiltonian) ترافق (1) حيث

$$H(x, y_1, \dots, y_n, P_1, P_2, \dots, P_n) = \sum_{i=1}^n P_i y'_i - F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n)$$

لكن

$$\begin{aligned} dH &= \sum_{i=1}^n (P_i y'_i + y'_i dP_i) - F_x dx - \sum_{i=1}^n (F_{y_i} dy_i + F_{y'_i} dy'_i) \\ &= -F_x dx + \sum_{i=1}^n (y'_i dP_i - F_{y_i} dy_i) \end{aligned}$$

إذا

$$-F_{y_i} = \frac{\partial H}{\partial y_i} \quad , \quad y'_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}$$

وعليه فإن

$$i = 1, \dots, n \quad \text{لكل} \quad , \quad \frac{-dP_i}{dx} = H_{y_i} \quad , \quad y'_i = H_{P_i} \quad \dots \quad (4)$$

وهي نظام كون من $(2n)$ من المعادلات التفاضليه من الرتبه الاولى ، يطلق عليها معادلات اويلر . لاجرانج القانونيه المصاحبه للدالي $J[y_1, \dots, y_n]$ ، وبحل تلك المعادلات باستخدام الجبر الخطي او غيرها من الطرق نحصل على منحنيات التوقف للدالي J

مثال ٢- ٢- ٤

ليكن $J[y(x)] = \int_a^b (y'^2 + y^2) dx$ ، إذا $F = F(y, y') = y'^2 + y^2$ ، وعليه فإن

معادله اويلر . لاجرانج هي $y'' - y = 0 \Rightarrow F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0$ وهي معادله

تفاضليه من الرتبه الثانيه حلها العام هو $y(x) = Ae^x + Be^{-x}$ ولايجاد معادلات اويلر - لاجرانج القانونيه للدالي $J[y]$ نفرض ان $P = F_{y'}$ إذا

$$P = 2y'$$

$$H(x, y, P) = P_y - F(y, y') = \frac{P^2}{4} - y^2$$

$$\frac{-dP}{dx} = H_y = -2y, \quad y' = H_p = \frac{P}{2} \quad \text{وبالتالي فإن}$$

إذاً معادلات اويلر- لاجرانج القانونيه المصاحبه للدالي $J[y]$ هي

$$P' = 2y, \quad y' = H_p = \frac{P}{2}$$

وهما معادلتين تفاضليتين من الرتبه الاولى، ولحل هذا النظام لاحظ ان

$$P' = 2y \Rightarrow P' = 0.P + 1.P'$$

$$(P')' = 2y' \Rightarrow P = 1.P + 0.P'$$

وعليه فإن $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ، ولحساب القيم الذاتية للمصفوف A ، لاحظ ان

$\det(A - \lambda I) = 0$ يعني ان $\lambda^2 - 1 = 0$ ، وعليه فإن القيم الذاتية هي

$\lambda = \pm 1$ وعندما $\lambda = 1$ نجد ان المتجه الذاتي المصاحب لها هو $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ،

اما المتجه الثاني المصاحب للمتجهات الذاتية $\lambda = -1$ فهو $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

وعليه

$$\begin{pmatrix} P' \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^x + C_2 e^{-x} \\ C_1 e^x - C_2 e^{-x} \end{pmatrix}$$

حل لمعادلات اويلر- لاجرانج القانونيه ، لكن $P' = 2y$ ، اذاً

$$y = \frac{1}{2}C_1 e^x + \frac{1}{2}C_2 e^{-x} = Ae^x + Be^{-x}$$

حل لمعادله اويلر- لاجرانج .

٢- ٣- قاعدة هاميلتون (Hamilton's Principle)

يعود ما يسمى الميكانيك الكلاسيكي او قوانين الحركة الى كل من ابن سينا بوهبة الله بن ملكا البغدادي وغاليلو ، ثم طور من قبل نيوتن ، هيجنز ، لايبنز ، جيمس برنولي و اويلر معبرين عن الحركة الموجوده في الكون بدلاله متجهات كالقوى والتسارع ، وقد نشر نيوتن القانون الثاني للحركة عام ١٦٨٧م معبراً عنه بالكلمات فقط ، اما التعبير عن ذلك القانون بدلالة الاحداثيات المتعامده فقد ظهر عند جيمس برنولي عام ١٧٤٢م ، وفي عام ١٧٤٤م ، اثبت اويلر امكانية الحصول على قوانين نيوتن من قاعده اقل فعل ممكن (principle of least action) ، وفي عام ١٧٨٨م بين لاجرانج ان قسماً كبيراً مما يسمى الميكانيك الكلاسيكي (قوانين الحركة) يمكن الحصول عليها من تلك القاعده عندما يكون مجال القوى محافظاً ، وفي عام ١٨٣٥م بين هاميلتون (١٨٠٥م - ١٨٦٥م) امكانية توسعة قاعدة اقل فعل ممكن - لتشمل مجال القوى المحافظه وغير المحافظه - الى ما يسمى الان قاعده هاميلتون معتمداً مفهوم الطاقه الحركيه والطاقه الكامنه (طاقه الوضع) ، وما يهمننا في هذا الجزء تعريف القاريء بتلك القاعده وبعض تطبيقاتها .

والآن، إذا كان S نظاماً دايناميكياً (ميكانيكياً) منتهياً ، فيقال بأن لذلك النظام n درجه حريه (degree of freedom) ، اذا امكن تحديد اتجاه جسيمات S بـ n من الاحداثيات المستقله q_1, q_2, \dots, q_n ، لاحظ انه اذا كان $|S| = 1$ ، فإن $n = 3$ حيث q_1, q_2, q_3 تمثل الأحدثيات المتعامده او الأحداثيات الكروييه . اما اذا كان $|S| = 2$ وكان البعد بين الجسمين وحده واحده ، فإن $n = 5$ حيث q_1, q_2, q_3 تمثل اتجاه او وضع الجسم الاول ، اما q_4, q_5 فتحدد اتجاه الخط الواصل بين الجسمين .

وحيث انه يمكن وصف النظام الديناميكي بدلاله طاقته الحركيه T وطاقته

الكامنه (طاقه الوضع) V اذا كان النظام محافظاً ، فان طاقته الكامنه لاتعتمد على الزمن وعليه فإن

$$T(q_1, \dots, q_n, q'_1, \dots, q'_n) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} q'_i q'_k$$

$$q'_i = \frac{dq_i}{dt} \quad , \quad a_{ik} = a_{ki} \quad \text{حيث}$$

فإذا كان $L = T - V$ ، والذي يسمى دالة لاجرانج للنظام S ، فإن

$$L = F(t, q_1, \dots, q_n, q'_1, \dots, q'_n)$$

ويمكننا ان نثبت ما يلي .

مبرهنه ٢ - ٣ - ١ : (قاعده هاملتون)

يكن وصف حركة نظام دايناميكي مكون من n من الجسومات كتلتها m_i خلال الفتره $[t_0, t_1]$ بالدوال $q(t), q'(t)$ ، $1 < i \leq n$ التي تجعل

$$H = \int_{t_0}^{t_1} L dt \quad \text{اقل ما يمكن .}$$

أي ان حركه أي نظام دايناميكي من شكل الى آخر تتم بحيث يكون للتكامل

$$H = \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt \quad \text{قيمته توقف على منحنى ما من المنحنيات المسموح بها}$$

والتي تمر بنفس نقطتي البدايه والنهايه .

البرهان

سنثبت ان قاعده هاملتون تعطي قوانين الحركه . ولإثبات ذلك لاحظ ان

$$H(q_1, \dots, q_n) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q_1, \dots, q_n, q'_1, \dots, q'_n) dt$$

وعليه فإن معادلات اويلر- لاجرانج للدالي H هي

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i'} \right) = 0$$

$$L = T - V \quad \text{وحيث ان}$$

$$\frac{-\partial V}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} (m_i q_i') = 0 \quad \text{إذا}$$

$$\frac{-\partial V}{\partial q_i} = m_i q_i'' = F_i \quad \text{مما يؤدي الى ان}$$

وهي معادلات نيوتن لنظم مكون من n من الجسيمات .

□

ملاحظه: للتعبير عن قاعده هاملتون بالشكل القانوني ، نترض ان

$$i = 1, \dots, n \quad , \quad P_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

ولنعرف داله هاملتون (The Hamiltonian) كالآتي

$$T(t, q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n) = \sum_{i=1}^n P_i q_i' - L$$

$$I(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^n P_i q_i' - H \right) dt \quad \text{وليكن}$$

$$\delta I = 0 \quad \text{يعني أن معادلات اويلر- لاگرانج القانونية هي} \quad -\frac{dP_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

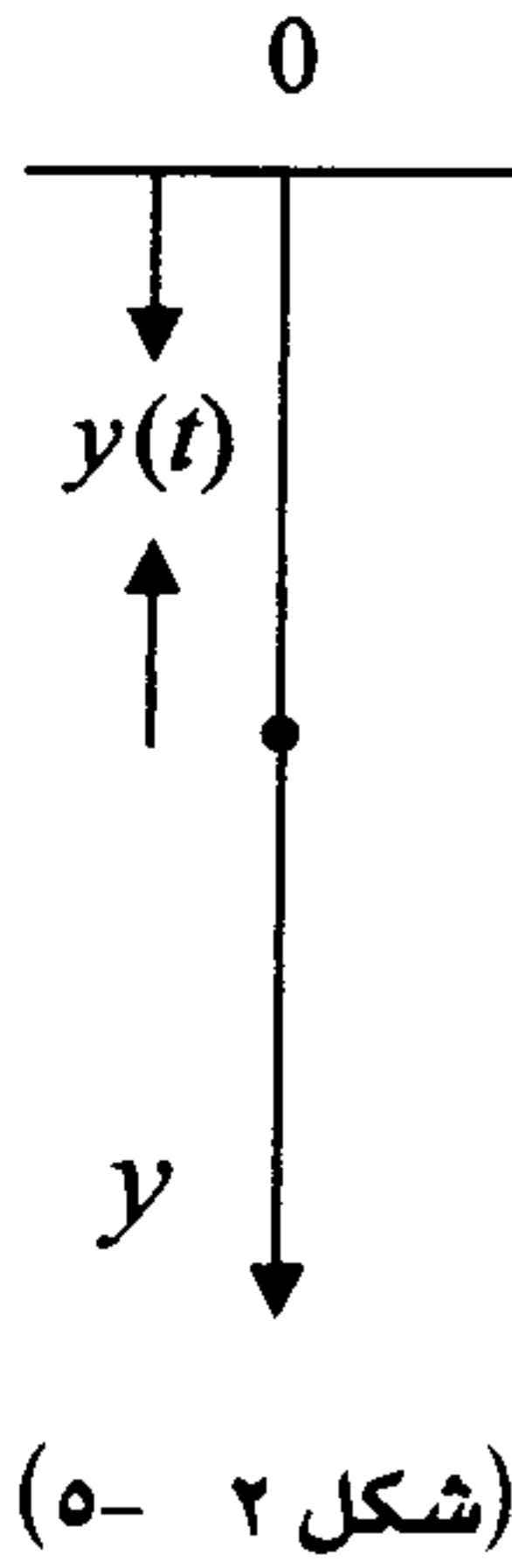
$$\text{و} \quad i = 1, \dots, n \quad , \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_i} \quad \text{وهي مجموعه مكونه من } (2n) \text{ من المعادلات}$$

التفاضلية تعرف في الميكانيك بمعادلات هاملتون القانونيه .

مثال ٢- ٣- ٥:

اوجد معادلة حركة جسيم كتلته m ساقط تحت تأثير الجاذبية الأرضية بغرض إهمال مقاومة الهواء.

الحل



(شكل ٢-٥)

نفرض أن موضع الجسم عند أية لحظة t هو $y(t)$ ، ولنفرض أن نقطة أصل القياس هي نقطة سقوط الجسم

كما هو مبين في شكل (٢-٥). إذاً $T = \frac{1}{2} m y'^2$ ،

حيث $V = -mgy$ ثابت الجاذبية. وعليه فإن

والتي هي $H[y(t)] = \int_0^t [\frac{1}{2} y'^2 + gy] dt$ فإن معادله

اولير-لاجرانج هي $g - \frac{d}{dt}(y') = 0$ ، وعليه فإن

ومنها نجد أن $y'(t) = gt + c_1$ ،

لكن $y(0) = 0$ ، إذاً $y(t) = \frac{1}{2}gt^2 + c_1t$.

مثال ٢-٦:

اوجد باستخدام قاعدة هاملتون، معادلات حركة جسم كتلة m يتحرك بالقرب من الأرض تحت تأثير الجاذبية الأرضية.

الحل

بما أن $V = mgz$ ، $T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (x'^2 + y'^2 + z'^2)$

إذاً $L = \frac{1}{2} m (x'^2 + y'^2 + z'^2 - gz)$

وعليه فإن $H(x, y, z) = \frac{1}{2} m \int_{b_0}^{t_1} (x'^2 + y'^2 + z'^2 - gz) dt$

ومنها نجد أن معادلات اولير-لاجرانج هي

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial x'} \right) = 0 \Rightarrow x'' = 0 \Rightarrow x' = c_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0 \Rightarrow y'' = 0 \Rightarrow y' = c_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial z'} \right) = 0 \Rightarrow z' = 0 \Rightarrow z'' = -g$$

وهذا يعني بأنه تحت تأثير الجاذبية وبالقرب من سطح الأرض تكون السرعة الأفقية ثابتة والسرعة العمودية (-g) .

مثال ٢- ٢- ٧

اوجد معادلات حركة جسيم (بالأحداثيات القطبية) في مجال مركزي للقوى .

الحل

نفرض أن كتله الجسيم هي m ، إذا $v = \frac{ds}{dt}$ ، $ds = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}$ ، وعليه

فإن $v^2 = r'^2 + r^2 \theta'^2$ وبالتالي فإن $T = \frac{1}{2} m(r'^2 + r^2 \theta'^2)$ لكن $L = T - V$ ، إذاً

$$H = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2} m(r'^2 + r^2 \theta'^2) - V(r, \theta) \right] dt ، \text{ وعليه فإن } L = \frac{1}{2} m(r'^2 + r^2 \theta'^2) - V(r, \theta)$$

وعليه فإن معادلات اويلر - لاگرانج هي

$$\frac{-\partial v}{\partial r} + m r \theta' - \frac{d}{dt} (m r') = 0 \quad \dots (1)$$

$$\frac{-\partial v}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} (m r^2 \theta') = 0 \quad \dots (2)$$

وبالتالي فإن

$$m(r'' - r\theta'^2) = -\frac{\partial v}{\partial r} \quad \dots (3)$$

$$m(r^2 \theta'' + 2r r' \theta') = \frac{-\partial v}{\partial \theta} \Rightarrow m(r\theta'' + 2r' \theta') = \frac{-1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \dots (4)$$

لاحظ أن $\frac{-\partial v}{\partial r}$ ، $\frac{-1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$ تمثلان مركبات القوة ($F = ma$) المؤثرة على

الجسيم باتجاه r واتجاه θ وعليه فإن مركبتي التسارع هما $a_r = r'' - r\theta'^2$

والتي تمثل التسارع المركزي $\frac{v^2}{r}$ عندما $v = r\theta$ ، $a_\theta = r\theta'' + 2r'\theta'$ والتي تمثل التسارع المركزي (Coriolis acceleration) .

مثال ٢- ٢- ٨

اوجد معادلات حركة جسيم كتلة m يتحرك في مجال مركزي للقوى بحيث تكون طاقته الكامنة تعتمد على بعده عن المركز .

الحل

$$V = V(r) \therefore T = \frac{1}{2}(r'^2 + r^2\theta'^2) \quad \text{بما أن}$$

$$\therefore L = \frac{1}{2}m(r'^2 + r^2\theta'^2) - V(r) \quad \text{إذاً}$$

وعليه فإن معادلات لاگرانج هي

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial r'} \right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta'} \right) = 0$$

وبالتالي فإن

$$\therefore mr'' - mr\theta'^2 = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad \dots (1)$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\theta') = 0 \Rightarrow r^2\theta' = C \quad \dots (2)$$

وهي قانون كبلر الثاني .

٢- ٣- ٢- ٤ داليات تعتمد على مشتقات ذات رتب عليا

سنركز اهتمامنا في هذا الجزء على دراسة الشروط الضرورية لوجود

منحنيات التوقف لنوعين من الداليات المعتمدة على مشتقات ذات رتب عليا .

٢-٣-١ إذا كان $J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx$ ، حيث $y(x) \in D_n$ ،

$$y(a) = A_0, y'(a) = A_1, \dots, y^{(n-1)}(a) = A_{n-1}$$

$$y(b) = B_0, y'(b) = B_1, \dots, y^{(n-1)}(b) = B_{n-1}$$

فلتحديد الشروط الضرورية لوجود منحنى توقف قد يكون للدالي $J[y(x)]$ قيم

قصوى عليه ، لاحظ أن

$$\begin{aligned} \delta J &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} J(y + \varepsilon \Delta y, y' + \varepsilon \Delta y', \dots, y^{(n)} + \varepsilon \Delta y^{(n)}) \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b F(x, y + \varepsilon \Delta y, y' + \varepsilon \Delta y', \dots, y^{(n)} + \varepsilon \Delta y^{(n)}) dx \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial \varepsilon} F(x, y + \varepsilon \Delta y, y' + \varepsilon \Delta y', \dots, y^{(n)} + \varepsilon \Delta y^{(n)}) dx \\ &= \int_a^b (F_y \Delta y + F_{y'} \Delta y' + \dots + F_{y^{(n)}} \Delta y^{(n)}) dx \end{aligned}$$

فإذا كان $\delta J = 0$ ، فإن

$$\int_a^b (F_y \Delta y + F_{y'} \Delta y' + \dots + F_{y^{(n)}} \Delta y^{(n)}) dx = 0 \quad \dots (1)$$

لكن بتكامل الحد الثاني في (1) بالتجزئة نجد أن

$$\int_a^b F_{y'} \Delta y' dx = [F_{y'} \Delta y]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} F_{y'} \Delta y dx$$

$$\Delta y(a) = \Delta y(b) = 0 \quad \text{لكن}$$

$$\int_a^b F_{y'} \Delta y' dx = - \int_a^b \frac{d}{dx} F_{y'} \Delta y dx \quad \text{إذا}$$

ويتكامل الحد الثالث في (1) بالتجزئة مرتين نجد أن

$$\int_a^b F_{y''} \Delta y'' dx = [F_{y''} \Delta y']_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} F_{y''} \Delta y' dx$$

$$= [F_{y''} \Delta y']_a^b - \left[\frac{d}{dx} F_{y''} \Delta y \right]_a^b = \int_a^b \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} \Delta y dx$$

$$\Delta y'(a) = \Delta y'(b) = 0 \quad , \quad \Delta y(a) = \Delta y(b) = 0 \quad \text{لكن}$$

$$\int_a^b F_y \cdot \Delta y^n dx = \int_a^b \frac{d^2}{dx^2} F_y \cdot \Delta y dx \quad \text{إذاً}$$

ويتكامل الحد الرابع في (1) بالتجزئة ثلاثة مرات والحد الخامس أربعة مرات ، ...
والحد النوني (n - 1) من المرات وتطبيق الشروط الحدية نجد أن (1) تصبح
كالاتي

$$\int_a^b [F_y - \frac{d}{dx} F_y + \frac{d^2}{dx^2} F_y + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}}] \Delta y dx = 0$$

ويتطبيق قضيه (1- 1- 1) ، نجد ان

$$F_y - \frac{d}{dx} F_y + \frac{d^2}{dx^2} F_y + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0$$

وعليه فإن الداله $y(x)$ التي قد يكون للدالي $J[y]$ قيم قصوى عليها يجب ان
تكون حلاً للمعادله التفاضليه الآتية

$$F_y - \frac{d}{dx} F_y + \frac{d^2}{dx^2} F_y + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0$$

وهذه المعادله التفاضليه ذات الرتبه $2n$ تسمى بمعادله اويلر - بواسون .
(Euler-Boisson) وحلها العام يحتوي على $2n$ من الثوابت الاختياريه يمكن
تعينها باستخدام $2n$ من الشروط الحديه الموجوده في بدايه المسأله .

مثال ٢- ٣- ١ :

اوجد منحنيات القيم القصوى للدالي

$$J[y(x)] = \int_0^1 (1 + y'^2) dx$$

بحيث ان $y(0) = 0$ ، $y'(0) = 1$ ، $y(1) = 1$ ، $y'(1) = 1$.

الحل

من الواضح ان معادله اويلر - بواسون هي :

$$y^{(4)} = 0 \text{ ، وعليه فان } \frac{d^2}{dx^2}(2y'') dx = 0$$

إذاً $y(x) = c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4$ ، وباستخدام الشروط الحديه نجد ان
 $c_3 = 1$ ، $c_1 = c_2 = c_4 = 0$ وبالتالي فان $y(x) = x$

مثال ٢- ٣- ٢

اوجد منحنيات التوقف للدالي

$$[y(x)] = \int_0^{\pi/2} (y''^2 - y^2 + x^2) dx \text{ ، حيث}$$

$$y(0) = 1 \text{ ، } y'(0) = 0$$

$$y(\frac{\pi}{2}) = 0 \text{ ، } y'(\frac{\pi}{2}) = -1$$

الحل

معادلة اويلر- بواسون هي

$$y^{(iv)} - y = 0$$

وحلها العام هو

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \text{Cos}x + C_4 \text{Sin}x$$

وباستخدام الشروط الحديه لتعيين الثوابت نجد ان

$$C_3 = 1 \text{ ، } C_1 = C_2 = C_4 = 0$$

ومن ثم فإن القيم القصوى للدالي نحصل عليها على المنحنى الذي معادلته

$$y = \text{Cos}x$$

مثال ٢- ٣- ٣ :

اوجد منحنيات التوقف للدالي

$$I[y(x)] = \int_0^{\pi} (16y^2 - y''^2 + x^2) dx$$

$$y(0) = y(\pi) = 0, \quad y'(0) = y'(\pi) = 1 \quad \text{حيث}$$

الحل

معادلة اويلر- بواسون - بالنسبة الى هذا الدالي - هي

$$y^{(4)} - 16y = 0 \quad \text{او} \quad 32y + (-1)^2 \frac{d^2}{dx^2} (-y'') = 0$$

والحل العام لهذه المعادلة هو

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$$

وباستخدام الشروط الحدية لتعيين الثوابت نحصل على

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0, \quad C_4 = \frac{1}{2}$$

$$y(x) = \frac{1}{2} \sin 2x \quad \text{وبالتالي فإن}$$

٢- ٣- ٢: إذا كان الدالي على الصورة

$$y(x), z(x) \in D_n, \quad J[y(x), z(x)] = \int_a^b F(x, y, y', \dots, y^{(n)}, z, z', \dots, z^{(m)}) dx$$

فإننا نجعل $y(x)$ دالة متغيرة ونفرض أن $z(x)$ ثابتة وبالتالي نحصل على :

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0 \quad \dots (2)$$

وبالمثل نجعل $z(x)$ دالة متغيرة بينما $y(x)$ ثابتة لنحصل على :

$$F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{z''} + \dots + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} F_{z^{(m)}} = 0 \quad \dots (3)$$

ومن ثم فإن الدالتين $y(x)$ ، $z(x)$ يحققان نظام من معادلتين هما (2) ، (3) .

ومن هنا فإنه يمكننا دراسة دالي يعتمد على أي عدد من الدوال ، فإذا كان

$$J[y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)] = \int_a^b F(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(n)}, \dots, y_m, y_m', \dots, y_m^{(n)}) dx$$

حيث $y_i(x) \in D_n$ لكل $i = 1, \dots, m$.

وكانت إحدى هذه الدوال متغيرة ولتكن $y_i(x)$ فرضنا ان الدوال الأخرى ثابتة .

فإننا نحصل على الشرط الضروري لوجود القيم القصوى للدالي في الشكل الآتي

$$i=1,2,3,\dots,m, \quad F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y_i''} + \dots + (-1)^{n_i} \frac{d^{n_i}}{dx^{n_i}} F_{y_i^{(n_i)}} = 0$$

مثال ٢-٣-٤ :

أوجد منحنيات التوقف للدالي

$$J[y, z] = \int_a^b (y''^2 + y' - y^2 + z'^2 + z''^2) dx$$

الحل

بما أن معادلتنا أويلر - بواسون هما

$$z^{(2)} + z^{(4)} = 0, \quad y^{(4)} - y = 0$$

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + A \cos x + B \sin x \quad \text{إذا}$$

$$z(x) = b_1 + b_2 x + b_3 \cos x + b_4 \sin x$$

٢-٤: داليات بشروط إضافية (Functional with subsidiary conditions)

قد تتطلب بعض المسائل جعل تكامل ما نهایه قصوى، والاحتفاظ بتكامل

أو شروط إضافية على نفس المتغيرات ثابت، وهذا ما نرغب بدراسته في هذا الجزء

فإذا كان

$$K[y] = \int_a^b G(x, y, y') = L \quad \text{و} \quad y(x) = A, \quad y(b) = B, \quad J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

حيث L ثابت، وكانت $y = y(x)$ قيمة قصوى للدالي $J[y]$ بينما $y(x)$ ليست

قيمة قصوى للدالي $K[y]$ ، فيوجد ثابت λ بحيث أن $y(x)$ قيمة قصوى

للدالي $S[y] = \int_a^b (F + \lambda G) dx$ ، وتسمى λ مضاعف لاجرانج (Lagrange's

multiplier)، وهذا يعني أن $y(x)$ تحقق معادله أويلر- لاجرانج الآتية

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \lambda \left(G_y - \frac{d}{dx} G_{y'} \right) = 0$$

مثال ٢-٤-١

من بين جميع المنحنيات الواقعة في الربع الأول، والتي طول كل منها L ، وتتمر بالنقطتين $(-a, 0)$ ، $(a, 0)$ ، اوجد ذلك المنحنى الذي يكون مع الفتره $[-a, a]$ اكبر مساحه ممكنه .

الحل

لايجاد المنحنى $y(x)$ الذي يجعل للدالي $J[y] = \int_a^b y dx$ ، اكبر قيمه ممكنه،

بشروط ان $y(-a) = y(a) = 0$ ، $K[y] = \int_{-a}^a \sqrt{1+y'^2} dx = L$ ، لاحظ ان

معادله اويلر- لاگرانج للدالي

$$S[y] = J[y] + \lambda K[y] = \int_{-a}^a (y + \lambda \sqrt{1+y'^2}) dx$$

هي

$$1 + \lambda \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right) = 0$$

وعليه فإن $x + \lambda \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = c$ ، ومنها نجد ان $(x-b)^2 + (y-c)^2 = \lambda^2$ ،

والتي تمثل عائلة دوائر مركزها (b, c) ونصف قطرها λ ، ويمكن تحديد قيم b, c من الشروط $K[y] = L$ ، $y(-a) = y(a) = 0$ ، فمن الشرط

$$y(-a) = y(a) = 0 \quad \text{نجد ان}$$

$$a^2 + c^2 = \lambda^2، \quad b = 0$$

$$y' = \frac{x}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}}، \quad K[y] = L \quad \text{لكن}$$

$$L = \int_{-a}^a \sqrt{1+y'^2} dx = \int_{-a}^a \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} dx \quad \text{إذا}$$

$$= 2\lambda \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} = 2\lambda \operatorname{Sin}^{-1}\left(\frac{a}{\lambda}\right)$$

وعليه فإن

$$\frac{L}{2\lambda} = \operatorname{Sin}^{-1}\left(\frac{a}{\lambda}\right) \Rightarrow a = \lambda \operatorname{Sin}\left(\frac{L}{2\lambda}\right)$$

وبالتالي فإن $C = \lambda \sqrt{1 - \operatorname{Sin}\left(\frac{L}{2\lambda}\right)}$ ، وعليه فإن معادلة المنحنى هي

$$x^2 + \left(y - \lambda \sqrt{1 - \operatorname{Sin}\left(\frac{L}{2\lambda}\right)} \right)^2 = \lambda^2$$

مثال ٢-٤-٢

أوجد منحنى التوقف (المنحنى الحرج) للدالي $J[y] = \int_{-a}^a y \sqrt{1+y'^2} dx$ ،

حيث $K[y] = \int_{-a}^a y \sqrt{1+y'^2} dx = 2L$ ، $y(-a) = y(a) = b$

الحل

بما أن $S[y] = J[y] + \lambda K[y]$ ، إذا $S[y] = \int_{-a}^a (y + \lambda) \sqrt{1+y'^2} dx$ ، وعليه فإن

معادلة أويلر- لاگرانج هي

$$\sqrt{1+y'^2} - \frac{d}{dx} \left[\frac{(y+\lambda)y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right] = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left[(y+\lambda) \sqrt{1+y'^2} - \frac{(y+\lambda)y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} \right] = 0 \quad \text{وبالتالي فإن}$$

$$\text{إذا ، } \frac{d}{dx} \left[\frac{(y+\lambda)}{\sqrt{1+y'^2}} \right] = 0 \quad \text{وعليه فإن}$$

$$\text{وعليه فإن } \frac{(y+\lambda)}{\sqrt{1+y'^2}} = c$$

$$\text{ومنها نجد ان } y' = \frac{\sqrt{(y+\lambda)^2 - c^2}}{c}$$

$$\text{وعليه فإن } \text{Cosh}^{-1}\left(\frac{y+\lambda}{c}\right) = \frac{x}{c} + e \text{ . وحيث ان } y+\lambda = c \text{ Cosh}\left(\frac{x}{c} + e\right)$$

$$\text{المنحنى متناظر حول محور الصادات ، إذا } e = 0 \text{ وعليه فإن } y+\lambda = c \text{ Cosh}\left(\frac{x}{c}\right)$$

$$\text{لكن } y(a) = b \text{ إذا } \lambda = c \text{ Cosh}\left(\frac{a}{c}\right) - b$$

وحيث ان

$$\int_{-a}^a \sqrt{1+y'^2} dx = 2L \Rightarrow \int_{-a}^a \sqrt{1+\text{Sinh}^2\left(\frac{x}{c}\right)} dx = 2L$$

$$\Rightarrow \int_0^a \text{Cosh}\left(\frac{x}{c}\right) dx = L \Rightarrow \text{Sinh}\left(\frac{a}{c}\right) = \frac{L}{c}$$

$$\text{وعليه فإن } \text{Cosh}\left(\frac{a}{c}\right) = \frac{\sqrt{L^2 + c^2}}{c} \quad \text{إذا}$$

$$\text{وبالتالي فإن } \lambda = \sqrt{L^2 + c^2} - b$$

$$\text{. } y = c \text{ Cosh}\left(\frac{x}{c}\right) + b - \sqrt{L^2 + c^2}$$

ملاحظة إذا كان

$$\text{لكل } y_i(b) = B_i , y_i(a) = A_i , J[y_1, \dots, y_n] = \int_a^b F[x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n] dx$$

وكان ، $i = 1, \dots, n$

$$i = 1, \dots, m , K_j[y_1, \dots, y_n] = \int_a^b G_j(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx = L_j$$

فان معادلة اويلر- لاجرانج للدالي

$$S[y_1, \dots, y_n] = J[y_1, \dots, y_n] + \lambda_j K_j[y_1, \dots, y_n]$$

هي

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left(F + \sum_{j=1}^m \lambda_j G_j \right) - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial}{\partial y'_i} \left(F + \sum_{j=1}^m \lambda_j G_j \right) \right] = 0$$

مثال ٢-٤-٣ :

اوجد منحنى التوقف للدالي

$$y(0) = y(1) = 0, \quad J[y] = \int_0^1 y'^2 dx$$

$$K_2[y] = \int_0^1 x y dx = 1, \quad K_1[y] = \int_0^1 y dx = 0$$

الحل

$$S[y] = \int_0^1 (y'^2 + \lambda_1 y + \lambda_2 x y) dx$$

بما ان

اذاً معادلة اويلر- لاگرانج هي

$$2y'' - \lambda_1 - \lambda_2 x = 0$$

$$، y' = \frac{1}{2} \lambda_1 x + \frac{1}{4} \lambda_2 x^2 + c_1 \quad \text{وعليه فان} \quad ، y'' = \frac{1}{2} \lambda_1 + \frac{1}{2} \lambda_2 x \quad \text{وبالتالي فان}$$

وعليه فان

$$y = \frac{1}{4} \lambda_1 x^2 + \frac{1}{12} \lambda_2 x^3 + c_1 x + c_2$$

$$، c_2 = 0 \quad \text{لكن} \quad y(0) = y(1) = 0 \quad \text{اذاً}$$

$$3\lambda_1 + \lambda_2 + 12c_1 = 0 \quad \dots (1)$$

$$\int_0^1 x y dx = 1, \quad \int_0^1 y dx = 0 \quad \text{لكن}$$

$$، 4\lambda_1 + \lambda_2 + 24c_1 = 0 \quad \dots (2) \quad \text{اذاً}$$

$$15\lambda_1 + 4\lambda_2 + 80c_1 = 0 \quad \dots (3)$$

ومن (1)، (2)، (3) نجد ان

$$c_1 = 60, \lambda_2 = -1440, \lambda_1 = 720$$

$$. y = 60 + 180x^2 - 120x^3 \quad \text{وعليه فان}$$

ملاحظة: اذا كان $J[y, z] = \int_a^b F(x, y, z, y', z') dx$ ، $G(x, y, z) = 0$ ، $y(a) = A_1$ ،

$y(b) = B_1$ ، $z(a) = A_2$ ، $z(b) = B_2$ ، وكان للدالي $J[y]$ قيمة قصوى على

المنحنى $y = y(x)$ ، $z = z(x)$ ، وليس كل من G_x ، G_y يساوي صفر عند أي

نقطة من نقاط السطح $G(x, y, z)$ ، فتوجد دالة $\lambda(x)$ بحيث ان $z(x)$ ،

$y(x)$ قيم قصوى للدالي :

$$S[y, z] = \int_a^b [F + \lambda(x)G] dx$$

وبالتالي فإن معادلتى اويلر- لاجرانج هما :

$$F_y + \lambda G_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

$$F_z + \lambda G_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0$$

مثال ٢ - ٤ - ٤ :

اوجد المنحنيات الحرجة للدالي

$$، y(0) = z(1) = 1 ، y^2 + z^2 = 1 ، J[y, z] = \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx$$

$$. y(1) = z(0) = 0$$

الحل

بمـان $F = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$ ، $G = y^2 + z^2 - 1 = 0$ ، اذا

معادلتى اويلر- لاجرانج هما

$$F_z + \lambda G_z - \frac{d}{dx} F_z' = 0 , F_y + \lambda G_y - \frac{d}{dx} F_y' = 0$$

وعليه فإن

$$2\lambda y - \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} \right) = 0 \quad \dots (1)$$

$$2\lambda z - \frac{d}{dx} \left(\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} \right) = 0 \quad \dots (2)$$

وحيث ان $y^2 + z^2 = 1$ ، اذا اذا كانت $y = \cos \theta$ ، $z = \sin \theta$ ، فإن
 $y'^2 + z'^2 = \theta'^2$ وبالتعويض في (1) ، (2) ينتج ان

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{-\theta' \sin \theta}{\sqrt{1+\theta'^2}} \right) - 2\lambda \cos \theta = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\theta' \cos \theta}{\sqrt{1+\theta'^2}} \right) - 2\lambda \sin \theta = 0$$

$$\sin \theta \cdot \frac{d}{dx} \left[\frac{\theta' \sin \theta}{\sqrt{1+\theta'^2}} \right] + \cos \theta \cdot \frac{d}{dx} \left[\frac{\theta' \cos \theta}{\sqrt{1+\theta'^2}} \right] = 0 \quad \text{وعليه فإن}$$

$$\theta' = c \quad \text{وعليه فإن} \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{\theta'}{\sqrt{1+\theta'^2}} \right) = 0 \quad \text{وبالتكامل بالتجزئة نجد أن}$$

وبالتالي فإن $\theta = cx + b$ حيث c, b ثوابت

$$\sin^{-1}(z) = cx + b \quad , \quad \cos^{-1}(y) = cx + b \quad \text{إذا}$$

$$z = \sin(cx + b) \quad , \quad y = \cos(cx + b) \quad \text{وعليه فإن}$$

لكن $y(0) = z(1) = 1$ ، $y(1) = z(0) = 0$ ، إذا $b = 0$ ، $c = \frac{\pi}{2}$ ، وعليه فإن

منحنى التوقف هو

$$z = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \quad , \quad y = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

مثال ٢ - ٤ - ٥

اوجد منحنيات التوقف للدالي :

$$J[y, z] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2) dx \quad \text{حيث} \quad y(0) = 2, \quad y(1) = e, \quad z(0) = 1, \quad z(1) = 2e$$

$$G(x, y, z, y', z') = y' - z$$

الحل

$$\text{بما أن } F = y'^2 + z'^2, \quad G = y' - z, \quad \text{إذا } F + \lambda G = y'^2 + z'^2 + \lambda(y' - z)$$

، وعليه فإن معادلتى اويلر - لاجرانج هما

$$2z'' + \lambda = 0 \quad (2), \quad 2y'' + \lambda' = 0 \quad (1)$$

$$y^{(4)} - y^{(2)} = 0 \quad \text{ومن (1)، (2) ينتج أن}$$

$$z = y' \quad \text{وعليه فإن} \quad y = c_1 + c_2x + c_3e^x + c_4e^{-x}$$

$$z = c_2 + c_3e^x - c_4e^{-x} \quad \text{إذا}$$

ومن الشروط الابتدائية يمكن إيجاد c_1, c_2, c_3, c_4

تمارين

(١) اوجد حل معادلة اويلر - لاجرانج لكل مما يأتي

$$J[y] = \int_a^b x\sqrt{1+y'^2} dx \quad (\text{ب}), \quad J[y] = \int_a^b \sqrt{x(1+y'^2)} dx \quad (\text{ا})$$

$$J[y] = \int_a^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{x}} dx \quad (\text{د}), \quad J[y] = \int_a^b x\sqrt{1-y'^2} dx \quad (\text{ج})$$

$$J[y] = \int_a^b (xy' + y'^2) dx \quad (\text{و}), \quad J[y] = \int_a^b (y' + x^2y'^2) dx \quad (\text{هـ})$$

$$\begin{aligned}
J[y] &= \int_a^b y \sqrt{y^2 + y'^2} dx \quad (\text{ح}) , & J[y] &= \int_a^b \sqrt{1 + y^2 y'^2} dx \quad (\text{ز}) \\
J[y] &= \int_a^b \frac{1 + y^2}{y'^2} dx \quad (\text{ي}) , & J[y] &= \int_a^b \frac{yy'^2}{1 + yy'} dx \quad (\text{ط}) \\
J[y] &= \int_a^b (y^2 + 2xyy') dx \quad (\text{ث}) , & J[y] &= \int_a^b e^x \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (\text{ك}) \\
J[y] &= \int_a^b (y^2 + y'^2 - 2y \sin x) dx \quad (\text{ن}) , & J[y] &= \int_a^b y'(1 + x^2 y') dx \quad (\text{م}) \\
J[y] &= \int_a^b (y'^2 + 2yy' - 16y^2) dx \quad (\text{ع}) , & J[y] &= \int_a^b x^{-3} y'^2 dx \quad (\text{س})
\end{aligned}$$

(٢) إذا كان $J[y] = \int_a^b F[x, y, y'] dx$ ، $y(a) = A$ ، $y(b) = B$ ، فاثبت انه يمكن

التعبير عن معادلة اولير - لاجرانج كالاتي

$$\frac{d}{dx}(F - y'F_{y'}) - F_x = 0$$

(٣) حدد شكل مسار شعاع ضوئي يمر بوسط معامل انكسار الضوء فيه بالإحداثيات القطبية يتناسب مع $\frac{1}{r^2}$.

(٤) اوجد منحنيات التوقف (المنحنيات الحرجه) التي يمكن أن يكون للدالي قيمة قصوى عليها عندما :

$$y(2) = 2 , y(1) = 1 , J[y] = \int_1^2 x^2 y' dx \quad (\text{أ})$$

$$y(1) = 2 , y(0) = 1 , J[y] = \int_0^1 (xy + y^2 - y^2 y') dx \quad (\text{ب})$$

$$y(1) = 2 , y(0) = 1 , J[y] = \int_0^1 (y^2 - yy' + y'^2) dx \quad (\text{ج})$$

$$y(1) = 1, y(0) = 0, \mathcal{J}[y] = \int_0^1 y'^2 dx \quad (\text{د})$$

$$y(-1) = y(1) = 2, \mathcal{J}[y] = \int_{-1}^1 \sqrt{y(1+y'^2)} dx \quad (\text{هـ})$$

$$y(1) = 1, y(0) = 0, \mathcal{J}[y] = \int_0^1 y' dx \quad (\text{و})$$

$$y(1) = 1, y(0) = 0, \mathcal{J}[y] = \int_0^1 yy' dx \quad (\text{ز})$$

$$(\text{هـ}) \text{ إذا كان } \mathcal{J}[y] = \int_a^b f(y) \sqrt{1+y'^2} dx \text{ ، فأثبت أن } x = b + c \int \frac{dy}{\sqrt{(f(y))^2 c^2}}$$

ثم حدد شكل منحنى التوقف عندما :

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} \quad (\text{ب}) \quad , \quad f(y) = y \quad (\text{ا})$$

$$y(2) = 3, y(0) = 1, f(y) = \frac{1}{y} \quad (\text{ج})$$

$$f(y) = \frac{1}{y^2} \quad (\text{د})$$

(٦) اوجد حل معادلتى اويلر لاگرانج في كل مما ياتي

$$\mathcal{J}[y, z] = \int_a^b (y'^2 + z'^2 + y'z') dx \quad (\text{ا})$$

$$\mathcal{J}[y, x] = \int_a^b (2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2) dx \quad (\text{ب})$$

(٧) إن مسألة إيجاد اقل زمن يستغرقه جسيم متحرك من (x_0, y_0, z_0) إلى

(x_1, y_1, z_1) الواقعتين على منحنى في R^2 ، يحددها إيجاد القيمة الصغرى

للدالي $\mathcal{J}[y, z] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2+z'^2}{y}} dx$. اوجد حل معادلتى اويلر - لاگرانج

لذلك الدالي .

(٨) اوجد ان $y(x)$ ، $z(x)$ بحيث ان للدالي $J[y, z] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2 - 2gz) dx$ ،
 قيمة صغرى حيث g ثابت ، $y(0) = z(0) = 0$ ، $y(1) = a$ ، $z(1) = 0$.

(٩) اوجد معادلتى المنحنى $y(x)$ ، $z(x)$ ، إذا كان للدالي $J[y, z] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2) dx$ ،
 قيمة صغرى عندما :

(أ) $y(0) = z(0) = 0$ ، $\dot{y}(1) = 0$ ، $z(1) = 2$ ،

(ب) $y(0) = y(1) = 0$ ، $z(0) = 0$ ، $z(1) = 2$ ،

(١٠) باستخدام معادلات اويلر- لاجرانج القانونيه ، اوجد منحنيات التوقف لكل
 مما يأتي :

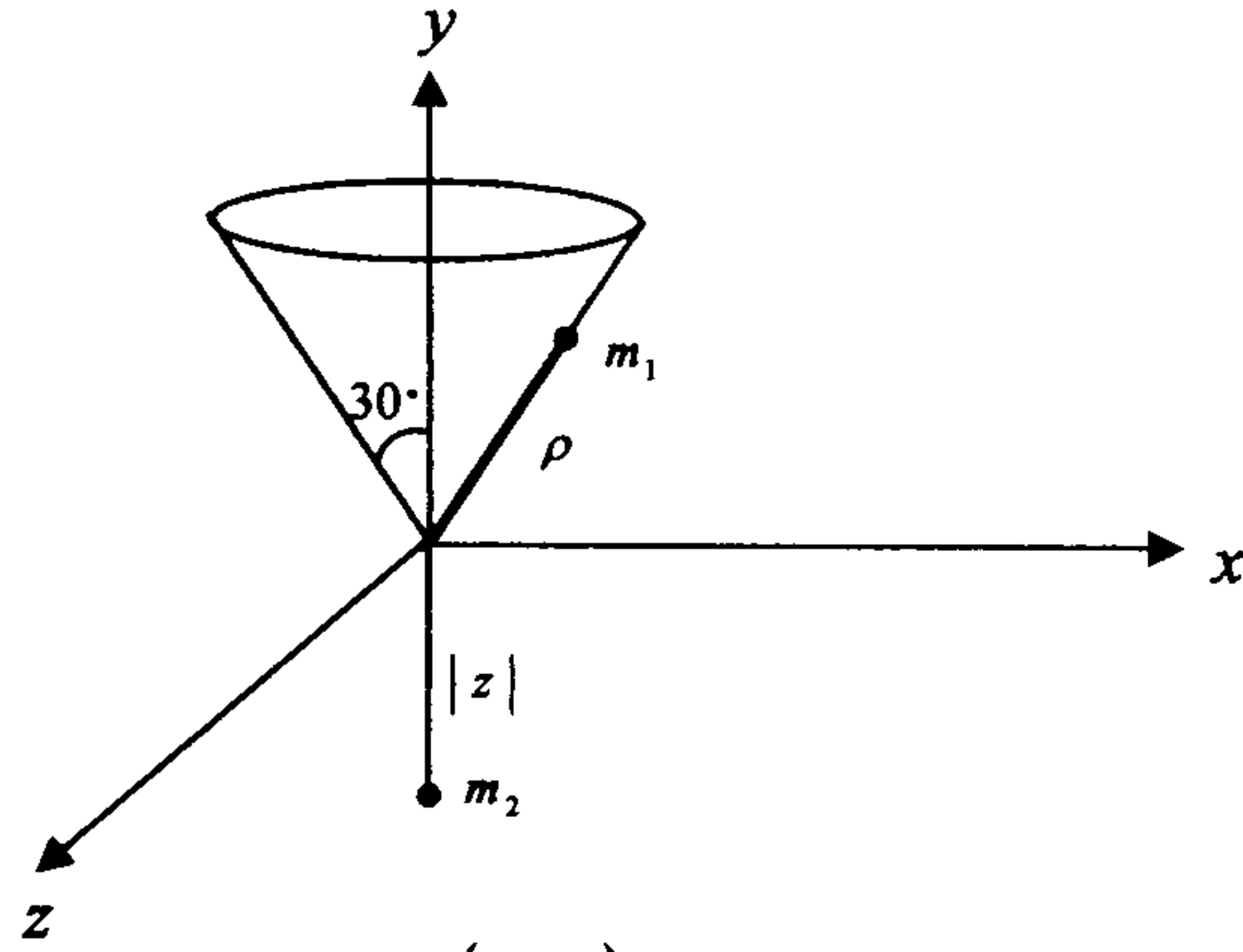
(أ) $J[y] = \int \sqrt{(x^2 + y^2)(1 + y'^2)} dx$ (١)

(ب) $J[x] = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (mx'^2 - cx^2) dt$ (٢)

(١١) اوجد معادلة حركة جسم يتحرك على محور السينات ، إذا كانت طاقته
 الكامنة (طاقة الوضع) $v = \frac{1}{2} kx^2$.

(١٢) يتحرك جسيم كتلة m_1 غم بدون احتكاك على سطح مخروط دائري قائم
 كما في الشكل (٣- ١) ، ويتحرك جسيم آخر كتلته m_2 غم مربوط

بخط ثابت الطول إلى الأعلى والأسفل . اوجد معادلات لاجرانج لحركة تلك المجموعة من الجسيمات .



شكل (١-٣)

(١٣) اوجد منحنيات القيم القصوى (المنحنيات الحرجة) في كل مما يأتي :

$$\mathcal{J}[y] = \int_a^b [2xy + (y^{(3)})^2] dx \quad (أ)$$

$$\mathcal{J}[y] = \int_a^b (x^2 + 16y^2 - y^{n^2}) dx \quad (ب)$$

$$\mathcal{J}[y] = \int [y^2 - 2x^3y + (y^{(3)})^2] dx \quad (ج)$$

$$\mathcal{J}[y] = \int_a^b (y^{n^2} - 2y'^2 + y^2 - 2y \sin) dx \quad (د)$$

$$\mathcal{J}[y] = \int_a^b (y^{n^2} + y'^2 + y^2) dx \quad (هـ)$$

$$. y'(0) = y'(1) = 1, \quad y(1) = 1, \quad y(0) = 0, \quad \mathcal{J}[y] = \int_0^1 (1 + y^{n^2}) dx \quad (و)$$

$$y(-a) = y(a) = y'(-a) = y'(a) = 0, \quad \text{حيث } x, \beta \text{ ثوابت, } \mathcal{J}[y] = \int_a^a (\frac{1}{2} \alpha y^{n^2} + \beta y) dx \quad (ز)$$

$$, y'(0) = 0 , y(\frac{\pi}{2}) = 0 , y(0) = 1 , J[y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y''^2 - y^2 + x^2) dx \quad (\text{ح})$$

$$y'(\pi/2) = 1 , y'(0) = 0$$

(١٤) اوجد معادلة المنحنى المار بالنقطتين (1,0) ، (0,0) ، الذي يجعل للدالي

$$J[y] = \int_0^1 y''^2 dx \quad \text{قيمة صغرى عندما } y'(1) = a , y'(0) = a$$

(١٥) اوجد المنحنيات الحرجة (منحنيات التوقف) لكل مما يأتي

$$y(0) = y(1) = 0 , K[y] = \int_0^1 y^2 dx = 2 \quad \text{بشرط أن } J[y] = \int_0^1 (x^2 + y'^2) dx \quad (١)$$

$$K[y] = \int_a^b y dx = L \quad \text{و } J[y] = \int_a^b y'^2 dx \quad (\text{ب})$$

$$, y(1) = 1 , y(0) = 0 , K[y] = \int_0^1 y dx = \frac{1}{3} \quad \text{بشرط أن } J[y] = \int_0^1 y'^2 dx \quad (\text{ج})$$

$$K[y] = \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2} dx = 2 , y(1) = 1 , y(0) = 0 \quad \text{بشرط أن } J[y] = \int_0^1 y'^2 dx \quad (\text{د})$$

$$K[y] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = L \quad \text{و } J[y] = \int_{t_0}^{t_1} xy' dt \quad (\text{هـ})$$

$$K[y] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = L \quad \text{و } J[y] = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (xy' - yx') dt \quad (\text{و})$$

$$, \int_0^1 (y'^2 - xy' - z'^2) dx = 2 \quad \text{بشرط أن } J[y, z] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2 - yxz' - yz) dx \quad (\text{ز})$$

$$y(1) = z(1) = 1 , y(0) = z(0) = 0$$

$$, y' - z = 0 \quad \text{و } J[y, z] = \int_0^1 (y^2 + y' + z'^2) dx \quad (\text{ح})$$

$$, y(1) = 1 , y(0) = 0 , y' + z' - y = 0 \quad \text{و } J[y, z] = \int_0^1 (y^2 + y'^2 + z'^2) dx \quad (\text{ط})$$

$$z(1) = 0 , z(0) = 0$$

الفصل الثالث

مسائل التغيرات بداليات ذات تكاملات متعددة والمسألة العكسية

قد تكون بعض الداليات ذات تكاملات متعددة (مضاعفه) ، وتملك قيماً قصوى على منحنيات معينة ، ولعرفة الشروط الضرورية لوجود منحنيات توقف (حرجه) يكون للدالي قيمة قصوى عندها ، نتناول في هذا الفصل دراسة تلك الداليات وتحديد معادلات اويلر- لاجرانج بالنسبه لها ودراسه بعض التطبيقات المهمه هندسيه وفيزيائيه ، اما في البند الثاني من هذا الفصل ، فقد تناولنا المسأله العكسيه وهي ايجاد الدوال $F(x, y, y')$ التي يكون المنحني $y(x)$ حلاً لمعادله اويلر- لاجرانج الناتجه منها .

٣-١ : مسائل التغيرات بداليات ذات تكاملات متعدده وبعض تطبيقاتها

يضم هذا الجزء دراسة قيم التوقف "المنحنيات الحرجه" للداليات ذات التكاملات المضاعفه او المتعدده (multiple integrals) ، واعطاء بعض التطبيقات المهمه كإيجاد معادله الحركه لسلك متذبذب (مهتز) من الجهتين ، واشتقاق معادلتى لابلاس وشرو دنجر ، اضافه الى بعض التطبيقات الهندسيه ، فإذا كان :

$$J[z(x, y)] = \iint_R F(x, y, z, z_x, z_y) dx dy \in \ell_2$$

حيث ℓ_2 مجموعه الدوال التي تكون مشتقاتها الجزئيه الأولى والثانيه متصله (مستمرة) على المنطقه المغلقه R ، كما ان للداله $z(x, y)$ قيم معرفه ومحدده على ∂R ، حيث ∂R هي حدود R ولتحديد شروط قيم التوقف (المنحنيات الحرجه) ، نورد مايلي :

قضيه مساعده (٣- ١- ١)

اذا كانت $f(x, y)$ داله متصله على المنطقه المغلقه R ، وكان
 $\iint_R F(x, y) h(x, y) dx dy = 0$ لكل $h(x, y) \in \ell_2$ ، كما ان $h(x, y) = 0$
لكل $(x, y) \in \partial R$ ، فإن $f(x, y) = 0$ لكل $(x, y) \in R$.

البرهان:

نفرض وجود $(x^*, y^*) \in R$ بحيث ان $f(x^*, y^*) \neq 0$. اما $f > 0$ او $f < 0$ ،
فاذا كانت $f(x^*, y^*) > 0$ ، فان اتصال f على R يعني ان $f(x, y) > 0$
لكل

$$(x, y) \in B = \{(x, y) \in R \mid (x-x^*)^2 + (y-y^*)^2 \leq r^2\} \subseteq R$$

وعليه فاذا كانت h^* داله معرفه على R كالآتي

$$h^*(x, y) = \begin{cases} 0 & , \forall (x, y) \in R - B \\ (r^2 - [(x-x^*)^2 + (y-y^*)^2])^3 & , \forall (x, y) \in B \end{cases}$$

فإن $h^* \in \ell_2$ كما ان $\iint_R F(x, y) h(x, y) dx dy = 0$ ، وهذا غير ممكن لأن

$f(x, y) h^*(x, y) > 0$ لكل $(x, y) \in B$ ، وعليه فإن $f(x^*, y^*)$ لا يمكن ان

تكون اكبر من الصفر، وينفس الطريقه يمكن ان نثبت ان $f(x^*, y^*)$ لا يمكن

ان تكون اصغر من الصفر، وعليه فإن $f(x, y) = 0$ لكل $(x, y) \in R$.

□

والآن الى المبرهنه الآتيه التي تحدد شروط وجود قيم التوقف.

مبرهنه ٣- ١- ٣:

اذا كانت $Z(x, y)$ معرفه ومحددده على ∂R ، وكان للدالي

$$J[z(x, y)] = \iint_R F(x, y, z, z_x, z_y) dx dy \in \ell_2$$

قيمه قصوى على المنحنى $Z(x, y)$ فإن F تحقق معادله اويلر- لاجرانج ، أي ان

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y} = 0$$

البرهان

بما ان

$$\begin{aligned} \delta J &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} J(Z + \varepsilon \Delta Z) \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \iint_R \frac{\partial}{\partial \varepsilon} F(x, y, Z + \varepsilon \Delta Z, Z_x + \varepsilon \Delta Z_x, Z_y + \varepsilon \Delta Z_y) dx dy \\ &= \iint_R (F_z \Delta Z + F_{z_x} \Delta Z_x + F_{z_y} \Delta Z_y) dx dy \end{aligned}$$

لكن $\Delta Z = 0$ لكل $(x, y) \in \partial R$

$$\iint_R (F_{z_x} \Delta Z_x + F_{z_y} \Delta Z_y) dx dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x} (F_{z_x} \Delta Z) + \frac{\partial}{\partial y} (F_{z_y} \Delta Z) \right] dx dy - \iint_R \left(\frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} + \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y} \right) \Delta Z dx dy$$

وباستخدام نظريه جرين التي تنص على ان

$$\iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial R} N dx + M dy$$

نجد ان

$$\iint_R (F_{z_x} \Delta Z_x + F_{z_y} \Delta Z_y) dx dy = \int_{\partial R} (F_{z_x} \Delta Z dy - F_{z_y} \Delta Z dx) - \iint_R \left(\frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} + \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y} \right) \Delta Z dx dy$$

لكن $\Delta Z = 0$ لكل $(x, y) \in \partial R$ إذا

$$\int_{\partial R} (F_{z_x} \Delta Z dy - F_{z_y} \Delta Z dx) = 0$$

وعليه فإن

$$\iint_R (F_{z_x} \Delta Z_x + F_{z_y} \Delta Z_y) dx dy = - \iint_R \left(\frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} + \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y} \right) \Delta Z dx dy$$

وبالتالي فإن

$$\delta J = \iint_R (F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y}) \Delta z \, dx \, dy$$

لكن للدالي J قيمة قصوى على $Z(x, y)$ ، إذا $\delta J = 0$ ، وعليه فإن

$$\iint_R (F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y}) \Delta z \, dx \, dy = 0$$

لكن $F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y}$ دالة مستمرة (متصلة) على R . كما ان $\Delta Z = 0$ لكل

$(x, y) \in \partial R$ ، إذا حسب القضية المساعده (٣- ١- ١).

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y} = 0$$

□

ملاحظة

(١) إذا كان للدالي

$$J[u] = \int \dots \int_R F(x_1, \dots, x_n, \dots, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) \, dx_1 \dots dx_n \in \ell_2$$

وكان للدالة $u(x_1, \dots, x_n)$ ، قيماً محددة في ∂R ، وللدالي $J[u]$ قيمة

قصوى على $u(x_1, \dots, x_n)$ فإن معادله اويلر- لاجرانج هي

$$F_u - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} F_{u_{x_i}} = 0$$

(٢) إذا كان للدالي

$$J[Z, w] = \iint_R F(x, y, z, w, z_x, z_y, w_x, w_y) \, dx \, dy \in \ell_2$$

قيمه قصوى على $Z(x, y)$ ، $w(x, y)$ ، فإن معادلتى اويلر- لاجرانج

هما

$$F_w - \frac{\partial}{\partial x} F_{w_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{w_y} = 0, \quad F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y} = 0$$

وبصوره عامه اذا كان للدالي

$$J[u, v] = \int \dots \int_R F(x_1, \dots, x_n, \dots, u, v, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, v_{x_1}, \dots, v_{x_n}) dx_1 \dots dx_n \in \ell_2$$

قيمه قصوى على $u(x_1, \dots, x_n)$ ، $v(x_1, \dots, x_n)$ فإن معادلتى اويلر-

لاجرانج هما

$$F_v - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} F_{v_{x_i}} = 0 , F_u - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} F_{u_{x_i}} = 0$$

(٣) اذا كان للدالي

$$J[z(x, y)] = \iint_R F(x, y, z, z_x, z_y) dx dy$$

قيمه قصوى بشرط ان

$$K[z(x, y)] = \iint_R G(x, y, z, z_x, z_y) dx dy = A$$

فإن معادله اويلر- لاجرانج للدالي

$$S[z(x, y)] = \iint_R (F + \lambda G) dx dy$$

هي

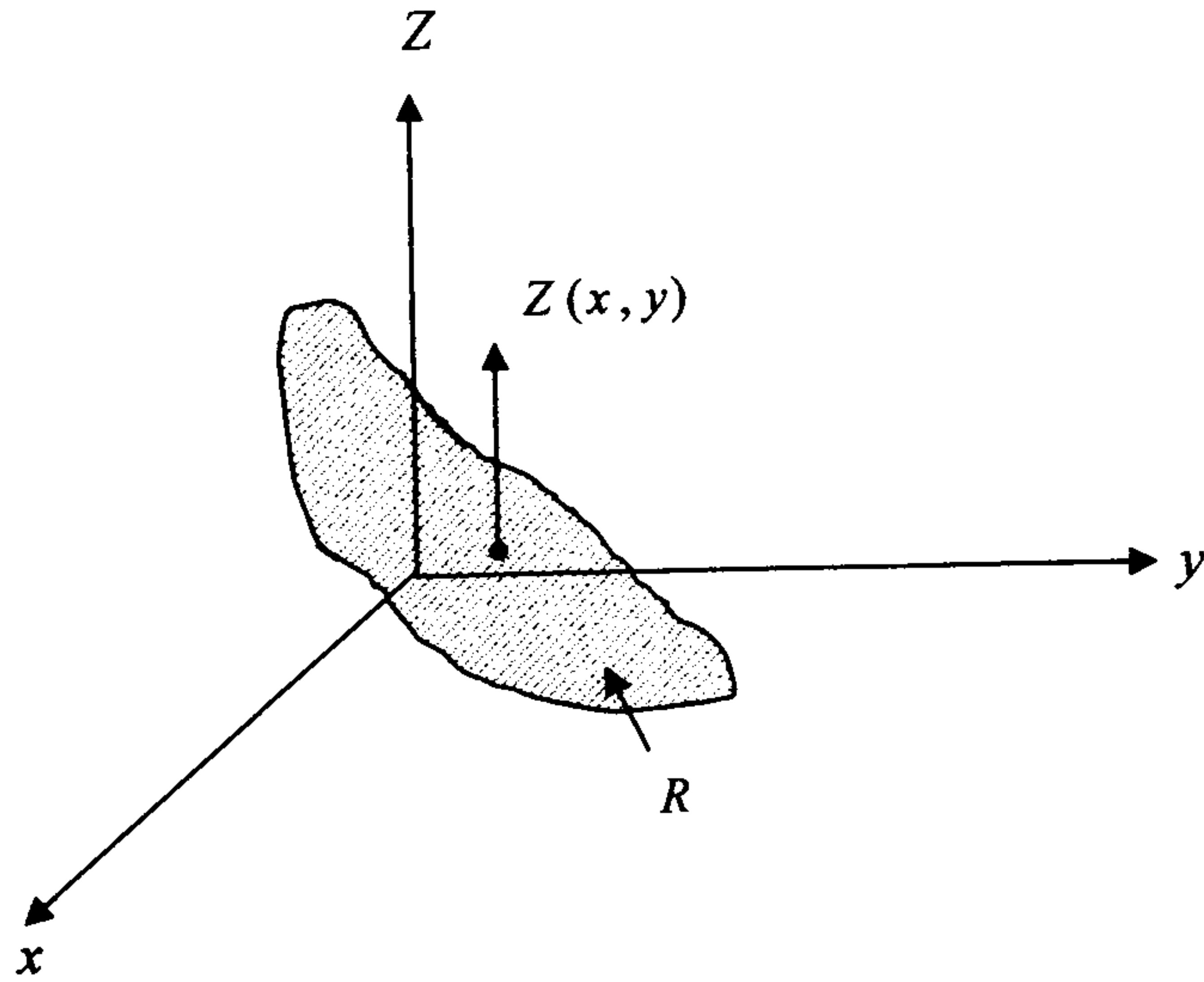
$$F_z + \lambda G_z - \frac{\partial}{\partial x} (F_{z_x} + \lambda G_{z_x}) - \frac{\partial}{\partial y} (F_{z_y} + \lambda G_{z_y}) = 0$$

والآن الى بعض التطبيقات والأمثله الآتية.

مثال ٣- ١- ١: "اصفر سطح Minimal surface Plateau's Problem"

لايجاد سطح $Z(x, y)$ متولد من منحنى مغلق "انظر الشكل (٣- ١)" مساحته

$$S = \iint_R \sqrt{1 + Z_x^2 + Z_y^2} dx dy \text{ اقل ما يمكن.}$$



شكل (١-٣)

لاحظ ان معادله اويلر- لاجرانج هي :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Z_x}{\sqrt{1 + Z_x^2 + Z_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Z_y}{\sqrt{1 + Z_x^2 + Z_y^2}} \right) = 0$$

او

$$Z_{xx} (1 + Z_y^2) - 2Z_x Z_y Z_{xy} + Z_{yy} (1 + Z_x^2) = 0$$

وهي معادله تفاضليه جزئيه لأصغر سطح وحل مثل تلك المعادله معقد جداً لذلك نستخدم الهندسه التفاضليه في هذا المجال لتحديد معدل التقوس (mean curvature) لذلك السطح، فإن كان التقوس صغيراً كان ذلك السطح ذو اقل مساحه ممكنه، هذا ونود ان نشير الى ان لانجرانج هو اول من درس السطوح ذات اقل مساحه ممكنه، اما النظرية العامه لمثل تلك السطوح فتعود الى الفيزيائي البلجيكي الاعمى بلاتو (١٨٠١ - ١٨٣٣م) الذي حدد الكثير من خواص تلك السطوح من خلال تجاربه على فقاعات الصابون، لأن مثل تلك السطوح يمكن تكوينها من ادخال سلك رفيع له شكل المنحنى المغلق في سائل صابون ثم

رفعه منه .

مثال ٣- ١- ٢:

$$J[Z(x, y)] = \iint_R [Z_x^2 + Z_y^2 + 2Z f(x, y)] dx dy \quad \text{إذا كان}$$

فإن معادله اويلر- لاجرانج هي

$$Z_{xx}^2 + Z_{yy}^2 = f(x, y)$$

وهذه هي معادله بواسون (١٧٨١ - ١٨٤٠م) التي تستخدم في الفيزياء الرياضيه .

مثال ٣- ١- ٣:

إذا كان

$$J[u(x, y, z)] = \iiint_R (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) dx dy dz$$

فإن معادله اويلر- لاجرانج للدالي $J[u]$ هي

$$u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u_{zz}^2 = 0$$

وهي معادله لابلاس (١٧٤٩ - ١٨٢٧م) ، التي يجب ان يحققها الجهد الكهربائي في فضاء خالي من الشحنات ، ولها ايضاً تطبيقات عديده في الفلك والهندسه التفاضليه والتوصيل الحراري ، وديناميكا الموائع ، وغير ذلك من المسائل في الفيزياء الرياضيه .

مثال ٣- ١- ٤:

سلك منتظم كتلته m لكل وحده طول ، مثبت (مشدود) بين حاملين $= 0$ ،

، $x = s$ وتحت تأثير شد (توتر) ثابت k فإذا عملت ذبذبات صغيره سعتها $u(x, t)$ ،

فإن الطاقه الحركيه للسلك هي $T = \frac{1}{2} m \int_0^s u_t^2 dx$ ، اما الطاقه الكامنه (طاقه

الوضع) فهي

$$V = \frac{1}{2} k \int_0^s u_x^2 dx$$

وعليه فإن

$$J[z(x,t)] = \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^s \left(\frac{1}{2} m u_t^2 - \frac{1}{2} k u_x^2 \right) dx dt$$

حسب قاعده هاملتون، ومنها نجد ان $F = \frac{1}{2} m u_t^2 - \frac{1}{2} k u_x^2$ ، وعليه فإن

معادله اويلر- لاگرانج هي

$$F_u - \frac{d}{dt}(F_{u_t}) - \frac{d}{dx}(F_{u_x}) = 0$$

ومنها نجد ان $-m u_{tt} + k u_{xx} = 0$ وعليه فإن $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ حيث

هي معادله حركه السلك، وهي معادله انتشار الموجات ببعد واحد. $a = \sqrt{\frac{k}{m}}$

مثال ٣- ١- ٥: معادله شرودنجر Schrödinger's Equation

يمكن اشتقاق معادله شرودنجر في ميكانيكا الكم باستخدام حساب التغيرات كالاتي.

نفرض ان $H = -k \nabla^2 + V(x, y, z)$ حيث $k = \frac{h^2}{8\pi^2 m}$ ، كتله الجسيم

الذي تدرس حركته، h ثابت بلانك، V طاقه الوضع (الطاقه الكامنه) للجسيم

H مؤثر هاملتون (Hamilton Operator) او مؤثر الطاقه (Energy Operator)،

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$E = J[\Psi, \Psi^*] = \iiint_R \Psi^* (H \Psi) dx dy dz \quad \dots (1)$$

قيمه قصوى بشرط ان

$$G[\Psi, \Psi^*] = \iiint_R \Psi^* \Psi dx dy dz = 1 \quad \dots (2)$$

حيث Ψ^* مرافق Ψ ، كما ان لكل من Ψ ، Ψ^* نفس القيم ونفس المشتقات عند

الحدود المتقابلة او انها تنعدم على ∂R . لاحظ ان بالتكامل بالتجزئه نجد ان

$$\int \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} dx = \left[\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right]_{x_1}^{x_2} - \int \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx$$

$$= 0 - \int \Psi_x^* \cdot \Psi_x dx = - \int \Psi_x^* \cdot \Psi_x dx$$

إذا

$$\iiint_R \Psi^* (-k \nabla^2 + V) \Psi dx dy dz = \iiint_R [k (\nabla \Psi^*) \cdot (\nabla \Psi) + \Psi^* \Psi V] dx dy dz$$

$$= \iiint_R [k (\Psi_x \Psi_x^* + \Psi_y \Psi_y^* + \Psi_z \Psi_z^*) + \Psi^* \Psi V] dx dy dz \quad \dots (3)$$

ومن (2)، (3) نجد ان

$$S[\Psi, \Psi^*] = \iiint_R [k (\Psi_x \Psi_x^* + \Psi_y \Psi_y^* + \Psi_z \Psi_z^*) + \Psi^* \Psi V + \lambda \Psi \Psi^*] dx dy dz$$

وعليه فإن معادلات اويلر- لاجرانج هي

$$F_\Psi - \frac{\partial}{\partial x} (F_{\Psi_x}) - \frac{\partial}{\partial y} (F_{\Psi_y}) - \frac{\partial}{\partial z} (F_{\Psi_z}) = 0$$

$$F_{\Psi^*} - \frac{\partial}{\partial x} (F_{\Psi_x^*}) - \frac{\partial}{\partial y} (F_{\Psi_y^*}) - \frac{\partial}{\partial z} (F_{\Psi_z^*}) = 0$$

وبالتالي فإن

$$\nabla \Psi^* + \lambda \Psi^* - k [\Psi_{xx}^* + \Psi_{yy}^* + \Psi_{zz}^*] = 0 \quad \dots (4)$$

$$\nabla \Psi + \lambda \Psi - k [\Psi_{xx} + \Psi_{yy} + \Psi_{zz}] = 0 \quad \dots (5)$$

لكن

$$H \Psi = -k \nabla^2 + \Psi V$$

$$= -k \Psi_{xx} + \Psi_{yy} + \Psi_{zz} \Psi V$$

إذا (5) هي

$$H \Psi = -\lambda \Psi \quad \dots (6)$$

ولتحديد قيمة λ نظرب طرفي (6) في Ψ^* فنجد ان

$$H \Psi \Psi^* = -\lambda \Psi \Psi^*$$

وعليه فإن

$$E = \iiint_R \Psi H \Psi^* dx dy dz = -\lambda \iiint_R \Psi \Psi^* dx dy dz = -\lambda$$

وبالتعويض في (6) نجد ان

$$H \Psi = E \Psi ، وهي معادله شرو دنجر في ميكانيكا الكم .$$

٣-٢: المسألة العكسية "Inverse Problem"

وهي ايجاد مجموعة الدوال $F(x, y, y')$ ، بحيث ان $y(x)$ حل لمعادله

$$. J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

ولتحديد مجموعة الدوال القابلة للتكامل $F(x, y, y')$ بحيث انه اذا كانت

$$g \in D_2 ، g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

وكانت $y(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ، بحيث ان

$$y(x) = g(x, \alpha, \beta) \quad \dots(1)$$

حل لمعادله اويلر - لاجرانج الآتية :

$$\frac{d}{dx} (F_{y'}) - F_y = 0 \Rightarrow F_{y'y'} \cdot y'' + F_{y'y'} \cdot y' + F_{xy'} - F_y = 0 \quad \dots(2)$$

افرض ان $F_{y'y'} \neq 0$ ، كما ان $F(x, y, y')$ قابله للإشتقاق وللحصول على

المعادله التفاضليه التي حلها العام مُمثل في المعادله (1) نفرض امكانية حذف

ثوابت التكامل α, β ، أي انه توجد دوال متصله →

$$\phi: [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Psi: [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} ، بحيث ان$$

$$y(x) = g[x, \phi(x, y, y'), \Psi(x, y, y')] \quad \dots (4)$$

$$y'(x) = g_x[x, \phi(x, y, y'), \Psi(x, y, y')]$$

وهذا يعني انه يمكن ايجاد α, β بدلاله x, y, y' من المعادلتين

$$y'(x) = g_x(x, \alpha, \beta) ، y(x) = g(x, \alpha, \beta)$$

وبالتالي فإن

$$y''(x) = G(x, y, y') \quad \dots (5)$$

حيث $G(x, y, y') = g_{xx} [x, \phi(x, y, y'), \Psi(x, y, y')]$ ، $G : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ وعليه فإن المعادلة (5) تمثل المعادلة التفاضلية ذات الحل العام (1). والآن لتحديد الدالة $F(x, y, y')$ بحيث ان المعادلة (5) تمثل حل لمعادله اويلر- لاگرانج (2) لاحظ ان

$$F_y - F_{xy'} - y' F_{yy'} = G F_{yy'} \quad \dots (6)$$

وحيث ان (1) تمثل الحل العام للمعادله (6) ، اذاً يجب ايجاد حل لكل شرط ابتدائي $(y(a), y'(a)) \in \mathbb{R}^2$ ، وعليه فإن المعادلة (6) تتحقق لكل $(x, y, y') \in [a, b] \times \mathbb{R}^2$ وبإجراء التفاضل للمعادله (6) بالنسبه الى y' ثم الفرض بأن :

$$F_{yy'}(x, y, y') = K(x, y, y') \quad \dots (7)$$

حيث $K : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ، نجد ان :

$$K_x + y'K_y + GK_{y'} + G_{y'}K = 0 \quad \dots (8)$$

وهي معادله تفاضليه جزئيه في المتغير K ، وبالتالي فإن الحل العام للمعادله (8) هو "يمكن التأكد من ذلك بالتعويض"

$$K(x, y, y') = \frac{u(\phi, \Psi)}{v(x, \phi, \Psi)} \quad \dots (9)$$

حيث $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ داله تفاضليه غير صفريه وماعدا ذلك فهي اختياريه ،

$$v(x, \alpha, \beta) = \exp\left(\int G_{y'}(x, g(x, \alpha, \beta), g_x(x, \alpha, \beta)) dx\right) \quad \dots (10)$$

اذاً يمكن ايجاد الداله $F(x, y, y')$ من المعادله (9) كالاتي

$$F(x, y, y') = \int_0^{y'} \int_0^r K(x, y, p) dp dr + y'\lambda(x, y) + \mu(x, y) \quad \dots (11)$$

حيث $\mu : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، $\lambda : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، اما بالنسبه

للدالة $F(x, y, y')$ فيجب ان تكون المعادله (6) متحققه .

مثال ٣- ٢- ١ :

اوجد الدوال القابله للتكامل $F(x, y, y')$ والتي تكون منحنياتها القسوى خطوط مستقيمه

الحل

نفرض ان $y(x) = \alpha x + \beta$ ، اذاً من المعادله (4) نجد ان

$$\Psi(x, y, y') = y - xy' , \phi(x, y, y') = y'$$

لكن $y''(x) = 0$ اذاً $G(x, y, y') = 0$ ، وعليه فإن المعادله (10) تصبح كالآتي :

$$v(x, \alpha, \beta) = 1$$

وبالتالي فإن معادله (9) تأخذ الشكل

$$K(x, y, y') = u(y', y - xy')$$

والحصول على الدوال $F(x, y, y')$ يتم بإجراء التكامل بالتجزئه كالآتي

$$\begin{aligned} \int_0^{y'} \int_0^r K(x, y, p) dp dr &= r \int_0^r K(x, y, p) dp \Big|_0^{y'} - \int_0^{y'} r K(x, y, r) dr \\ &= \int_0^{y'} (y - r) K(x, y, r) dr \end{aligned}$$

ومن ثم فإن المعادله (11) تصبح كالآتي

$$F(x, y, y') = \int_0^{y'} (y - r) u(r, y - xr) dr + y' \lambda(x, y) + \mu(x, y)$$

و $F(x, y, y')$ تحقق المعادله (6) .

والآن نفرض ان $z = y - xr$ ، اذاً

$$u(r, y - xr) = u(r, z)$$

$$u_x = u_z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -ru_z , u_y = u_z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = u_z$$

ومنها نجد ان

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial y} \quad \text{وبالتعويض في (6) نجد ان}$$

وعليه توجد داله $\omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ بحيث ان $\mu(x, y) = \omega_x$ ، $\lambda(x, y) = \omega_y$ والتي تمثل قيوداً (شروطاً) على الدالتين λ, μ .

مثال ٣- ٢- ٢:

إذا اثرت قوه $P = P(x, y)$ على جسيم كتلته ١ غم ، فأزاحته مسافه قدرها y سم . فإنه حسب قانون نيوتن الثاني للحركه نجد ان $P = ma = 1 \cdot y'' = y''$.
والآن نرض ان القوه P ناتجه من تفاضل طاقه الوضع (الطاقه الكامنه) V للجسيم ، اذاً $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ، $P = \frac{\partial V(x, y)}{\partial y}$ ، ومن قاعده هاملتون نجد ان

معادله حركه الجسيم تكون حلاً لمعادله اويلر- لاجرانج للدالي

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{1}{2} y'^2 + V(x, y) \right] dx$$

$$y(x_1) = y_1 , \quad y(x_0) = y_0 \quad \text{حيث}$$

وهذا يعني ان $y'' - \frac{\partial V}{\partial y} = 0$ وهذا هو قانون نيوتن الثاني مره اخرى .

اما اذا كانت القوه P ليست مشتقه من الجهد ، فأفرض انها داله ، تعتمد على x, y, y' ، ولتكن G ، اذاً معادله الحركه هي

$$G(x, y, y') = y''(x) \quad \dots (12)$$

واذا كان الحل العام للمعادله (12) معلوم ، فيمكننا الحصول على عدد لانهاثي من الداليات التي تكون لها المعادله (12) معادله اويلر- لاجرانج ، ولتعيين داله القوه G والتكامل المناظر لها والتي لها المعادله (12) معادله اويلر- لاجرانج ،

نرض ان $a, b, c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ دوال من النوع l ، وأفرض ان

$$G(x, y, y') = a(x, y) + b(x) y' + c(y) y'^2 \quad \dots (13)$$

وهذا ضروري لحل المعادله (12) . والآن إعتبر ان الداله u في المعادله (9) داله

اختياريه قابله للتفاضل وغير صفريه ، اذا يمكن ان نفرض ان

$$u(\alpha, \beta) = 1$$

وعليه فإن

$$K(x, y, y') = v^{-1}[x, \phi(x, y, y'), \Psi(x, y, y')]$$

وباستخدام المعادلتين (10) ، (13) نجد ان

$$v[x, \phi(x, y, y'), \Psi(x, y, y')] = e^{\int b(x) dx + 2 \int c(y) dy} = \theta(x, y)$$

وعليه فإن معادله (11) تصبح كالآتي

$$F(x, y, y') = \frac{1}{2} \theta^{-1}(x, y) y'^2 + \int a(x, y) \theta^{-1}(x, y) dy \quad \dots (14)$$

ومن ثم فإن المعادله

$$y'' = a(x, y) + b(x) y' + c(y) y'^2$$

تمثل معادله اويلر- لاجرانج للدالي

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

حيث F معرفه بالمعادله (14) .

اما اذا كانت داله القوه G مشتقه من الطاقه الكامنه ، فإن

$$G(x, y, y') = a(x, y) = \frac{\partial V(x, y)}{\partial y}$$

وتكون المعادله (14) هي

$$F(x, y, y') = \frac{1}{2} y'^2 + V(x, y)$$

وبذلك نصل مره اخرى الى قاعده هاملتون كحاله خاصه .

تمارين

(١) اوجد معادله - اويلر لا جرانج لكل مما يأتي

$$J[Z(x, y)] = \iint_R (Z_{xx} + Z_{yy})^2 dx dy \quad (١)$$

$$J[Z] = \iint_R (Z_x^2 + Z_y^2) dx dy \quad (ب)$$

$$J[Z] = \iint_R [1 + \frac{1}{2}(Z_x^2 + Z_y^2)] dx dy \quad (ج)$$

$$J[u(x, y, z)] = \iiint_R \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} dx dy dz \quad (د)$$

$$J[u] = \iiint_R [u_x^2 + u_y^2 + u_z^2] dx dy dz \quad (هـ)$$

$$J[u] = \iiint_R [u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + 2uf(x, y, z)] dx dy dz \quad (و)$$

(٢) غشاء مهتز (vibrating membrane) ذو سطح متجانس (منتظم) يمكن

التعبير عن معادله سطحه بالشكل :

$Z = Z(x, y, t)$ لكل $(x, y) \in R$ حيث R هو مسقط سطح الغشاء على R^2 الذي يصنع ازاحه عموديه للغشاء باتجاه (x, y) في الزمن t . فإذا كانت الطاقة الكامنه (طاقه الوضع) للغشاء المهتز اهتزازاً طفيفاً هي $V = \frac{K}{2} \iint_R (Z_x^2 + Z_y^2) dx dy$ ، حيث K ثابت يقيس الشد الحاصل في السطح نتيجة لذلك الأهتزاز ، اما الطاقة الحركيه فهي $T = \frac{m}{2A} \iint_R Z_t^2 dx dy$ ،

حيث m الكتله الكليه للسطح ، A مساحة المنطقه R في R^2 . فإذا كانت

$$A(Z) = \int_0^1 (T - V) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \iint_R [\rho Z_t^2 - K(Z_x^2 + Z_y^2)] dx dy dt$$

حيث $\rho = \frac{m}{A}$ ، فاثبت ان معادله حركه الغشاء هي

$$(x, y) \in R \text{ ولكل } t \in [t_0, t_1] \text{ لكل } \rho Z_{tt} = K(Z_{xx} + Z_{yy})$$

(٣) اذا كانت $y = y(x)$ منحنياً حرجياً (منحني توقف) للدالي

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

فاوجد $F(x, y, y')$ عندما

$$y(x) = \sqrt{c^2 - (x - d)^2} \quad (١) \text{ حيث } c, d \text{ ثوابت}$$

$$(ب) \quad 0 < K \in \mathbb{R}, \quad y'' = -ky$$

الفصل الرابع

مسائل التغيرات ذات نقاط اطراف متحركه

درسنا في الفصول السابقه مسائل التغيرات بنقط اطراف ثابتة ،
وسنركز اهتمامنا في هذا الفصل على دراسة مسائل التغيرات بنقط اطراف
متحركه (متغيره) وبعض تطبيقاتها مثل معادله هاملتون - جاكوبي ، وقد ضم
هذا الفصل اربعة بنود تناولنا في الأول منها مسائل التغيرات بالنسبه للدالي
 $J[y]$ عندما تتحرك نقطتي الأطراف على مستقيمين متوازيين ، وعندما تتحرك
نقطتي الأطراف على منحنيين وتناولنا في البند الثاني مسائل التغيرات بنقط
اطراف متحركه بالنسبه للداليات العديده المتغيرات ، اما في البند الثالث ، فقد
درست معادله هاملتون - جاكوبي وبعض تطبيقاتها ، وتناولنا في البند الأخير
مسائل التغيرات بنقاط ركنيه .

٤-١: مسائل التغيرات للدالي $J[y]$ بنقاط اطراف متحركه

يضم هذا البند جزئين ، تناولنا في الأول منها منحنيات القيم القصوى ،
اذا تحركت نقطتي الأطراف على مستقيمين متوازيين ، وتناولنا في الثاني
منحنيات القيم القصوى ، عندما تتحرك نقطتي الأطراف على منحنيين .

٤-١-١: ايسط المسائل بنقط أطراف متحركه

يضم هذا الجزء تحديد الشروط اللازمه لوجود المنحنيات الحرجه للدالي
عندما تتحرك نقطتي طريفي المنحنيات $y(x)$ على

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

المستقيمين المتوازيين $x = a$ ، $x = b$ ، انظر شكل (٤ - ١) ولتحديد تلك الشروط لاحظ ان

$$\begin{aligned}\Delta J &= J[y + \varepsilon \Delta y] - J[y] \\ &= \int_a^b [F(x, y + \varepsilon \Delta y, y' + \varepsilon \Delta y') - F(x, y, y')] dx\end{aligned}$$

إذا

$$\delta J = \int_a^b (F_y \Delta y + F_{y'} \Delta y') dx \quad \dots (1)$$

وبالتكامل بالتجزئه نجد ان :

$$\begin{aligned}\delta J &= \int_a^b (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) \Delta y(x) dx + [F_{y'} \Delta y(x)]_{x=a}^{x=b} \\ &= \int_a^b (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) \Delta y(x) dx + F_{y'}|_{x=b} \Delta y(b) - F_{y'}|_{x=a} \Delta y(a) \quad \dots (2)\end{aligned}$$

وعندما $\Delta y(a) = \Delta y(b) = 0$ نجد ان $\delta J = 0$ يعني ان

$$\int_a^b (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) \Delta y(x) dx = 0$$

وبالتالي فان (3) $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$ لكل $a < x < b$

إذا لكي يكون المنحني $y(x)$ حلاً لمسأله التغيرات بنقاط اطراف متحركه ، يجب ان يكون $y(x)$ منحني قيمة قصوى للدالي $J[y]$ ، وهذا يعني ان $y(x)$ يجب ان يحقق معادله اويلر - لاجرانج (3) . لكن اذا كان $y(x)$ قيمه قصوى للتكامل في (2) ، فإن $\delta J = 0$ يعني ان

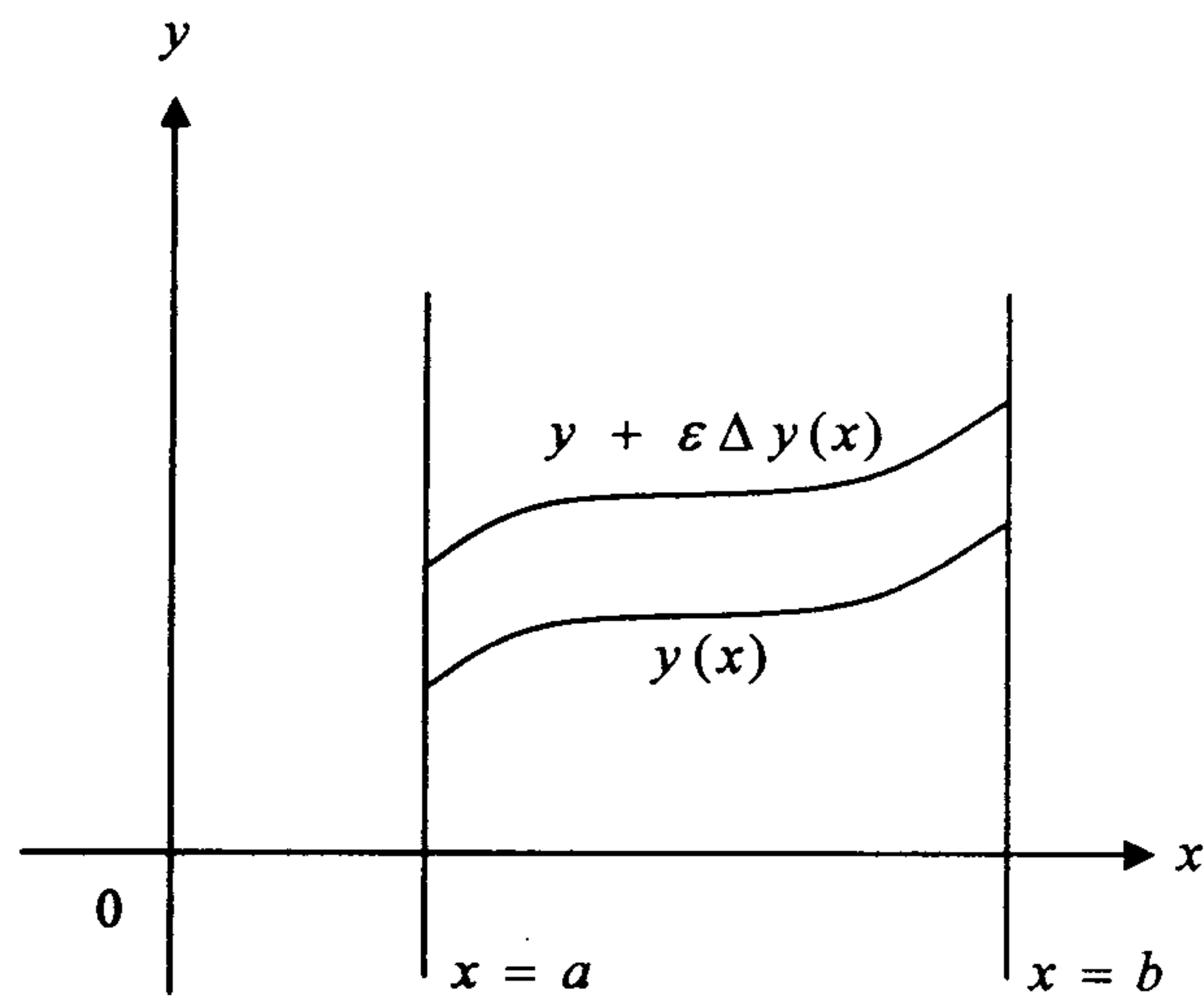
$$F_{y'}|_{x=b} \Delta y(b) - F_{y'}|_{x=a} \Delta y(a) = 0$$

ومنها نجد ان

$$F_{y'}|_{x=a} \Delta y(a) = 0 \quad ، \quad F_{y'}|_{x=b} \Delta y(b) = 0 \quad \dots (4)$$

لأن $\Delta y(x)$ داله اختياريه غير صفريه عند a ، b .

إذاً لحل مسأله التغيرات بنقط اطراف متغيره ، يجب اولاً حل معادله اويلر- لاجرانج ثم استخدام الشرط (4) ليعين الثوابت الأختباريه .



شكل (٤- ١) .

مثال ٤- ١- ١ :

اوجد منحنيات القيم القصوى للدالي

$$J[y] = \int_0^1 y'^2 dx \text{ ، حيث } y(0) \text{ ، } y(1) \text{ ليست ثابتة.}$$

الحل

بما ان معادله اويلر- لاجرانج للدالي $J[y]$ ، هي $y'' = 0$ ، اذاً $y = ax + b$. ولكي نوجد a ، b نستخدم الشرط (4) ، وهو

$$F_y|_{x=1} = 0 \text{ ، } F_y|_{x=0} = 0$$

لكن $F_y = 2y' = 0$ ، يعني ان $y = b$ هو المنحني الحرج للدالي $J[y]$.

ملاحظه:

اذا كان $y(a) = A$ ، $y(b)$ متغيره ، فإن وجود قيمه قصوى للدالي

$J[y]$ يعني ان

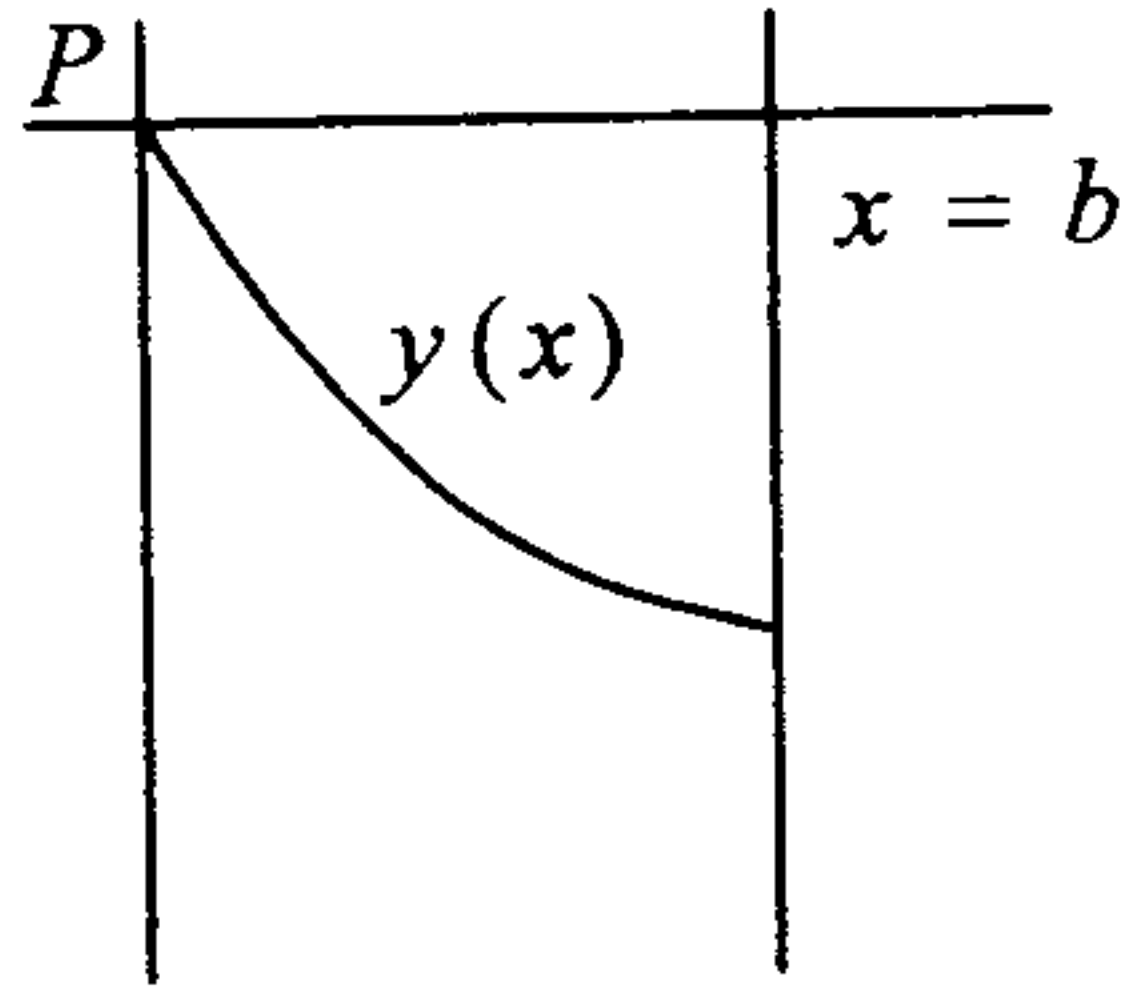
$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \text{ لكل } a \leq x < b \text{ و } F_{y'}|_{x=b} = 0$$

مثال ٤- ١- ٢:

انزلق جسم ثقيل من النقطه $P(a, A)$ الى اسفل على منحنى في مستو رأسي .
ما شكل المنحنى الذي يحدده الجسم ليصل الى الخط الرأسي $x = b$ ، $b \neq a$ في
اقل زمن ممكن .

الحل

نفرض ان نقطه الانطلاق منطبقه على نقطه الأصل للنظام الاحداثى xy كما
في شكل (٤- ٢) .



شكل (٤- ٢)

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow v = \sqrt{1 + y'^2} \frac{dx}{dt} \quad \text{إذا}$$

$$dt = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v} dx \quad \text{وعليه فإن}$$

لكن $\frac{1}{2}mv^2 = mgy$ ، حيث g ثابت الجاذبيه
الأرضيه

$$t = \int \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx \quad \text{وإتالي فإن } dt = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} \quad \text{إذا } v = \sqrt{2gy}$$

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \quad \text{ومنها نجد ان معادله اويلر- لاجرانج } F = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}}$$

تأخذ الشكل

$$F_{y'}|_{x=b} = 0 \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{y(1 + y'^2)}} = C \quad \dots (1)$$

وحيث ان الحل العام لمعادله اويلر- لاجرانج " انظر مثال (٢- ١- ٩) "، هو

$$y = r(1 - \cos \theta) \quad , \quad x = r(\theta - \sin \theta)$$

وهو منحنى دحروجي (cycloid). اذاً لتحديد r نستخدم الشرط $F_{y'}|_{x=b} = 0$

فنجد ان

$$\frac{y'}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}}|_{x=b} = 0$$

وعليه فإن $y'|_{x=b} = 0$ ، وبالتالي فإن المماس للمنحنى $y(x)$ عند طرفه الأيمن

مماس افقي، وهذا يعني ان $\theta = \pi$ عندما $x = b$.

$$b = r(\pi - \sin \pi) = r\pi \quad \text{اذاً}$$

وعليه فإن $r = \frac{b}{\pi}$ ، وبالتالي فإن المنحنى المطلوب هو

$$y = \frac{b}{\pi}(1 - \cos \theta) \quad , \quad x = \frac{b}{\pi}(\theta - \sin \theta)$$

٤- ١- ٢: المنحنيات الحرجه للدالي $J[y]$ عندما تتحرك نقطتي الأطراف

على منحنين

لتحديد الشروط اللازمه لوجود منحنيات قيم قصوى للدالي

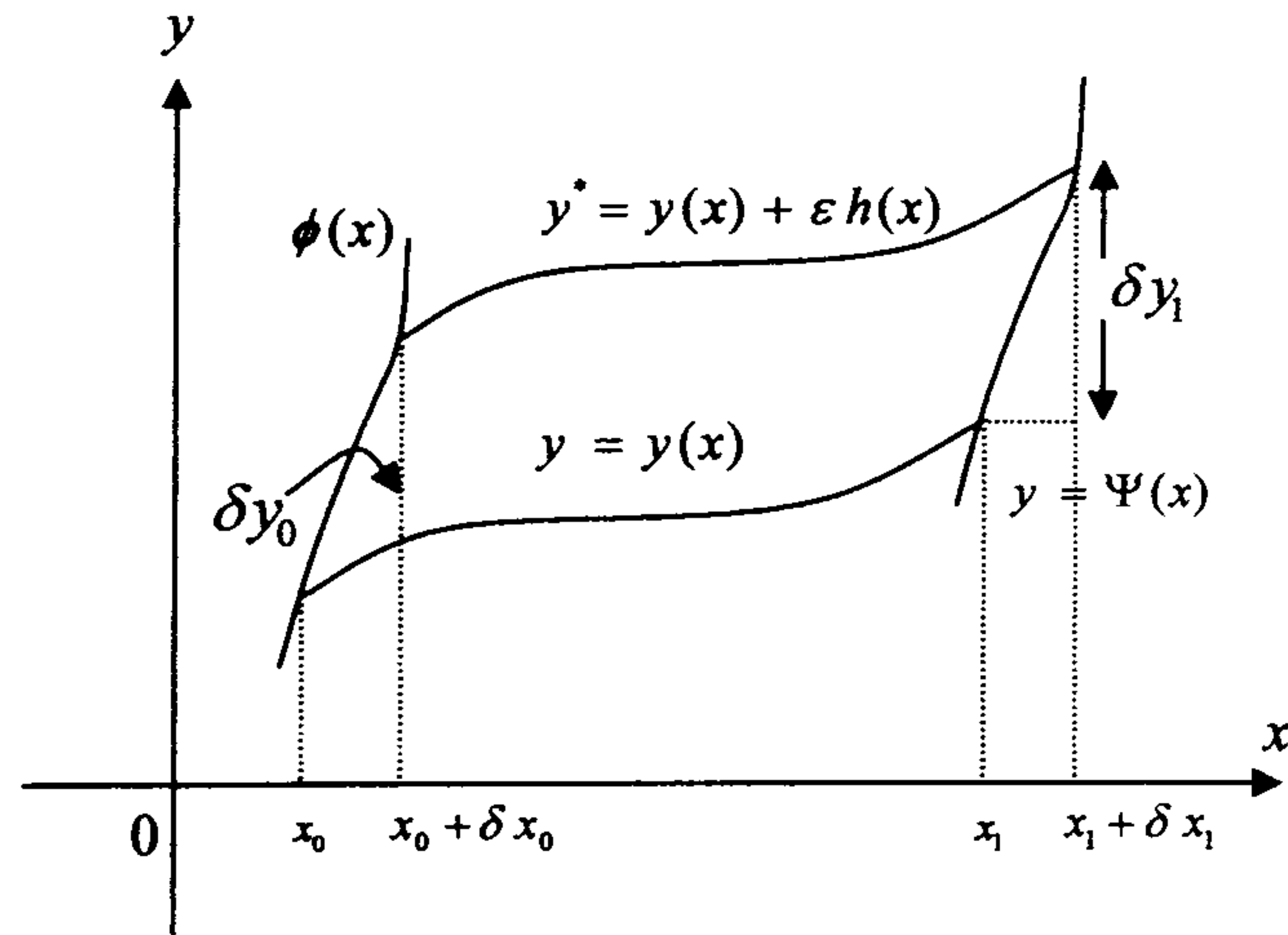
$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \quad \text{في هذه الحاله، نفرض ان } (x_0, y_0), (x_1, y_1) \text{ تمثلان}$$

نقطتي النهايه للمنحنى $y(x)$ ، وان (x_0, y_0) تتحرك على المنحنى $y = \phi(x)$

بينما تتحرك (x_1, y_1) على المنحنى $y = \Psi(x)$ ، ولنفرض ان

$(x_0 + \delta x_0, y_0 + \delta y_0), (x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$ تمثلان نقطتي النهايه

للمنحنى $y^* = y(x) + \varepsilon h(x)$ انظر شكل (٤- ٣).



شكل (٤-٣) .

إذا

$$\begin{aligned} \Delta J[y] &= J[y + \varepsilon h] - J[y] \\ &= \int_{x_0 + \delta x_0}^{x_1 + \delta x_1} F(x, y + \varepsilon h, y' + \varepsilon h') dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \end{aligned}$$

وعليه فإن

$$\begin{aligned} \Delta J[y] &= \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y + \varepsilon h, y' + \varepsilon h') - F(x, y, y')] dx \\ &+ \int_{x_1}^{x_1 + \delta x_1} F(x, y + \varepsilon h, y' + \varepsilon h') dx - \int_{x_0}^{x_0 + \delta x_0} F(x, y + \varepsilon h, y' + \varepsilon h') dx \end{aligned}$$

وبالتالي فإن

$$\delta J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) h(x) dx + [F_{y'} h(x) + F \delta(x)]_{x_0}^{x_1}$$

لكن من شكل (٤-٣)، نجد ان

$$h(x_1) = \delta y_1 - y'(x_1) \delta x_1, \quad h(x_0) = \delta y_0 - y'(x_0) \delta x_0$$

إذا

$$\delta J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) h(x) dx + [F_{y'} \delta y]_{x_0}^{x_1} + (F - F_{yy'}) \delta x \Big|_{x_0}^{x_1} \dots (1)$$

وتسمى المعادله (1) **التغير العام** (general variation) **للدالي** $J[y]$

وعندما يكون للدالي $J[y]$ قيمه قصوى على $y(x)$ نجد ان $\delta J = 0$ وعليه فإن

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) h(x) dx + F_{y'} \delta y \Big|_{x_0}^{x_1} + (F - F_{yy'}) \delta x \Big|_{x_0}^{x_1} = 0$$

$$\delta y_1 = (\phi'(x_1) + \varepsilon_1) \delta x_1, \quad \delta y_0 = (\phi'(x_0) + \varepsilon_0) \delta x_0 \quad \text{لكن}$$

$$\delta x_1 \rightarrow 0 \text{ عندما } \varepsilon_1 \rightarrow 0, \quad \delta x_0 \rightarrow 0 \text{ عندما } \varepsilon_0 \rightarrow 0 \quad \text{و}$$

$$\text{وبالتالي فإن } F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

$$[F_{y'} \Psi' + F - y' F_{y'}]_{x=x_1} \delta x_1 - (F_{y'} \phi' + F - y' F_{y'}) \Big|_{x=x_0} \delta x_0 = 0 \quad \dots (2)$$

وحيث ان $\delta x_0, \delta x_1$ مستقلتين عن بعضهما ، اذا (2) تعني ان

$$F_{y'} \phi' + F - y' F_{y'} \Big|_{x=x_0} = 0$$

$$F_{y'} \Psi' + F - y' F_{y'} \Big|_{x=x_1} = 0$$

وعليه فإن

$$\left. \begin{aligned} F + (\phi' - y') F_{y'} \Big|_{x=x_0} &= 0 \\ F + (\Psi' - y') F_{y'} \Big|_{x=x_1} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

والتي يطلق عليها الشروط الأعتراضيه (Transversality Conditions) . اذا

لحل كل مسائل التغيرات من هذا النوع ، يجب ان تحل معادله اويلر- لاجرانج

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

ثم تستخدم الشروط الأعتراضيه (3) لأيجاد الثوابت الوارده في حل معادله اويلر- لاجرانج .

ملاحظه : للتعبير عن المعادله (3) بالشكل القانوني ، نرض ان $P = F_{y'}$ ،

$$\text{اذا } H = p y' - F$$

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) h(x) dx + [P \delta y - H \delta x]_{x=x_0}^{x=x_1} \dots (4)$$

وإذا كان للدالي $J[y]$ قيمه قصوى على $y(x)$ ، فإن $y(x)$ يجب ان تحقق الشروط الآتية

$$\left. \begin{aligned} x_0 < x < x_1, F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0, \\ P \delta y - H \delta x \Big|_{x=x_0}^{x=x_1} = 0 \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

وإذا كانت x_0, x_1 ثابتين، فإن $\delta x = 0, \delta y = 0$ وعليه فإن (5) تصبح كالاتي

$$a \leq x \leq b, F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

اما اذا كانت $x = a, x = b$ ، فإن $\delta x = 0, \delta y = h(x)$.

مثال ٤- ١- ٣: اوجد الشروط الأعتراضيه للدالي

$$J[y] = \int_a^b A(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx$$

الحل

بما ان

$$F(x, y, z) = A(x, y) \sqrt{1 + y'^2}$$

إذا

$$F_y = \frac{A(x, y) y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{F(x, y, y') y'}{1 + y'^2}$$

وعليه فإن الشروط الأعتراضيه هي

$$F + (\phi' - y') F_y = 0 \Rightarrow \frac{(1 + y' \phi') F}{1 + y'^2} = 0$$

$$F + (\Psi' - y') F_y = 0 \Rightarrow \frac{(1 + y' \Psi') F}{1 + y'^2} = 0$$

ومنها نجد ان $y' \psi' = -1, y' \phi' = -1$

وبالتالي فإن شرطي الأعتراض في هذه الحالة هي شروط التعامد.

مثال ٤- ١- ٤ :

ادرس منحنيات القيم القصوى للدالي

$$y(b) = b - 5, \quad y(0) = 0, \quad J[y] = \int_0^b \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y} dx$$

الحل

بما ان

$$F = F(y, y')$$

إذا التكامل الاول لمعادله اويلر- لاجرانج هو

$$F - y' F_{y'} = c_1$$

$$\frac{1}{y\sqrt{1 + y'^2}} = c_1$$

وعليه فإن

$$y\sqrt{1 + y'^2} = \frac{1}{c_1} = c$$

ومنها نجد ان

$$y' = \frac{1}{y} \sqrt{c^2 - y^2}$$

وبالتالي فإن

$$(c^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} y dy = dx$$

وعليه فإن

$$(x - a)^2 + y^2 = c^2$$

إذا

$$a = c, \quad y(0) = 0$$

لكن

وحيث ان شرط الأعتراض للدالي $J[y]$ يتحول الى شرط التعامد حسب المثال

(٤- ١- ٣)، إذا الخط المستقيم $y(b) = b - 5$ يجب ان يكون قطعاً في الدائره،

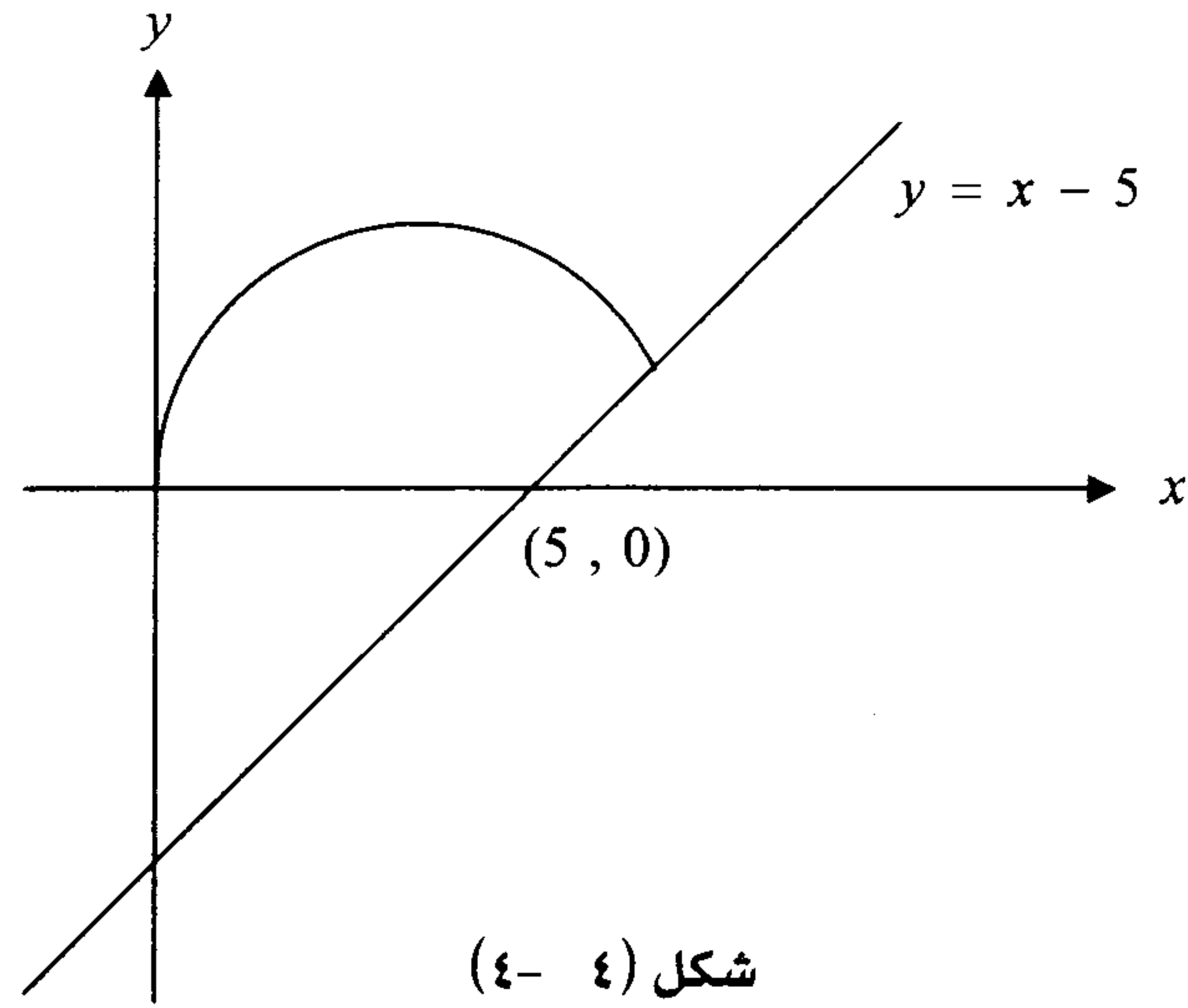
ومن ثم فإن مركز تلك الدائره يقع على النقطه (5, 0) لان المستقيم

$y(b) = b - 5$ يقطع محور السينات. إذا $(x - 5)^2 + y^2 = 25$ ، وعليه فإن

وبالتالي فإنه يمكن الحصول على القيم القصوى للدالي $y = \pm \sqrt{10x - x^2}$

$J[y]$ ، على أقواس من الدائره $y = -\sqrt{10x - x^2}$ ، $y = \sqrt{10x - x^2}$ شكل

(٤- ٤)



ملاحظه:

(١) اذا كانت $A(x_0, y_0)$ ثابتة وكانت نقطة الحدود $B(x_1, y_1)$ تتحرك على خط رأسي $x = x_1$ ، فإن $\delta x_1 = 0$ ، وبالتالي فإن الشرط الضروري

$$\text{لوجود قيم قصوى هو } F_y \Big|_{x=x_1} = 0, \quad F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

(ب) إذا كانت $A(x_0, y_0)$ ثابتة ونقطة الحدود $B(x_1, y_1)$ تتحرك على خط مستقيم افقي $y = y_1$ ، فإن الشرط الضروري لوجود قيم قصوى هو

$$(F - y' F_{y'}) \Big|_{x=x_1} = 0, \quad F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

٤-٢: داليات عديدة المتغيرات

سنركز اهتمامنا في هذا الجزء على منحنيات القيم القصوى للدالي

$$J[y, z] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z') dx, \quad \text{اذا وقعت نقطتي النهاية } A(x_0, y_0, z_0),$$

على سطحين، ثم نعمم ذلك بالنسبة للداليات $J[y_1, \dots, y_n]$.

ولايجاد منحنى من بين كل المنحنيات التي تقع نقطتي نهايتها على السطحين $\Psi(y, z)$ ، $\phi(y, z)$ ، يجعل الدالي $J[y, z]$ يملك قيماً قصوى ، لاحظ ان

$$\begin{aligned} \Delta J &= \int_{x_0 + \delta x_0}^{x_1 + \delta x_1} F(x, y + \delta y, z + \delta z, y' + \delta y', z' + \delta z') dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z') dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \delta y, z + \delta z, y' + \delta y', z' + \delta z') dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z') dx \\ &\quad + \int_{x_1}^{x_1 + \delta x_1} F(x, y + \delta y, z + \delta z, y' + \delta y', z' + \delta z') dx - \int_{x_1}^{x_1 + \delta x_1} F(x, y + \delta y, z + \delta z, y' + \delta y', z' + \delta z') dx \end{aligned}$$

إذا

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} [(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) \delta y + (F_z - \frac{d}{dx} F_{z'}) \delta z] dx + [F \delta x + F_y \delta y + F_{z'} \delta z]_{x_0}^{x_1}$$

وعليه فإن $\delta J = 0$ يعني ان

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \quad \dots (1)$$

$$F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0 \quad \dots (2)$$

$$[F \delta x + F_y \delta y + F_{z'} \delta z]_{x_0}^{x_1} = 0 \quad \dots (3)$$

وإذا فرضنا ان $i = 0, 1$ ، $z(x_i) = z_i$ ، $y(x_i) = y_i$ نجد ان

$$\delta y \Big|_{x=x_1} = \delta y_1 - y'(x_1) \delta x_1 \quad , \quad \delta y \Big|_{x=x_0} = \delta y_0 - y'(x_0) \delta x_0$$

$$\delta z \Big|_{x=x_1} = \delta z_1 - z'(x_1) \delta x_1 \quad , \quad \delta z \Big|_{x=x_0} = \delta z_0 - z'(x_0) \delta x_0$$

وعليه فإن

$$F - y' F_y - z' F_{z'} \Big|_{x=x_0} \delta x_0 + F_{y'} \Big|_{x=x_0} \delta y_0 + F_{z'} \Big|_{x=x_0} \delta z_0 = 0 \quad \dots (4)$$

$$F - y' F_y - z' F_{z'} \Big|_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'} \Big|_{x=x_1} \delta y_1 + F_{z'} \Big|_{x=x_1} \delta z_1 = 0 \quad \dots (5)$$

لكن $A(x_0, y_0, z_0)$ تقع على السطح $z = \phi(x, y)$ بينما $B(x_1, y_1, z_1)$ تقع

على السطح $z = \Psi(x, y)$ ، إذا

$$\left. \begin{aligned} \delta z_0 &= \phi'_{x_0} \delta x_0 + \phi'_{y_0} \delta y_0 \\ \delta z_1 &= \phi'_{x_1} \delta x_1 + \phi'_{y_1} \delta y_1 \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

ومن (4)، (5)، (6) نجد ان

$$F - y'F_y - z'F_z \Big|_{x=x_0} \delta x_0 + F_y \Big|_{x=x_0} \delta y_0 + F_z \Big|_{x=x_0} (\phi'_{x_0} \delta x_0 + \phi'_{y_0} \delta y_0) = 0$$

$$F - y'F_y - z'F_z \Big|_{x=x_1} \delta x_1 + F_y \Big|_{x=x_1} \delta y_1 + F_z \Big|_{x=x_1} (\phi'_{x_1} \delta x_1 + \phi'_{y_1} \delta y_1) = 0$$

وعليه فإن

$$[F - y'F_y + (\phi'_{x_0} - z')F_z] \delta x_0 + (F_y + \phi'_{y_0} F_z) \delta y_0 \Big|_{x=x_0} = 0$$

$$[F - y'F_y + (\phi'_{x_1} - z')F_z] \delta x_1 + (F_y + \phi'_{y_1} F_z) \delta y_1 \Big|_{x=x_1} = 0$$

وحيث ان δx_0 ، δy_0 مستقلة عن بعضها، وكذلك δx_1 ، δy_1 مستقلة عن بعضهما ايضاً، اذا

لا نراها مستقلة
عني بسببها

$$F - y'F_y + (\phi'_{x_0} - z')F_z = 0 \quad \dots (7)$$

$$F_y + \phi'_{y_0} F_z = 0 \quad \dots (8)$$

$$F - y'F_y + (\Psi'_{x_1} - z')F_z = 0 \quad \dots (9)$$

$$F_y + \Psi'_{y_1} F_z = 0 \quad \dots (10)$$

وهي الشروط الاعتراضية التي يمكن منها حساب الثوابت الاربعة التي تظهر في
الحل العام لمعادلتني اويلر- لاجرانج (1)، (2).

ملاحظة:

(1) إذا كانت $A(x_0, y_0, z_0)$ تقع على المنحني $z_0 = \Psi(x_0)$ ، $y_0 = \phi(x_0)$

فإن $B(x_1, y_1, z_1)$ تقع على المنحني $z_1 = \Psi(x_1)$ ، $y_1 = \phi(x_1)$.

$$\delta z_0 = \Psi'(x_0) \delta x_0 \quad ، \quad \delta y_0 = \phi'(x_0) \delta x_0$$

$$\delta z_1 = \Psi'(x_1) \delta x_1 \quad ، \quad \delta y_1 = \phi'(x_1) \delta x_1$$

وتصبح الشروط الاعتراضية كالآتي:

$$F + (\phi - y') F_y + (\Psi' - z') F_z \Big|_{x=x_0} = 0$$

$$F + (\phi - y') F_y + (\Psi' - z') F_z \Big|_{x=x_1} = 0$$

(ب) إذا كان $J[y_1, \dots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx$ وكانت

$$B(x_1, y_{11}, y_{21}, \dots, y_{n1}) \quad , \quad A(x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$$

نقاط متحركة ، فإن الشروط الأعتراضيه هي

$$(F - \sum_{i=1}^n y'_i F_{y'_i}) \Big|_{x=x_0} \delta x_0 + \sum_{i=1}^n F_{y'_i} \Big|_{x=x_0} \delta y_{i0} = 0$$

$$(F - \sum_{i=1}^n y'_i F_{y'_i}) \Big|_{x=x_1} \delta x_1 + \sum_{i=1}^n F_{y'_i} \Big|_{x=x_1} \delta y_{i1} = 0$$

مثال ٤- ٢- ١

أوجد الشروط الأعتراضيه للدالي

$$Z_1 = \phi(x_1, y_1) \quad , \quad J[y, z] = \int_{x_0}^{x_1} A(x, y, z) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx$$

الحل

الشروط الأعتراضيه هي

$$F - y' F_y + (\phi'_x - z') F_z \Big|_{x=x_1} = 0 \Rightarrow 1 + \phi'_x z' = 0$$

$$(F_y + F_z \phi'_y) \Big|_{x=x_1} = 0 \Rightarrow y' + z' \phi'_y = 0$$

ومنها نجد ان $\frac{1}{\phi'_x} = \frac{y'}{\phi'_y} = \frac{z'}{-1}$ وهي شروط تعامد منحنى القيم القصوى

والسطح $Z = \phi(x, y)$.

مثال ٤- ٢- ٢

أوجد اقل بعد بين السطحين $Z = \psi(x, y)$ ، $Z = \phi(x, y)$

الحل

بما ان

$$A(x_0, y_0, z_0) \quad , \quad L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2+z'^2} \, dx$$

تحقق العلاقة $Z_0 = \phi(x_0, y_0)$ والنقطة $B(x_1, y_1, z_1)$ تحقق العلاقة
عائلة مستقيمات في الفضاء . لكن الشروط الأعتراضيه للدالي L هي شروط
تعامد حسب مثال (٤- ٢- ١) ، إذا يمكن الحصول على القيم القصوى على
المستقيمات العموديه على السطح $Z = \phi(x, y)$ عند $A(x_0, y_0, z_0)$ ، والعموديه
على السطح $Z = \psi(x, y)$ عند $B(x_1, y_1, z_1)$.

مثال ٤- ٢- ٣

اوجد منحنيات القيم القصوى للدالي $J[y, z] = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + z'^2 + 2yz) \, dx$ ، حيث

$$y(0) = 0 \quad , \quad z(0) = 0 \quad \text{بينما تتحرك } B(x_1, y_1, z_1) \text{ في المستوى } x = x_1$$

الحل

بما ان معادلتى اويلر- لا جرانج للدالي $J[y, z]$ هما

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \Rightarrow y'' - z = 0 \quad \dots (1)$$

$$F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0 \Rightarrow z'' - y = 0 \quad \dots (2)$$

ويحل المعادلتين (١) ، (٢) نجد ان

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

$$Z = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x$$

نكن $Z(0) = 0$ ، $y(0) = 0$ إذا ،

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

$$C_1 + C_2 - C_3 = 0$$

وعليه فان $C_1 + C_2 = 0$ ، وبالتالي فان $C_1 = -C_2$ لكن الشرط الأعتراضي عند نقطة الحدود المتحركه هو

$$(F - y' F_{y'} - z' F_{z'}) \Big|_{x=x_1} \delta_{x_1} + F_{y'} \Big|_{x=x_1} \delta_{y_1} + F_{z'} \Big|_{x=x_1} \delta_{z_1} = 0$$

والنقطه $B(x_1, y_1, z_1)$ تتحرك في المستوى $x = x_1$ ، اذا $\delta_{x_1} = 0$ بينما كل من

$$\delta_{y_1} ، \delta_{z_1} \text{ اختياريه ، وعليه فان } F_{y'} \Big|_{x=x_1} = 0 \text{ و } F_{z'} \Big|_{x=x_1} = 0$$

$$\text{نكن } F_{y'} = 2y' \text{ و } F_{z'} = 2z' \text{ ، إذا } y'(x_1) = 0 \text{ ، } z'(x_1) = 0$$

وعليه فان

$$C_1 e^{x_1} - C_2 e^{-x_1} - C_3 \cos x_1 + C_4 \sin x_1 = 0 \quad \dots (3)$$

$$C_1 e^{x_1} - C_2 e^{-x_1} + C_3 \cos x_1 - C_4 \sin x_1 = 0 \quad \dots (4)$$

ويجمع (3) و (4) ينتج ان

$$C_1 e^{x_1} - C_2 e^{-x_1} = 0$$

نكن $C_2 = -C_1$ اذا $C_1(e^{x_1} + e^{-x_1}) = 0$ ، وعليه فان $C_1 = 0$ ، وبالتالي فان

$$C_2 = 0 \text{ . لكن } C_3 = C_1 + C_2 \text{ ، اذا } C_3 = 0 \text{ وعليه فان } C_4 \cos x_1 = 0$$

فإذا كان $\cos x_1 \neq 0$ ، فإن $C_4 = 0$ ، وفي هذه الحالة تكون منحنيات القيم

$$\text{القصوى هي المستقيم } Z = 0 \text{ ، } y = 0$$

اما اذا كان $\cos x_1 = 0$ ، فإن $x_1 = \frac{\pi}{2} + n\pi$ ، حيث n عدد صحيح ، وعليه

فان C_4 ثابت اختياري وبالتالي فان منحنيات القيم القصوى هي

$$Z = -C_4 \sin x \text{ ، } y = C_4 \sin x$$

٤-٣: معادله هاملتون - جاكوبي Hamilton - Jacobi Equation

وفي هذا البند ، سنركز اهتمامنا على اشتقاق معادله هاملتون جاكوبي ، وبعض تطبيقاتها . وللوصول الى هدفنا ، نعتبر ان

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \quad \dots (1)$$

معرفةً على المنحنيات الواقعة في منطقه R ، وان للدالي $J[y]$ قيمه قصوى واحده على المنحنى المار بالنقطتين A, B ، ونسمي التكامل $S = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$ والمحسوب على منحنى القيم القصوى الواصل بين $A(x_0, y_0^1)$ ، $B(x_1, y_1^1)$ اقصر بعد (geodetic distance) بين A, B ، فمن الواضح ان S داله وحيدده القيمه (single valued function) للإحداثيات A, B .

مثال ٤-٣-١

(١) اذا كانت J تمثل طول القوس ، فان S تمثل البعد بين A, B .

$$(ب) اذا كانت $v = v(x, y, z, x', y', z')$ ، $T = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{v} dt$$$

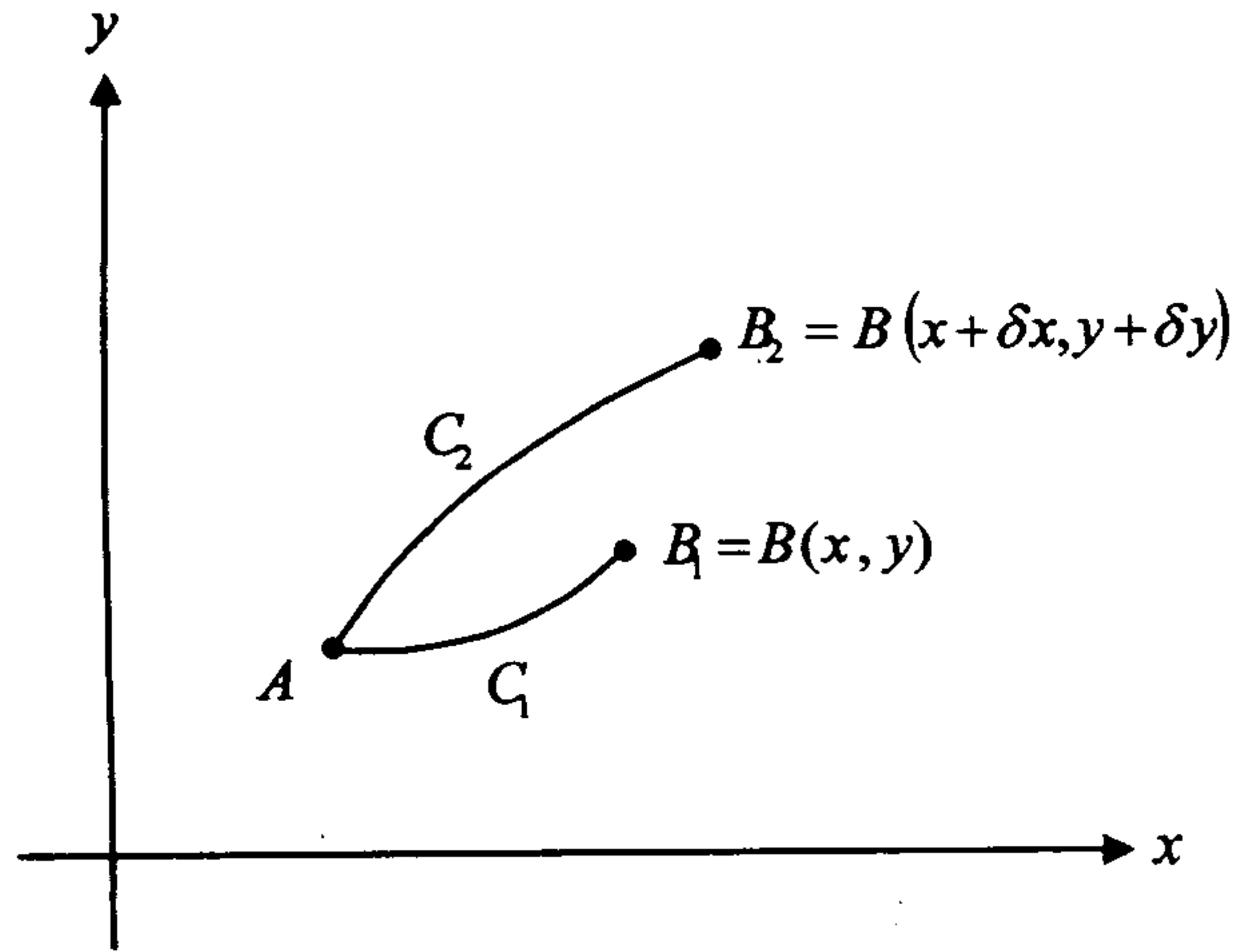
سرعه الجسم عند أي نقطه والتي تعتمد على احداثيات تلك النقطه واتجاهها ، فان S تمثل الزمن الذي يستغرقه الجسم لانتقال من A الى B .

والآن لنفرض ان $A = (a, y_a)$ نقطه ثابتة بينما ، $B = (x, y)$ نقطه متحركه اذا $S = S(x, y)$ داله معتمده على B فقط . ولإيجاد المعادله التفاضليه التي تكون S حلاً لها ، يجب ان نحسب $\frac{\partial S}{\partial x}$ ، $\frac{\partial S}{\partial y}$ من العلاقه :

$$\Delta S = S(x + \delta x, y + \delta y)$$

لكن $\Delta J = J[c_2] - J[c_1]$ ، حيث c_1 هو منحنى القيم القصوى الواصل بين A, B ، اما c_2 فهو منحنى القيم القصوى الواصل بين A, B ،

شكل (٤-٥) ، $B(x+\delta x, y+\delta y)$ ، إذا $ds = \delta J$. لن
 حسب العلاقة (5) في بند (٤-١-٢) ، حيث H دالة هاملتون .



شكل (٤-٥)

إذا

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -H \quad , \quad \frac{\partial S}{\partial y} = P \quad \dots (1)$$

حيث $H = H(x, y, p(x, y)) = P_y - F$ ، $P = P(x, y) = F_y$ ومن
 (١) نجد ان S يجب ان تحقق العلاقة الآتية :

$$\frac{\partial S}{\partial x} + H(x, y, \frac{\partial S}{\partial y}) = 0 \quad \dots (2)$$

والتي يطلق عليها معادله هاملتون - جاكوبي .

والآن الى المبرهنات الآتية

مبرهنة ٤-٣-١

إذا كانت $S = S(x, y, \alpha)$ حلاً لمعادله هاملتون - جاكوبي ، حيث α

ثابت التكامل عند الحل ، فإن $\frac{\partial S}{\partial \alpha}$ ثابت على كل المنحنيات الحرجه (منحنيات القيم القصوى) ، $y = y(x)$ ، للدالي $J[y]$.

البرهان

يكفي ان نثبت ان $\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha} \right) = 0$ ، ولإثبات ذلك ، لاحظ ان

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha} \right) = \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \alpha} + \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial \alpha} \cdot \frac{dy}{dx} \quad \dots (3)$$

لكن تفاضل طرف (2) بالنسبه للوسيط α هو

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \alpha} = - \frac{\partial H}{\partial P} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha \partial y} \quad \dots (4)$$

إذاً من (3) ، (4) نجد ان

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha} \right) = \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial \alpha} \left(\frac{dy}{dx} - \frac{\partial H}{\partial P} \right)$$

لكن $\frac{dy}{dx} = \frac{\partial H}{\partial P}$ ، إذاً $\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha} \right) = 0$ ، وعليه فإن $\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \beta$ ، حيث β ثابت .

□

مبرهنة ٤ - ٣ - ٢ "مبرهنة جاكوبي"

إذا كان $S = S(x, y, \alpha)$ حلاً لمعادله هاملتون - جاكوبي ، وكان

$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha \partial y} \neq 0$ ، فإن $y = y(x, \alpha, \beta)$ ، حيث β ثابت معرف بالعلاقه $\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \beta$ ،

حل عام للنظام القانوني $P = \frac{\partial S}{\partial y}$

$$\frac{dP}{dx} = - \frac{\partial H}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial P} = \frac{dy}{dx}$$

البرهان

بما ان $\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha} \right) = 0$ ، $\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha \partial y} \neq 0$ ، $\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha} \right) = \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \alpha} + \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial \alpha} \cdot \frac{dy}{dx}$

حسب ميرهنه (٤- ٣- ١) .

$$\text{إذا } \frac{\partial S}{\partial y} = P \text{ لكن } \frac{dy}{dx} = \frac{\partial H}{\partial P} \text{ إذا}$$

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial H}{\partial P} \quad \dots (5) \end{aligned}$$

لكن $0 = \frac{\partial S}{\partial x} + H(x, y, \frac{\partial S}{\partial y})$ ، إذا بالتفاضل بالنسبة الى y ، نجد ان

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial P} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \quad \dots (6)$$

ومن (5) ، (6) نجد ان

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y}$$

□

ملاحظة:

إذا كان

$$S = S(x, y_1, \dots, y_n) \quad , \quad \mathcal{J}[y_1, \dots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dx$$

فإن معادله هاملتون - جاكوبي هي

$$\frac{\partial S}{\partial x} + H(x, y_1, \dots, y_n, \frac{\partial S}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial y_n}) = 0$$

$$P_i' = -\frac{\partial H}{\partial y_i} \quad , \quad y_i' = \frac{\partial H}{\partial P_i} \quad , \quad P_i = F_{y_i} \quad , \quad \frac{\partial S}{\partial y_i} = P_i \quad , \quad \frac{\partial S}{\partial x} = -H$$

مثال ٤- ٣- ١

حل معادله هاملتون - جاكوبي المناظرة للدالي

$$\mathcal{J}[y] = \int_a^b y'^2 dx$$

الحل

بما أن $F(x, y, y') = y'^2$ ، $P = F_{y'} = 2y'$ ، إذا داله هاملتون هي

$$H(x, y, p) = Py' - F = \frac{1}{2}P^2 - \frac{1}{4}P^2 = \frac{1}{4}P^2$$

وعليه فإن معادله هاملتون - جاكوبي هي

$$\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 = 0$$

وهي معادله تفاضليه جزئية غير متجانسه من الرتبة الأولى ، ولحلها نترض أن :

$$S = u(x) + v(y) \text{ ، إذا ، } \frac{du}{dx} + \frac{1}{4} \left(\frac{dv}{dy} \right)^2 = 0 \text{ ، وعليه فإن ، } \frac{du}{dx} = c \text{ ، لأن } \frac{du}{dx} \neq 0$$

تعتمد على y و $\left(\frac{dv}{dy} \right)^2$ لا يعتمد على x . إذا $u = -\alpha^2 x$ ، حيث α ثابت ،

$$\text{وعليه فإن } -\alpha^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{dv}{dy} \right)^2 = 0 \text{ ، وبالتالي فإن ، } \frac{dv}{dy} = 2\alpha \text{ ، وعليه فإن}$$

$$v = 2\alpha y + \beta \text{ ، إذا ، } S = -\alpha^2 x + 2\alpha y + \beta \text{ حل لمعادله هاملتون جاكوبي .}$$

لكن من مبرهنه (٤- ٣- ١) ، نجد أن $\frac{\partial S}{\partial \alpha} = K$ ، إذا $y = \alpha x + a$ ، $\frac{\partial S}{\partial \beta} = K_1$ ،

وعليه فإن منحنى القيم القصوى هي خط مستقيم .

مثال ٤- ٣- ٢ :

اوجد معادله اقصر مسار على سطح فيه

$$dS = \sqrt{[\phi_1(x) + \phi_2(y)] (dx^2 + dy^2)}$$

الحل :

$$J[y] = \int_a^b \sqrt{[\phi_1(x) + \phi_2(y)] (1 + y'^2)} dx \quad \text{بما أن}$$

$$H = \frac{\sqrt{\phi_1(x) + \phi_2(y)}}{\sqrt{1 + y'^2}} = \sqrt{\phi_1(x) + \phi_2(y)} \cdot \sqrt{1 - P^2} \quad \text{إذا}$$

$$H^2 + P^2 = \phi_1(x) + \phi_2(y) , P = \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} \quad \text{حيث}$$

وعليه فإن معادله هاملتون - جاكوبي هي

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 - \phi_1(x) = \phi_2(y) - \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 \quad \text{أو} \quad \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 = \phi_1(x) + \phi_2(y)$$

وهي معادله تفاضليه جزئية ذات متغيرات منفصلة ، وعند وضع

$$\phi_2(y) - \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 = \alpha \quad , \quad \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 - \phi_1(x) = \alpha$$

نجد أن

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \sqrt{\phi_2(y) - \alpha} \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \sqrt{\phi_1(x) + \alpha}$$

وعليه فإن

$$P = \int \sqrt{\phi_1(x) + \alpha} dx + \int \sqrt{\phi_2(y) - \alpha} dy$$

إذا معادله اقصر مسار هو المستقيم $\frac{\partial P}{\partial x} = \beta$ على الشكل

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\phi_1(x) + \alpha}} - \int \frac{dy}{\sqrt{\phi_2(y) - \alpha}} = \beta$$

مثال ٤- ٣- ٣

اوجد معادله هاملتون - جاكوبي للدالي

$$\mathcal{J}[y, z] = \int_a^b (y'^2 + z'^2 - 2cz) dx$$

الحل

بما أن معادله هاملتون - جاكوبي للدالي $\mathcal{J}[y, z]$ هي

$$H(x, y, z, P_1, P_2) = P_1 y' + P_2 z' - F(x, y, z, y', z') , \frac{\partial \delta}{\partial x} + H(x, y, z, P_1, P_2) = 0$$

$$P_2 = F_z , P_1 = F_y , F = y'^2 + z'^2 - 2cz$$

$$P_2 = 2z' \quad , \quad P_1 = 2z' \quad \text{إذا}$$

$$H = y'^2 + z'^2 + 2cz = \frac{1}{4}P_1^2 + \frac{1}{4}P_2^2 + 2cz \quad \text{وعليه فإن}$$

$$P_2' = -\frac{\partial H}{\partial z} = -2c \quad , \quad P_1' = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \quad \text{لكن}$$

$$P_2 = 2A - 2cx \quad , \quad P_1 = 2B \quad \text{إذا}$$

$$z' = \frac{1}{2}P_2 \quad , \quad y' = \frac{1}{2}P_1 = B \quad \text{حيث } A, B \text{ ثوابت. وحيث أن}$$

$$z = Ax - \frac{1}{2}cx^2 \quad \text{وعليه فإن} \quad , \quad z' = A - cx \quad , \quad y = Bx \quad \text{إذا}$$

$$H = B^2 + (A - cx)^2 + 2c(Ax - \frac{1}{2}cx^2) = A^2 + B^2 = \alpha \quad \text{وبالتالي فإن}$$

وعليه فإن معادله هاملتون - جاكوبي هي

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} + \alpha = 0$$

٤-٤ : منحنيات القيم القصوى ذات النقاط الركنية

Extremals With Corners

تعاملنا في الفصول السابقة مع مسائل التغيرات التي تكون منحنيات قيمها القصوى متصله (مستمرة) وذات مشتقه متصله أيضاً، وحيث أن لكثير من مسائل التغيرات منحنيات قيم قصوى ليست متصله عند بعض النقاط، والتي يطلق عليها نقاط ركنية، فقد خصص هذا البند لدراسة هذا النوع من مسائل التغيرات، والذي يضم ثلاثة أجزاء تناولنا في الأول منها مسأله انعكاس منحنيات القيم القصوى، وتناولنا في الثاني مسأله انكسار منحنيات القيم القصوى والتي تعتبر تعميماً للمسائل التي تهتم بدراسة انعكاس أو انكسار الضوء، وتناولنا في الجزء الثالث الشروط التي يجب أن تحققها الحلول ذات النقاط الركنية.

٤- ٤- ١: انعكاس منحنيات القيم القصوى Reflection of Extremals

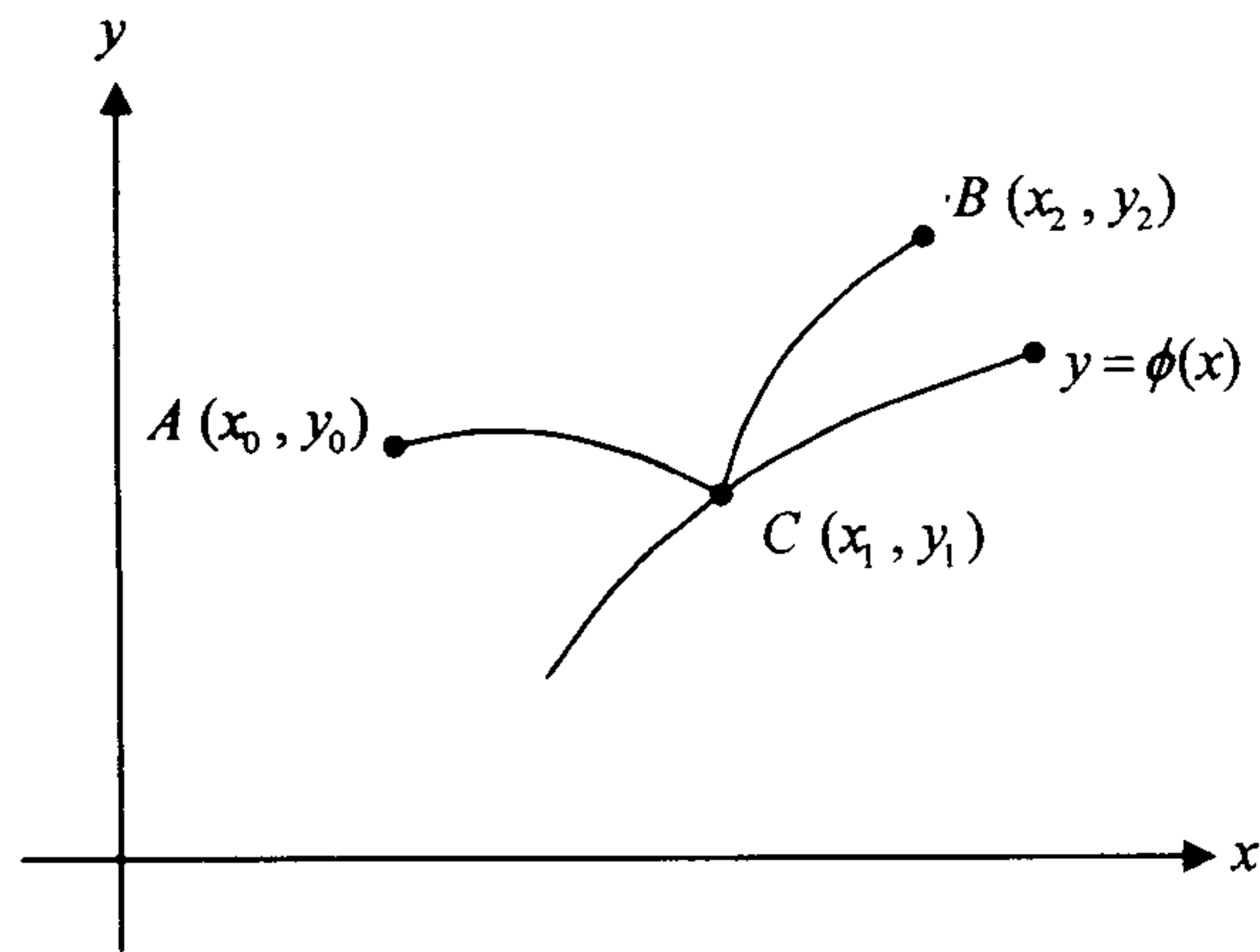
سنركز اهتمامنا في هذا الجزء على دراسة منحنيات القيم القصوى للداليات، والتي تمر بنقطة مثل A ، وتمر بالنقطة B بعد انعكاسها عند نقطة مثل C واقعه على منحنى معلوم.

ولإيجاد منحنى القيم القصوى $y = y(x)$ للدالي $J[y] = \int_{x_0}^{x_2} F(x, y, y') dx$ والذي

يمر بالنقطة $A(x_0, y_0)$ ، ويمر في $B(x_2, y_2)$ بعد انعكاس عند النقطة $C(x_1, y_1)$ الواقعة على المنحنى $y = \phi(x)$ ، انظر شكل (٤- ٦). لاحظ أن نقطة الانعكاس $C(x_1, y_1)$ هي نقطة ركنيه "نقطة تكون عندها المشتقة الأولى غير متصله" لمنحنى القيم القصوى $y(x)$ ، إذا المشتقين اليمنى واليسرى للداله $y(x)$ عندها مختلفتان، أي أن $y'(x_1^-) \neq y'(x_1^+)$ ، ومن ثم فإنه من المناسب أن نعبر عن $J[y]$

كالآتي

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx + \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$$



شكل (٤- ٦)

إذا $y'(x)$ متصله على كل من الفترتين $[x_0, x_1]$ ، $[x_1, x_2]$ ، وبالتالي فإن

$$\delta J = \delta \left(\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \right) + \delta \left(\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \right)$$

وحيث أن النقطة $C_1(x_1, y_1)$ يمكن أن تتحرك على المنحنى $y = \phi(x)$ ، إذاً حساب التغير لكل من $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$ ، $\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$ يقع ضمن شروط مسأله التغيرات ذات نقاط الأطراف المتحركة ، ومن ثم يمكن استخدام نتائج البندين الأول والثاني في هذا الفصل . وحيث أن كلا من المنحنيين AC ، BC هو منحنى قيم قصوى ، إذاً كل منهما يمثل حلاً لمعادله اويلر - لاگرانج الناتجه ، وإذا فرضنا أن احد المنحنيين معلوم بينما الآخر متغير ، تحولت المسأله إلى إيجاد منحنيات القيم القصوى للدالي

$$J_2[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \quad \text{أو} \quad J_1[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

بنقاط أطراف ثابتة ، وعليه فإن

$$\delta J_1 = [F + (\phi' - y')F_{y'}]_{x=x_1^-} \delta x_1 \quad \dots (1)$$

$$\delta J_2 = [F + (\phi' - y')F_{y'}]_{x=x_1^+} \delta x_1 \quad \dots (2)$$

حيث $x = x_1^-$ ، $x = x_1^+$ يعني اخذ النهايه اليسرى والنهايه اليمنى على الترتيب عندما تؤول x إلى x_1 . لكن المشتقه y' ليست متصله عند C ، إذاً كان $\delta J = 0$ يعني أن

$$F + (\phi' - y')F_{y'} \Big|_{x=x_1^-} \delta x_1 = F + (\phi' - y')F_{y'} \Big|_{x=x_1^+} \delta x_1$$

وحيث أن δx_1 اختياريه ، إذاً

$$F + (\phi' - y')F_{y'} \Big|_{x=x_1^-} = F + (\phi' - y')F_{y'} \Big|_{x=x_1^+} \quad \dots (3)$$

أو

$$\begin{aligned} & F(x_1, y_1, y'(x_1^-)) + [\phi'(x_1) - y'(x_1^-)] F_{y'}(x_1, y_1, y'(x_1^-)) \\ & = F(x_1, y_1, y'(x_1^+)) + [\phi'(x_1) - y'(x_1^+)] F_{y'}(x_1, y_1, y'(x_1^+)) \end{aligned}$$

والذي يطلق عليه شرط الانعكاس (Reflection Condition)

مثال ٤-٤-١

اوجد شرط الانعكاس للدالي

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_2} A(x, y) \cdot \sqrt{1 + y'^2} dx$$

الحل

بما أن

$$F(x, y, y') = A(x, y) \cdot \sqrt{1 + y'^2}$$

إذا شرط الانعكاس (3) يأخذ الشكل

$$A(x_1, y_1) \left[\sqrt{1 + y'^2} + (\phi' - y') \cdot \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right] \Big|_{x=x_1^-} = A(x_1, y_1) \left[\sqrt{1 + y'^2} + (\phi' - y') \cdot \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right] \Big|_{x=x_1^+}$$

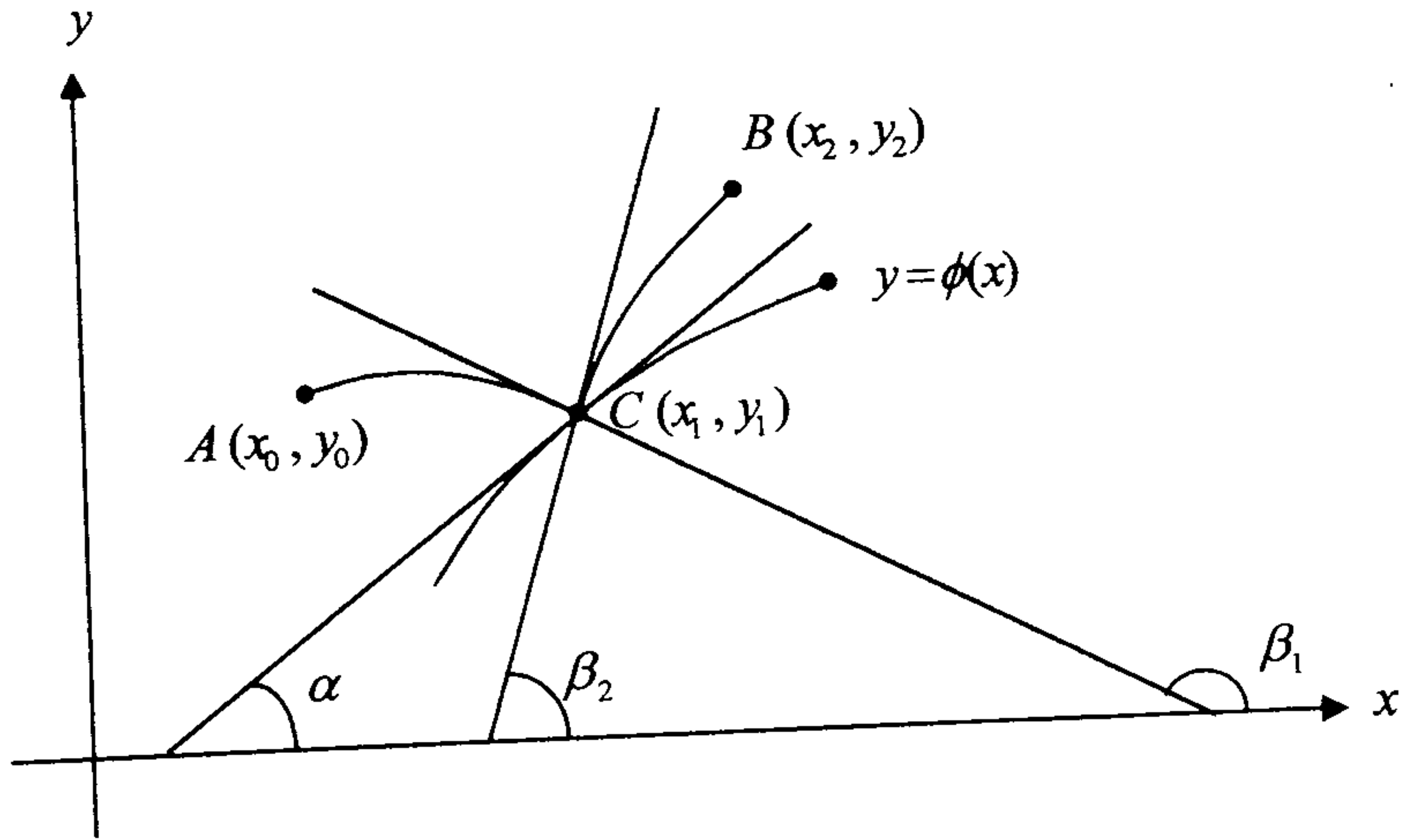
وإذا كانت $A(x_1, y_1) \neq 0$ ،

فإن

$$\frac{1 + \phi'y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \Big|_{x=x_1^-} = \frac{1 + \phi'y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \Big|_{x=x_1^+}$$

وإذا رمز للزاوية المحصورة بين المماس للمنحنى $y = \phi(x)$ عند النقطة C وبين محور السينات بالرمز α . بينما ميل المماس لكل من المنحنيين AC ، CB عند النقطة C هو $\tan \beta_1$ ، $\tan \beta_2$ على الترتيب . انظر الشكل (٤-٧) ، نجد أن ،

$$\phi'(x_1) = \tan \alpha \quad , \quad y'(x_1^-) = \tan \beta_1 \quad , \quad y'(x_1^+) = \tan \beta_2$$



شكل (٤-٧)

وبالتالي فإن شرط الانعكاس عند نقطة الانعكاس C ، يأخذ الشكل

$$\frac{1 + \tan \alpha \tan \beta_1}{-\sec \beta_1} = \frac{1 + \tan \alpha \tan \beta_1}{\sec \beta_2}$$

وبعد إجراء عملية التبسيط والضرب في $\cos \alpha$ نحصل على :

$$-\cos(\alpha - \beta_1) = \cos(\alpha - \beta_2)$$

ومنها نجد أن زاوية السقوط = زاوية الانعكاس .

ملاحظة

إذا كانت نقطة تتحرك بسرعة $v(x, y)$ فإن الزمن الذي تستغرق هذه النقطة للانتقال من الموضوع $A(x_0, y_0)$ إلى الموضوع $B(x_1, y_1)$ هو قيمة التكامل

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{v(x, y)} \cdot \sqrt{1 + y'^2} dx$$

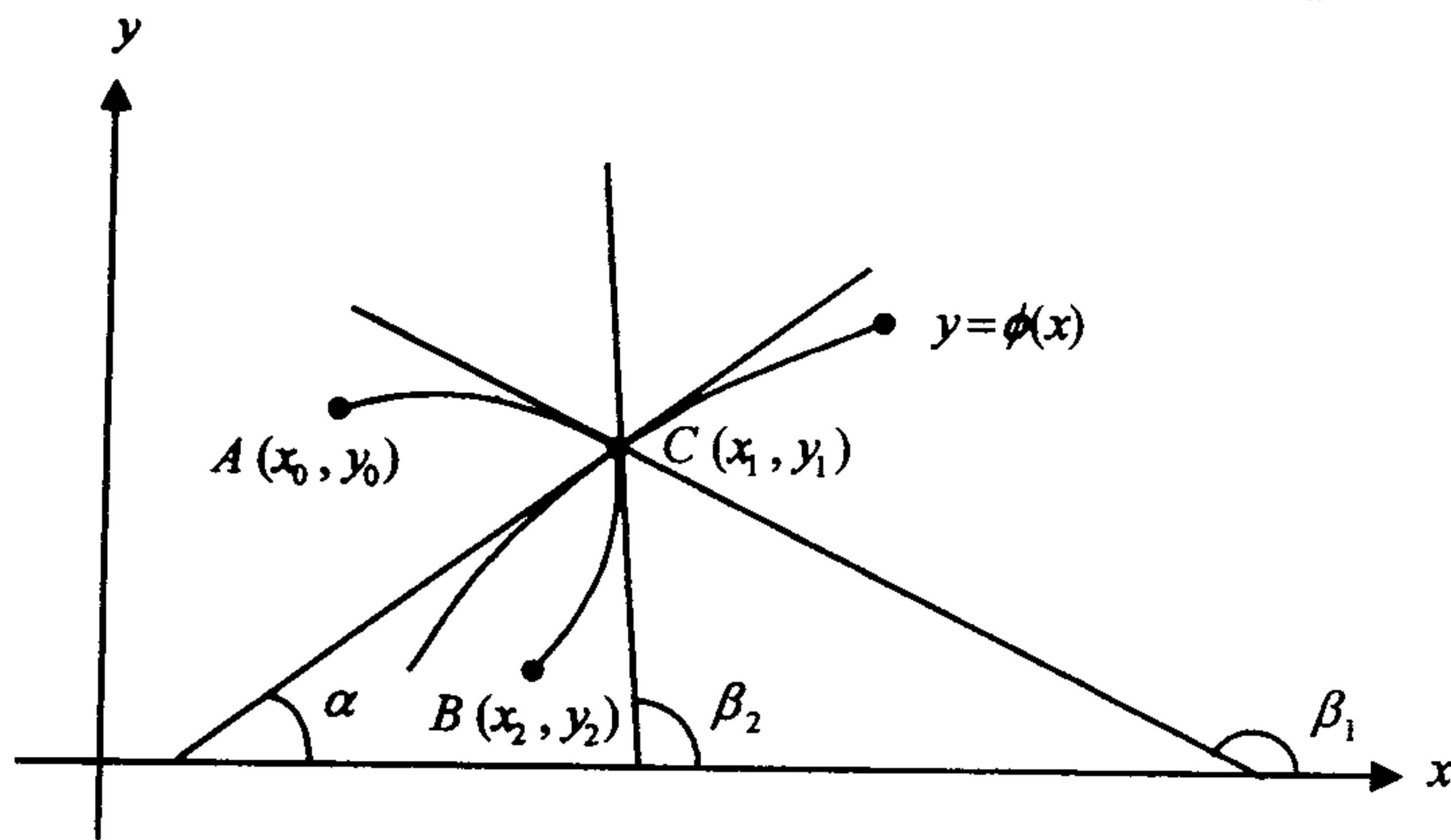
وهذا التكامل ينتمي إلى مجموعة الداليات التي على الصورة :

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} A(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx$$

٤- ٢- انكسار منحنيات القيم القصوى "Refraction of Extremals"

ليكن $J[y] = \int_{x_0}^{x_2} F(x, y, y') dx$ ، ولنفرض ان للدالة $F(x, y, y')$ منحنى

غير متصل $y = \phi(x)$ ، وان النقاط $A(x_0, y_0)$ ، $B(x_2, y_2)$ تقع على جانبي هذا المنحنى الغير متصل . انظر الشكل (٤- ١٨) .



شكل (٤- ١٨)

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F_1(x, y, y') dx + \int_{x_1}^{x_2} F_2(x, y, y') dx \quad \text{إذا}$$

حيث $F_1(x, y, y') = F(x, y, y')$ على إحدى جانبي المنحنى $y = \phi(x)$

بينما $F_2(x, y, y') = F(x, y, y')$ على الجانب الآخر للمنحنى $y = \phi(x)$

ولنفرض أن كل من F_1 ، F_2 هي دالة قابلة للتفاضل ثلاث مرات . ومن

الطبعي أن نتوقع أن هناك نقطة ركنيه عند النقطة $c(x_1, y_1)$ وهي نقطة

تقاطع المنحنى $y = \phi(x)$ مع $y = y(x)$. كما نلاحظ أن كلا من المنحنى

(القوس) AC ، CB هو منحنى قيم قصوى " وهذا واضح من حقيقة اعتبار إحدى

هذه الأقواس ثابت وتغيير الآخر للحصول على مسأله تغيرات ذات نقط أطراف ثابتة " ولهذا السبب فبالنسبه إلى منحنيات المقارنة فإنه يمكننا أن نأخذ منحنى يتكون من قوسين من منحنيات القيم القصوى . وبالتالي فإن التغير (مع ملاحظة أن النقطه قابله للحركة على المنحنى $y = \phi(x)$) يكون

$$\begin{aligned} \delta J &= \delta \int_{x_1}^{x_1} F_1(x, y, y') dx + \delta \int_{x_1}^{x_2} F_2(x, y, y') dx \\ &= [F_1 + (\phi' - y')F_{1y'}] \Big|_{x=x_1^-} \delta x_1 - [F_2 + (\phi' - y')F_{2y'}] \Big|_{x=x_1^+} \delta x_1 \end{aligned}$$

والشرط الضروري لوجود منحنيات قيم قصوى $\delta J = 0$ يؤدي إلى الآتي :

$$[F_1 + (\phi' - y')F_{1y'}] \Big|_{x=x_1^-} = [F_2 + (\phi' - y')F_{2y'}] \Big|_{x=x_1^+}$$

وهذا هو شرط الانكسار (The refraction Condition) وحيث أن y' غير متصله

عند نقطه الانكسار فإن هذا الشرط يمكن كتابته كما يلي :

$$\begin{aligned} F_1(x, y, y'(x_1^-)) + [\phi'(x_1) - y'(x_1^-)] F_{1y'}(x_1, y_1, y'(x_1^-)) &= \\ = F_2(x, y, y'(x_1^+)) + (\phi'(x_1) - y'(x_1^+)) F_{2y'}(x_1, y_1, y'(x_1^+)) \end{aligned}$$

كما أن شرط الانكسار بالإضافة إلى المعادله $y_1 = \phi(x_1)$ قد يساعدنا في تعيين إحداثيات النقطه C .

مثال ٤-٤-٢

أوجد شروط الانكسار للدالي

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_2} A(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx$$

الحل

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} A_1(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx + \int_{x_1}^{x_2} A_2(x, y) \cdot \sqrt{1 + y'^2} dx \quad \text{نفرض أن}$$

إذا شرط الانكسار

$$A_1(x, y) \cdot \frac{1 + \phi' y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \Big|_{x=x_1^-} = A_2(x, y) \frac{1 + \phi' y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \Big|_{x=x_1^+} \quad \dots (1)$$

ومما سبق، نجد أن $\phi'(x_1) = \tan \alpha$ ، $y'(x_1^-) = \tan \beta_1$ ، $y'(x_1^+) = \tan \beta_2$ وبالتالي فإن المعادلة (1) بعد عملية التبسيط والضرب في $\cos \alpha$ تتحول إلى :

$$A_1(x_1, y_1) \cdot \cos(\alpha - \beta_1) = A_2(x_1, y_1) \cos(\alpha - \beta_2)$$

وعليه فإن

$$\frac{\sin\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha, \beta_1)\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta_2)\right]} = \frac{A_2(x_1, y_1)}{A_1(x_1, y_1)} \quad \text{أو} \quad \frac{\cos(\alpha - \beta_1)}{\cos(\alpha - \beta_2)} = \frac{A_2(x_1, y_1)}{A_1(x_1, y_1)}$$

والذي يعتبر تعميماً للقانون المشهور الخاص بانكسار الضوء والذي ينص على أن "النسبة بين جيب زاوية السقوط وجيب زاوية الانكسار تساوي النسبة بين السرعات ، $v_1(x, y) = \frac{1}{A_1(x, y)}$ ، $v_2(x, y) = \frac{1}{A_2(x, y)}$ ، في الوسطين وعند الحدود التي يحدث عندها الانكسار".

٤- ٣- الشروط الركنية Corners Conditions

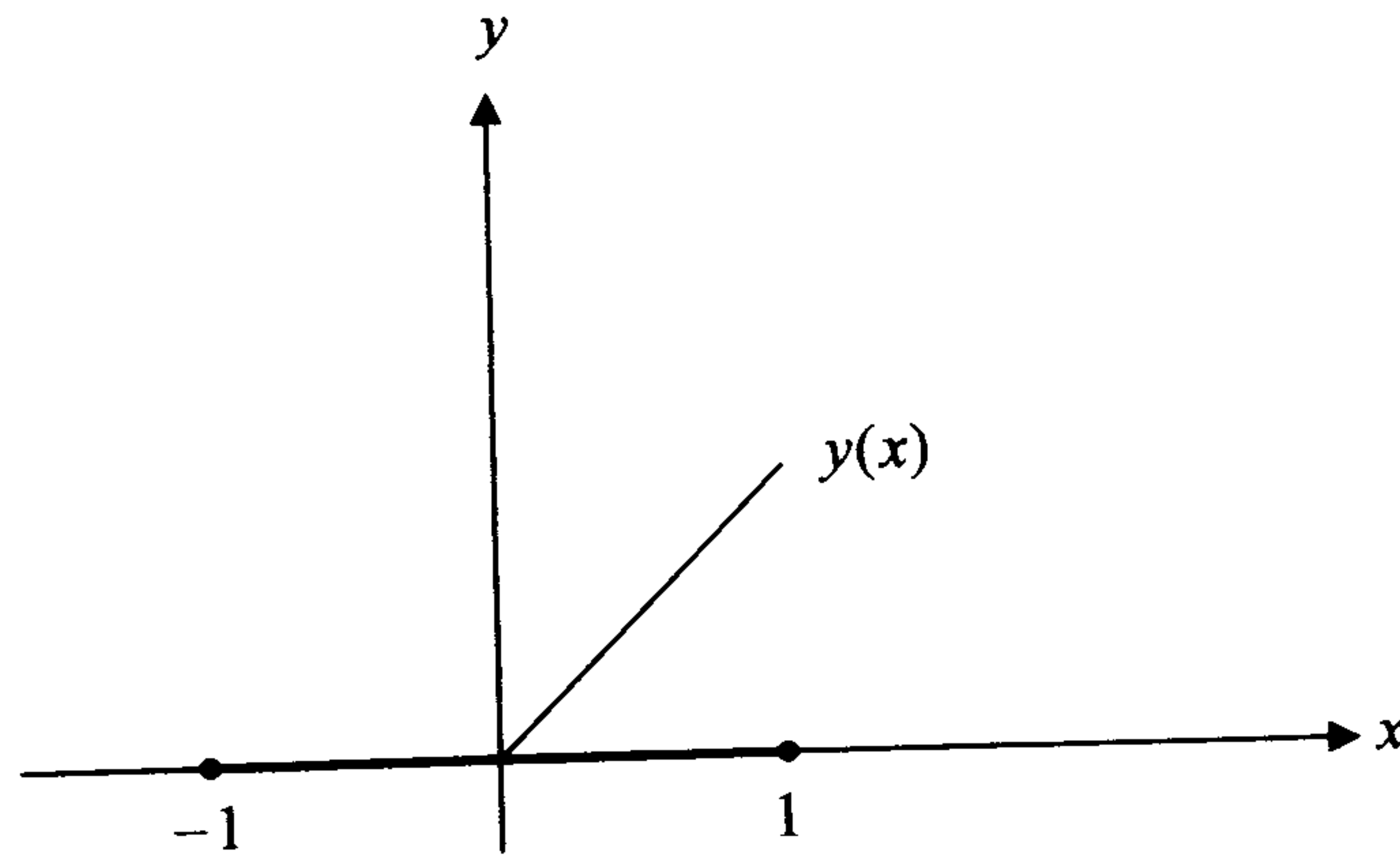
قد يكون لمسألة تغيرات قيم قصوى على منحنيات ذات نقاط ركنية ، لكنها ليست نقاط انعكاس أو انكسار ، فمثلاً إذا كان

$$y(1) = 1 ، y(-1) = 0 ، J[y] = \int_{-1}^1 y^2 (1 - y')^2 dx$$

فإن $J[y] \geq 0$ ، ومن الواضح أن أصغر قيمة للدالي J هي الصفر والتي يمكن الوصول إليها عندما $y = 0$ أو $y' = 1$ ، أي أن $y = 0$ أو $y = x + c$ ، لكن $y(1) = 1$ ، $y(-1) = 0$ يعني أن $c = 0$ ، وعليه فإن $y = 0$ أو $y = x$ ، وهذا يعني أن للدالي J قيمة صغرى على المنحنى

$$y = y(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x \leq 0 \\ x & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

إذاً $y'(x)$ ليست متصله عند $x=0$ ، وعليه فإن $x=0$ نقطة ركنيه شكل (٤-٩)



شكل (٤-٩)

إذاً توجد مسائل تغيرات قيم قصوى على منحنيات ذات نقاط ركنيه ويطلق على مثل تلك المنحنيات المنحنيات الممهدة جزئياً أو مقطعياً "Piecewise smooth curves"، وبصورة عامة، يقال عن منحنى أو داله إنه ممهد جزئياً في $I = [a, b]$ ، إذا كان $y(x)$ متصل على I ، و $y'(x)$ ليست متصله عند عدد محدود من نقاط I .

ولإيجاد الشروط التي يجب أن تتحقق في الحلول ذات النقاط الركنيه لمسائل القيم القصوى للدالي

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_2} F(x, y, y') dx$$

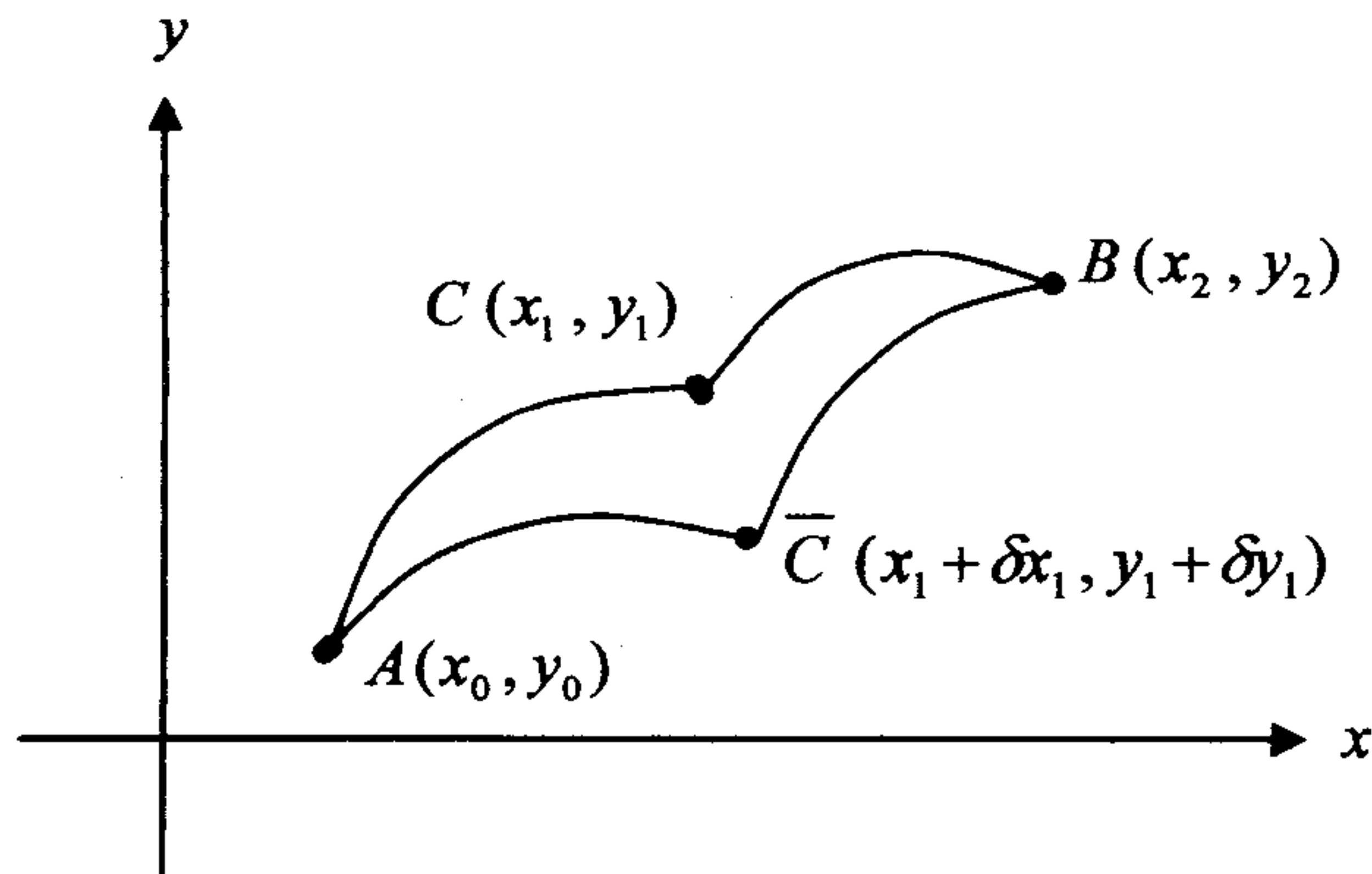
لاحظ أن المنحنيات الممهده جزئياً والتي تعتبر خط قيم قصوى منكسر، يجب أن تمثل حلولاً لمعادله اويلر - لاجرانج، ويتضح ذلك من حقيقه انه إذا كانت كل الأجزاء (ما عدا واحد فقط) من هذا الخط المنكسر ثابتة، تحولت المسأله إلى

مسألة بسيطة ذات نقاط أطراف ثابتة ، ومن ثم فإن الجزء الغير ثابت يجب أن يكون قوساً من منحنى القيم القصوى .

وإذا فرضنا أن لمنحنى القيم القصوى نقطه ركنيه واحدة وهذا لغرض التبسيط ، "لأنه إذا كان للمنحنى أكثر من نقطه ركنيه ، فيمكن استخدام نفس الطريقه لكل نقطه ركنيه" ، فإن الشروط التي يجب أن تتحقق عند النقطه الركنيه يمكن استنتاجها كالآتي .

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx + \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$$

حيث x_1 هي الأحداثي السيني للنقطه الركنيه . انظر الشكل (٤ - ١٠)



شكل (٤ - ١٠)

وحيث أن كلا من CB ، AC هو حل لمعادله اويلر - لاگرانج وأن C تتحرك بطريقة اختيارية ، إذا

$$\delta J = (F - y'F_y)|_{x=x_1^-} \cdot \delta x_1 + F_y|_{x=x_1^-} \cdot \delta y_1 - (F - y'F_y)|_{x=x_1^+} \cdot \delta x_1 - F_y|_{x=x_1^+} \delta y_1$$

لكن δy_1 ، δy_2 مستقلة عن بعضهما ، إذا

$$(F - y'F_y)|_{x=x_1^-} = (F - y'F_y)|_{x=x_1^+} \quad \dots (1)$$

$$F_y|_{x=x_1^-} = F_y|_{x=x_1^+} \quad \dots (2)$$

وهذه هي الشروط المطلوبة والتي يطلق عليها الشروط الركنية أو شروط اردمان - فيشتراس (Erdmann - weierstrass) كما ان هذه الشروط بالإضافة إلى شروط الاتصال لمنحنيات القيم القصوى قد تمكننا من تعيين إحداثيات النقطة الركنية .

مثال ٤- ٣

أوجد منحنيات القيم القصوى ذات النقط الركنية (إن وجدت) للدالي

$$J[y] = \int_0^a (y'^2 - y^2) dx$$

الحل

بما أن $F_{y'}|_{x=x_1^-} = F_{y'}|_{x=x_1^+}$ ، إذاً $y'(x_1^-) = y'(x_1^+)$ ،

وعليه فإن المشتقه $y'(x)$ متصله عند $x = x_1$ ، وبالتالي فإنه لا يوجد نقاط

انعكاس أو انكسار ، وعليه فإن منحنيات القيم القصوى هي منحنيات ممهده

(smooth curve)

smooth

مثال ٤- ٤

أوجد منحنيات القيم القصوى ذات النقط الركنية (إن وجدت) للدالي

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_2} y'^2 (1 - y')^2 dx$$

الحل

بما أن $F = y'^2 (1 - y')^2 = F(y')$

إذاً منحنيات القيم القصوى هي عبارة عن خطوط مستقيمة

$$y = cx + b.$$

وبالنسبة إلى هذا الدالي . فإن الشروط عند النقطة الركنية تأخذ الشكل :

$$-y'^2(1-y')(1-3y')|_{x=x_1^-} = -y'^2(1-y')(1-3y')|_{x=x_1^+} \quad \dots (1)$$

$$2y'(1-y')(1-2y')|_{x=x_1^-} = 2y'(1-y')(1-2y')|_{x=x_1^+} \quad \dots (2)$$

وإذا فرضنا أن $y'(x_1^+) = \beta$ ، $y'(x_1^-) = \alpha$ نوجدنا أن

$$\alpha^2(1-\alpha)(1-3\alpha) = \beta^2(1-\beta)(1-3\beta) \quad \dots (3)$$

$$\alpha(1-\alpha)(1-2\alpha) = \beta(1-\beta)(1-2\beta) \quad \dots (4)$$

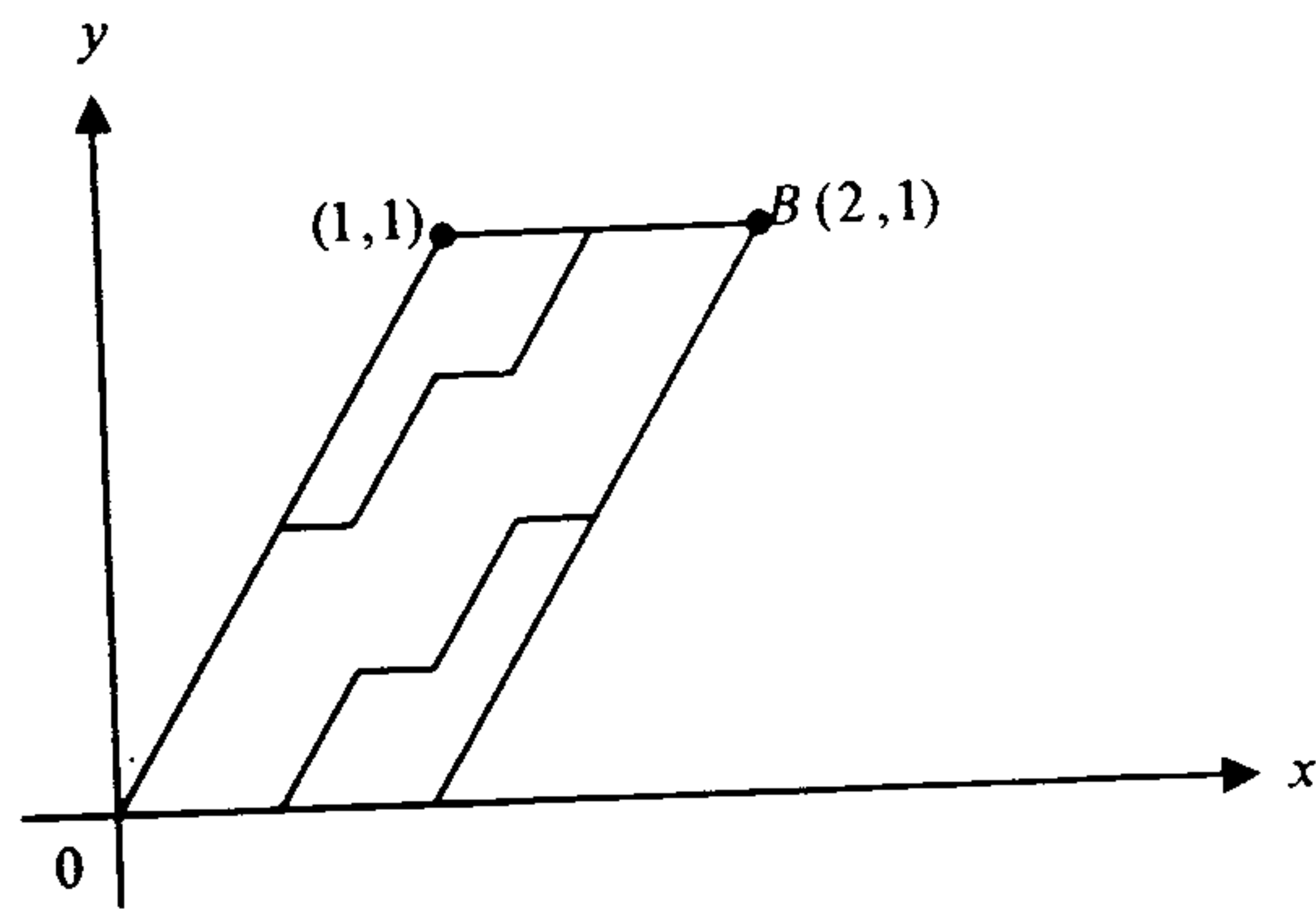
ويحل المعادلتين (3)، (4) مع الفرض $\alpha \neq \beta$ نوجدنا أن

$$b=0 ، \alpha=1 \text{ أو } b=1 ، \alpha=0$$

وعليه فإن منحنيات القيم القصوى ذات النقاط الركنية تتكون من أجزاء من

الخطوط المستقيمة التي تنتمي إلى العائلات $y=c_1$ ، $y=x+c_2$ حيث c_1, c_2

ثوابت، انظر شكل (٤- ١١)



شكل (٤- ١١)

مثال ٤- ٤- ٥:

أوجد منحنيات القيم القصوى ذات النقاط الركنية (إن وجدت) للدالي

$$J[y] = \int_a^b (y'^2 + y'^3) dx$$

الحل

بما أن $F = y'^2 + y'^3$ ، إذا $F_{y'} = 2y' + 3y'^2$

$$F - y'F_{y'} = -(y'^2 + 2y'^3) \quad \text{وعليه فإن}$$

ولعرفة وجود نقاط ركنيه ، نطبق شروط إيردمان - فيرستراس ،

$$F_{y'}|_{x=x_1^-} = F_{y'}|_{x=x_1^+} , \quad F - y'F_{y'}|_{x=x_1^-} = F - y'F_{y'}|_{x=x_1^+}$$

ف نجد أن

$$y'^2 + 2y'^3|_{x=x_1^-} = y'^2 + 2y'^3|_{x=x_1^+} \quad \dots (1)$$

$$2y' + 3y'^2|_{x=x_1^-} = 2y' + 3y'^2|_{x=x_1^+} \quad \dots (2)$$

ونفرض أن $y'(x_1^-) = \alpha$ ، $y'(x_1^+) = \beta$ ، والتعويض في (1) ، (2) ، نجد أن

$$\alpha^2 + 2\alpha^3 = \beta^2 + 2\beta^3 \quad \dots (3)$$

$$2\alpha + 3\alpha^2 = 2\beta + 3\beta^2 \quad \dots (4)$$

ويحل المعادلتين (3) ، (4) نجد أن $\alpha = \beta = -\frac{1}{3}$

وعليه لا توجد نقاط ركنيه . أما منحنيات التوقف لذلك الدالي فهي عائله خطوط مستقيمه .

تمارين

(1) اوجد منحنيات القيم القصوى للدالي

$$, \quad y(0) = 0 , \quad J[y] = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx$$

بينما تتحرك $B(x_1, y_1)$ على المنحنى $(x-9)^2 + y^2 = 9$

(2) اوجد الشروط الاعتراضيه للدالي

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} A(x, y) e^{\tan^{-1}(y')} dx, \quad A(x, y) \neq 0$$

(٣) اوجد منحنيات القيم القصوى للدالي

$$y(0) = 0, \quad J[y] = \int_0^{\pi/4} (y^2 - y'^2) dx$$

بينما تتحرك $(\frac{\pi}{4}, y(\frac{\pi}{4}))$ على المستقيم $x = \frac{\pi}{4}$

(٤) اوجد منحنى القيم القصوى للدالي

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad J[y] = \int_0^1 (y''^2 - 2xy) dx$$

بينما $y(1) = \frac{1}{120}$ ، بينما $y'(1)$ ليست معطاة .

(٥) اوجد منحنيات القيم القصوى ذات النقاط الركنية (إن وجدت) لكل مما

يأتي

$$y(4) = 2, \quad y(0) = 0, \quad J[y] = \int_0^4 (y' - 1)^2 (y' + 1)^2 dx \quad (أ)$$

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_0) = y_0, \quad J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + 2xy - y^2) dx \quad (ب)$$

$$y(2) = 1, \quad y(0) = 0, \quad J[y] = \int_0^2 y^2 (1 - y')^2 dx \quad (ج)$$

$$y(x_1) = y_1, \quad y(0) = 0, \quad J[y] = \int_0^{x_1} (y'^4 - by'^2) dx \quad (د)$$

$$J[y] = \int_a^b y^2 \cdot (1 + y'^2) dx \quad (هـ)$$

$$n > 0, \quad J[y] = \int_a^b y^n \cdot \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (و)$$

$$J[y] = \int_a^b (y'^2 - 1)^2 dx \quad (z)$$

$$J[y] = \int_a^b x^2 y'^2 dx \quad (ح)$$

(٦) اوجد باستخدام معادله هاملتون - جاكوبي ، منحنيات القيم القصوى للدالي :

$$J[y] = \int \sqrt{(x^2 + y^2)(1 + y'^2)} dx$$

(٧) حل معادله هاملتون - جاكوبي المصاحبه للدالي

$$J[y] = \int_a^b f(y) \sqrt{1 + y'^2} dx$$

الفصل الخامس

الشروط الضرورية والكافية للقيم القصوى

درسنا في الفصل الأول شرط اويلر الضروري لوجود قيم قصوى محلية ،
ودرسنا في الفصل الرابع الشروط الركنيه الواجب تحققها عند وجود منحنيات
قيم قصوى ذات نقاط ركنيه ، وسندرس في هذا الفصل الشروط الضرورية
والكافية لوجود قيم قصوى للداليات ، وقد ضم هذا الفصل ثلاثة بنود تناولنا في
الأول منها شرط لجندر وتناولنا في الثاني شروط جاكوبي ، وفي الثالث شرط
فيرشتراس .

٥- ١ : شرط لجندر Legendre Condition

إذا كانت D مجموعة جزئية مفتوحة من الفضاء المتري X ، وكان J
دالياً معرفاً وقابلاً للأشتقاق ، n من المرات عند $x \in D$ ، فإن
 $\delta^n J(x, \Delta x) = \frac{d^n}{d\varepsilon^n} J(x + \varepsilon \Delta x) \Big|_{\varepsilon=0}$ يسمى التغير النوني للدالي J ، وعندما $n=2$ ،
نجد ان $\delta^2 J(x, \Delta x) = \frac{d^2}{d\varepsilon^2} J(x + \varepsilon \Delta x) \Big|_{\varepsilon=0}$ والذي يسمى التغير الثاني (second
variation) للدالي J .

مثال ٥- ١- ١

(١) إذا كان $J: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ، فان

$$\delta J(x, \Delta x) = \frac{d}{d\varepsilon} J(x + \varepsilon \Delta x) \Big|_{\varepsilon=0} = J'(x) \Delta x$$

$$\delta^2 J(x, \Delta x) = \frac{d^2}{d\varepsilon^2} J(x + \varepsilon \Delta x) \Big|_{\varepsilon=0} = J''(x) (\Delta x)^2$$

(ب) إذا كانت $J, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ دالة حقيقية معرفه على منطقه مفتوحه في \mathbb{R}^n ، فان

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(x + \varepsilon \Delta x) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x_i} J(x + \varepsilon \Delta x) \right] \Delta x_i$$

$$\delta^2 J(x, \Delta x) = \frac{d^2}{d\varepsilon^2} J(x + \varepsilon \Delta x) \Big|_{\varepsilon=0} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 J(x)}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \Delta x_i \Delta x_j \Big|_{\varepsilon=0} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 J(x)}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \partial x_i \partial x_j$$

$$J[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx \in D_1 \quad \text{(ج) اذا كان}$$

فان

$$J(y + \varepsilon \Delta y) = \int_a^b F(x, y(x) + \varepsilon \Delta y(x), y'(x) + \varepsilon \Delta y'(x)) dx$$

وعليه فان

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(y + \varepsilon \Delta y) = \int_a^b \left[F_y(x, y + \varepsilon \Delta y, y' + \varepsilon \Delta y') \Delta y + F_{y'}(x, y + \varepsilon \Delta y, y' + \varepsilon \Delta y') \Delta y' \right] dx$$

$$\frac{d^2}{d\varepsilon^2} (J + \varepsilon \Delta y) = \int_a^b \left[F_{yy}(x, y + \varepsilon \Delta y, y' + \varepsilon \Delta y') (\Delta y)^2 + 2F_{yy'}(x, y + \varepsilon \Delta y, y' + \varepsilon \Delta y') \Delta y \Delta y' + F_{y'y'}(x, y + \varepsilon \Delta y, y' + \varepsilon \Delta y') (\Delta y')^2 \right] dx$$

وبالتالي فإن

$$\delta^2 J(y, \Delta y) = \int_a^b \left[F_{yy}(x, y, y') (\Delta y)^2 + 2F_{yy'}(x, y, y') \Delta y \Delta y' + F_{y'y'}(x, y, y') (\Delta y')^2 \right] dx$$

والان الى المبرهنه الآتيه :

مبرهنه ٥ - ١ - ١:

لتكن D مجموعه جزئيه مفتوحه من الفضاء المترى X ، وليكن J دالياً معرفاً على D .

(ا) إذا كانت $x^* \in D$ نقطة نهاية صغرى للدالي J ، فإن $\delta^2 J(x^*, \Delta x) \geq 0$ لكل $\Delta x \in \chi$.

(ب) إذا كانت $x^* \in D$ نقطة نهاية عظمى للدالي J ، فإن $\delta^2 J(x^*, \Delta x) \leq 0$ لكل $\Delta x \in \chi$.

البرهان

$$\Delta J = J(x^* + \varepsilon \Delta x) - J(x^*, \Delta x) = \frac{\varepsilon^2}{2!} \delta^2 J(x^*, \Delta x) + R_2(x^*, \Delta x, \varepsilon) \quad \text{بما أن}$$

$$\delta(x^*, \Delta x) = 0 \quad , \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{R_2(x^*, \Delta x, \varepsilon)}{\varepsilon^2} = 0 \quad \text{وبما أن}$$

إذاً إذا كانت $x^* \in D$ نقطة نهاية صغرى فإن $\Delta J = J(x^* + \varepsilon \Delta x) - J(x^*, \Delta x) \geq 0$ وعليه فإن $\delta^2 J(x^*, \Delta x) \geq 0$.

أما إذا كانت $x^* \in D$ نقطة نهاية عظمى للدالي J ، فإن $\Delta J \leq 0$ ، وعليه فإن $\delta^2 J(x^*, \Delta x) \leq 0$.

□

والآن ليكن $y(b) = B$ ، $y(a) = A$ ، $J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$ إذاً

$$\delta^2 J = \int_a^b [F_{yy} (\Delta y)^2 + 2F_{yy'} \Delta y \Delta y' + F_{y'y'} (\Delta y')^2] dx \quad \dots (1)$$

لكن بالتكامل بالتجزئة نجد أن

$$2 \int_a^b F_{yy'} \Delta y \Delta y' dx = \int_a^b F_{yy'} d((\Delta y)^2) dx = F_{yy'} (\Delta y)^2 \Big|_a^b - \int_a^b (\Delta y)^2 \frac{d}{dx} F_{yy'} dx$$

وحيث أن $\Delta y(a) = \Delta y(b) = 0$ إذاً

$$2 \int_a^b F_{yy'} \Delta y \Delta y' dx = - \int_a^b (\Delta y)^2 \frac{d}{dx} F_{yy'} dx \quad \dots (2)$$

ومن (1)، (2) نجد أن

$$\delta^2 J = \int_a^b \left[F_{yy} (\Delta y')^2 + \left(F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'} \right) (\Delta y)^2 \right] dx$$

وإذا فرضنا ان $Q = F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'}$ ، $\Delta y = h$ ، $P = F_{yy'}$

لوجدنا ان

$$\delta^2 \mathcal{J}[h] = \int_a^b (Ph^2 + Qh^2) dx \quad \dots (3)$$

والى المبرهنه الآتيه

مبرهنه ٥ - ١ - ٢ :

$$\delta^2 \mathcal{J}[h] = \int_a^b (Ph^2 + Qh^2) dx \geq 0 \quad \text{إذا كان}$$

لكل $h \in D_1$ ، $h(a) = h(b) = 0$ ، فإن $P(x) \geq 0$ ، لكل $x \in [a, b]$

البرهان

لكي نثبت ان $P(x) \geq 0$ لكل $x \in [a, b]$ ، نرض وجود $x_0 \in [a, b]$ بحيث ان $P(x_0) = -2\beta$ ، $\beta > 0$. وحيث ان $P(x)$ داله متصله على $[a, b]$ ، إذاً توجد $\alpha > 0$ بحيث ان $a \leq x_0 - \alpha < x_0 + \alpha \leq b$ ، $P(x_0) \leq -\beta$ ، $x_0 - \alpha \leq x \leq x_0 + \alpha$. والآن لتكن

$$h(x) = \begin{cases} \text{Sin}^2 \left(\frac{\pi(x-x_0)}{\alpha} \right) & , x_0 - \alpha \leq x \leq x_0 + \alpha \\ 0 & , x \notin [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \end{cases}$$

إذا

$$\delta^2 \mathcal{J}[h] = \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} \frac{P\pi^2}{\alpha^2} \text{Sin}^2 \left(\frac{2\pi(x-x_0)}{\alpha} \right) dx + \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} Q \text{Sin}^2 \left(\frac{\pi(x-x_0)}{\alpha} \right) dx < \frac{-2\beta\pi^2}{\alpha} + 2M\alpha$$

$$M = \max_{a \leq x \leq b} |Q(x)| \quad \text{حيث}$$

وعندما تكون α صغيره جداً ، نجد ان

$$\delta^2 J[h] = \frac{-\beta\pi^2}{\alpha} + 2M\alpha < 0$$

وعليه عندما $\delta^2 J(h) \geq 0$ تكون $P(x) \geq 0$ لكل $x \in [a, b]$.

وأخيراً الى المبرهنة الآتية التي تعطي شرط لجندر الضروري.

□

مبرهنة ٥ - ١ - ٣: (شرط لجندر الضروري)

إذا كان للدالي

$$y(b) = B, y(a) = A, J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx \in D_1$$

قيمه صفري على المنحني $y(x)$ ، فإن $F_{yy} \geq 0$ لأي نقطه واقعه على $y(x)$.

البرهان

بما ان للدالي $J[y]$ قيمه صفري على $y(x)$ ، إذا $\delta^2 J[h] \geq 0$ ، لكل $h(x) = \Delta y(x) \in D_1$. لكن $\delta^2 J[h] \geq 0$ ، لكل $h(a) = h(b) = 0$ ، يعني ان $P = F_{yy} \geq 0$ لكل $x \in [a, b]$ حسب مبرهنة (٥ - ١ - ٢).

□

ملاحظه

(١) إذا كان للدالي $J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx \in D_1$ ، $y(a) = A$ ،

$y(b) = B$ قيمه عظمى محليه على $y(x)$ ، فإن $F_{yy} \leq 0$ لكل $x \in [a, b]$

(ب) إذا كان $F_{yy} > 0$ لكل $x \in [a, b]$ ، فإن للدالي $J[y]$ قيمه صفري

محليه على $y(x)$.

اما إذا كان $F_{yy} < 0$ لكل $x \in [a, b]$ ، فإن للدالي $J[y]$ قيمه عظمى

محليه على المنحني $y(x)$.

مثال ٥ - ١ - ٢ :

ليكن $J[y] = \int_0^1 y^3 dx$ ، $y(0) = 0$ ، $y(1) = 1$

إذا الحل العام لمعادله اويلر- لاجرانج هو $y = C_1x + C_2$ لكن $y(0) = 0$ ، $y(1) = 1$ يعني ان $C_1 = 1$ ، $C_2 = 0$ ، إذا $y = x$ ، لكن $F_{yy'} = 6y'$ ، $y' = 1$ ، إذا $F_{yy'} = 6 > 0$ ، لكل $x \in [0, 1]$ ، وعليه فإن للدالي $J[y]$ قيمة صغرى محليه على المستقيم $y = x$.

مثال ٥ - ١ - ٣ :

ليكن $J[y] = \int_0^1 (12xy - y^2) dx$ ، $y(0) = 0$ ، $y(1) = 1$

إذا معادله اويلر- لاجرانج هي $12x + 2y' = 0$ ، وحلها العام هو $y = -x^3 + C_1x + C_2$ ، لكن $y(0) = 0$ ، $y(1) = 1$ ، إذا $C_1 = 2$ ، $C_2 = 0$ ، وعليه فإن $y = 2x - x^3$ ، لكن $F_y = -2y'$ ، إذا $F_{yy'} = -2 < 0$ ، وعليه فإن للدالي $J[y]$ قيمة عظمى محليه على المنحنى $y = 2x - x^3$.

٥ - ٢ : شروط جاكوبي Jacobi Conditions

ليكن $J[h] = \int_a^b (Ph^2 + Qh^2) dx \in D_1$... (1)

حيث $P(x) = F_{yy}$ ، $Q(x) = F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'}$ ، $h(a) = h(b) = 0$ ، إذا معادله

اويلر- لاجرانج للدالي $J[y]$ ، هي $F_h - \frac{d}{dx} F_{h'} = 0$ ، وعليه فإن

$Qh - \frac{d}{dx} (Ph') = 0$... (2)

وهي معادله تفاضليه خطيه من الرتبة الثانيه تحقق الشرط $h(a) = h(b) = 0$ ، يطلق عليها عادة معادله جاكوبي نسبة للرياضي الألماني كارل جاكوبي الذي

درسها عام ١٨٤٢ م ، والآن الى التعريف الآتي .

تعريف (٥- ٢- ١)

يقال عن نقطة \bar{a} انها نقطة مرافقه (Conjugate Point) للنقطة a ،
إذا كان $\bar{a} \neq a$ إذا كان $h: [a, \bar{a}] \rightarrow \mathbb{R}$ حلاً لمعادله جاكوبي وكان
 $h(a) = h(\bar{a}) = 0$ بينما $h(x) \neq 0$ لكل $x \in [a, \bar{a}]$.
لاحظ ان \bar{a} نقطة مرافقه للنقطة a ، إذا كانت $\bar{a} \neq a$ ، وكان $h(\bar{a}) = 0$ ،
حيث h حل لمعادله جاكوبي ، $h(a) = 0$ ، $h'(a) = 1$.

مثال ٥- ٢- ١

$$\text{ليكن } y(a) = 0 , y(0) = 0 , \mathcal{J}[y] = \int_0^a (y'^2 - y^2) dx$$

إذا معادله جاكوبي للدالي $\mathcal{J}[h]$ هي $-2h - \frac{d}{dx}(F_{yy} h') = 0$ ، ومنها نجد
ان $h'' + h = 0$ ، وعليه فإن $h(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ لكن
 $h(0) = 0$ ، $h(a) = 0$ ، إذا $C_1 = 0$ ، $C_2 \sin a = 0$ ، وعليه فإن $a = n\pi$ ،
وهذا يعني ان $h(x) = C_2 \sin x$ تنعدم عند النقاط $x = n\pi$ ، حيث n عدد صحيح ،
وعليه إذا كانت $a > n\pi$ ، فإن $x = n\pi$ نقطة مرافقه للنقطة $x = 0$. أما إذا
كانت $a < \pi$ فإن $h(x) = 0$ عند $x = 0$ فقط ، وفي هذه الحالة لا توجد نقاط
مرافقه للصفر.

والآن الى المبرهنه الآتية .

مبرهنه (٥- ٢- ١) " شرط جاكوبي الضروري "

إذا كان للدالي $\mathcal{J}[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx \in D_1$ قيمه صفرى محليه على

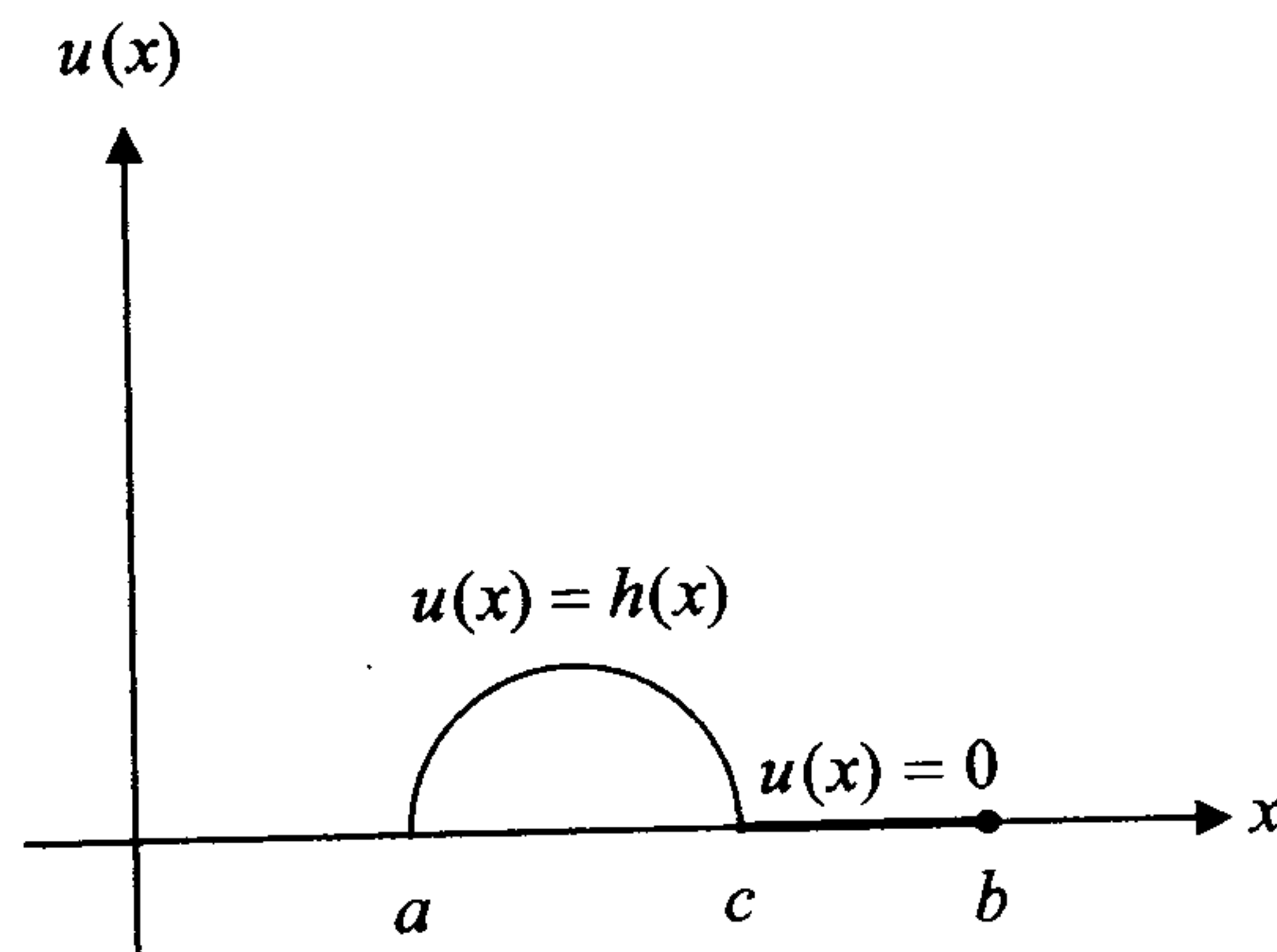
المنحني $y(x)$ ، وكان $F_{yy} > 0$ لكل $x \in [a, b]$ ، فلا توجد في الفترة (a, b) أي نقطة مرافقه للنقطة a .

البرهان

نفرض ان $c < b$ نقطة مرافقه للنقطة a . إذا يوجد حل $h(x)$ لمعادله جاكوبي التفاضليه بحيث ان $h(a) = h(c) = 0$ ، بينما $h(x) \neq 0$ لكل $x \in (a, c)$.

والآن لنعرف الداله

$$u(x) = \begin{cases} h(x) & , x \in [a, c] \\ 0 & , x \in [c, b] \end{cases} \quad \dots (1)$$



شكل (٥-١)

إذا $u(x)$ تحقق معادله جاكوبي، وبالتالي فإنها تحقق معادله اويلر- لاجرانج على الشكل

$$g_u(x, u, u') = \frac{d}{dx} g_{u'}(x, u, u') \quad \dots (2)$$

على $[a, c]$ و $[c, b]$ على التوالي

والآن افرض ان

$$F_{yy} \cdot u^2 + 2F_{yy'} \cdot uu' + F_{y'y'} \cdot u'^2 = 2g(x, u, u')$$

نجد ان

$$2gg_u = 2F_{yy} \cdot u + 2F_{yy'} \cdot u'$$

$$2gg_{u'} = 2F_{yy'} \cdot u + 2u'F_{y'y'} \cdot u'$$

وعليه فإن

$$2g(x, u, u') = ug_u + u'g_{u'} \quad \dots (3)$$

ومن (2)، (3) نجد ان $2g(x, u, u') = u \cdot \frac{d}{dx} g_{u'} + u' \cdot g_{u'}$ وبالتالي فإن

$$2g(x, u, u') = \frac{d}{dx} (u g_{u'}) \quad \dots (4)$$

لكن $y(x) \in D_1$ ، إذا $\frac{d}{dx} (u g_{u'})$ دالة متصله على $[a, c]$ وعلى $[c, b]$ ،

وعليه فإن $u'(c^+) = u'(c^-) = 0$ كما ان

$$J[y(x)] = \int_a^c d(u g_{u'}) + \int_c^b 2g(x, u, u') dx$$

لكن $\int_a^b d(u g_{u'}) = 0$ إذا $u(a) = u(c) = 0$

وحيث ان $u(x) = 0$ لكل $x \in [c, b]$ إذا $g(x, u, u') = 0$ وعليه فإن

$\int_c^b 2g(x, u, u') = 0$ إذا $J[y(x)] = 0$ وعليه فإن $J[y(x)]$ قيمه صغرى

محليه للدالي $J[y]$ وبالتالي فإن $h'(c) = 0$ ، لكن لمعادله جاكوبي حل وحيد

لأنها معادله تفاضليه خطيه من الرتبه الثانيه بمعاملات متصله. إذا

$h(c) = h'(c) = 0$ ، وعليه فإن $h(x) = 0$ لكل $x \in [a, c]$ وهذا خلاف الفرض.

إذا c لايمكن ان ترافق a .

□

مثال ٥ - ٢ - ٢:

هل يتحقق شرط جاكوبي لمنحني القيم القصوى للدالي

$$. y(a) = 0 , y(0) = 0 , \mathcal{J}[y] = \int_0^a (y'^2 - y^2) dx$$

الحل

بما ان $h(x) = c \sin x$ حل لمعادلة جاكوبي إذا إذا كانت $a < \pi$ فلا توجد نقطة مرافقه للنقطة $x = 0$ في $(0, a)$ ، وعليه فإن شرط جاكوبي متحقق في هذه الحالة اما اذا كانت $a > \pi$ ، فإن الفترة $(0, a)$ تحوي نقطة مرافقه للنقطة $x = 0$ وعليه فإن شرط جاكوبي لا يتحقق في هذه الحالة .

مثال ٥ - ٢ - ٣:

هل يتحقق شرط جاكوبي لمنحني قيم القصوى للدالي

$$. y(a) = 0 , y(0) = 0 , \mathcal{J}[y] = \int_0^a (y'^2 + y^2 + x^2) dx$$

الحل

بما ان معادله جاكوبي للدالي هي $h'' - h = 0$ ، إذا حلها العام هو $h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ لكن $h(0) = 0$ ، إذا $C_2 = -C_1$ ، وعليه فإن $h(x) = C_1 (e^x - e^{-x})$ وبالتالي فإن $h(x) = 0$ عندما $x = 0$ وعليه فإن شرط جاكوبي يتحقق لاي قيمة للثابت a .

مثال ٥ - ٢ - ٤:

هل يتحقق شرط جاكوبي لمنحني القيم القصوى للدالي

$$. y(-a) = y(a) = b , \mathcal{J}[y] = \int_{-a}^a y \sqrt{1+y'^2} dx$$

الحل

بما ان حل معادله اويلر- لاجرانج للدالي $\mathcal{L}[y]$ هو $y = c \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$ (تأكد

من ذلك) ، إذا لتحديد معادله جاكوبي، لاحظ ان $F = y\sqrt{1+y'^2}$ ،

$$، y = c \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$$

$$إذاً ، F_y = \frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} ، F_{yy} = \frac{y}{(1+y'^2)^{3/2}} = c \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{c}\right) > 0 ، \text{ لكل } c > 0 .$$

$$\text{لكن } F_{yy} = 0 ، F_{yy} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \tanh\left(\frac{x}{c}\right) ، \text{ إذا معادله جاكوبي هي}$$

$$c \frac{d}{dx} \left(h \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{c}\right) \right) + \frac{h}{c} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{c}\right) = 0 \quad \dots (1)$$

و $h(x) = \sinh\left(\frac{x}{c}\right)$ حل اولي للمعادله (1) ، وباستخدام طريقه تغير الوسائط

(البرامترات) "Variation of Parameters" لحل المعادله (1)، وفرضنا ان

$$h = z \sinh\left(\frac{x}{c}\right) \text{ نجد ان}$$

$$\frac{h(x)}{c} = A \sinh\left(\frac{x}{c}\right) + B \left[\left(\frac{x}{c}\right) \sinh\left(\frac{x}{c}\right) - \cosh\left(\frac{x}{c}\right) \right]$$

وبوضع $B = 1$ ، $h(-a) = 0$ نجد ان

$$h(x) = \left[x + a - c \operatorname{Coth}\left(\frac{a}{c}\right) \right] \sinh\left(\frac{x}{c}\right) - \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$$

لكن $h(-a) = 0$ ، $h'(-a) = -\operatorname{Coth}\left(\frac{a}{c}\right) \cosh\left(\frac{-a}{c}\right) < 0$ ، $h'(\infty) > 0$ إذا يوجد

جذر للمعادله $h(x)$ مختلف عن $x = \frac{-a}{c}$ وعليه فإن شرط جاكوبي يكافئ

الشرط

$$h(a) = 2 \left[a \sinh\left(\frac{a}{c}\right) - c \cosh\left(\frac{a}{c}\right) \right] \leq 0$$

وعليه فإن $h(a) = 0 \Leftrightarrow \text{Coth}\left(\frac{a}{c}\right) = \frac{a}{c}$ إذا $h(a) = 0$ عندما $\frac{a}{c} = 1.1197$ ،

وبالتالي فإن $h(a) \leq 0$ لكل $\frac{a}{c} \leq 1.1197$ وعليه فإن شرط جاكوبي يتحقق

للقيم الصغيره الى $\frac{a}{c}$ ، والمحدده بالعلاقه $c \cdot \text{Cosh}\left(\frac{x}{c}\right) = b > 0$ ولا يتحقق
للقيم الكبيره الى $\frac{a}{c}$.

واخيراً الى المبرهنه الآتيه التي تحدد الشرط الكافي لوجود قيم قصوى محليه
"تسمى قيم قصوى ضعيفه ، اذا كانت للفرق $\Delta J[y]$ نفس الأشاره لكل $y \in D_1$ ،
وتسمى قيم قصوى قويه ، اذا كان للدالي $\Delta J[y]$ نفس الأشاره لكل $y \in \ell$."

مبرهنه ٥ - ٢ - ٢:

يكون للدالي $J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx \in D_1$ ، $y(a) = A$ ، $y(b) = B$

قيمه صغرى محليه ضعيفه على المنحني $y = y(x)$ ، اذا تحقت الشروط الآتيه :

(أ) $y(x)$ حل لمعادله اويلر - لاگرانج

(ب) $P(x) = F_{yy} > 0$ لكل $x \in [a, b]$

(ج) لا تحتوي الفتره المغلقه $[a, b]$ أي نقطه مرافقه للنقطه a "يسمى هذا

الشرط : شرط جاكوبي الموسع"

البرهان

$$\delta^2 J = \int_a^b [F_{yy} h^2 + 2hh' F_{yy'} + h'^2 F_{y'y'}] dx \quad \text{بما ان}$$

$$\begin{aligned} \delta^2 J &= \int_a^b [F_{yy} h^2 + hh' F_{yy'} + hh' F_{yy'} + h'^2 F_{y'y'}] dx \quad \text{إذا} \\ &= \int_a^b [h(hF_{yy} + h' F_{yy'}) + h' (hF_{yy'} + h' F_{y'y'})] dx \end{aligned}$$

وبالتكامل بالتجزئه بالنسبه للحد الأخير واستخدام الشرط $h(a) = h(b) = 0$ نجد ان

$$\delta J^2 = \int_a^b \left[h F_{yy} + h' F_y - \frac{d}{dx} (h F_y + h' F_{yy}) \right] h(x) dx$$

$$\delta J^2 = \int_a^b \left[h F_{yy} - h' F_{yy} - \frac{d}{dx} (h' F_{yy}) \right] h(x) dx \quad \dots (1)$$

والآن اذا وجدت $h(x)$ بحيث ان

$$h F_{yy} - h' F_{yy} - \frac{d}{dx} (h' F_{yy}) = 0$$

فإن ذلك يعني ان $h(x)$ تحقق العلاقه

$$\frac{d}{dx} (h' F_{yy}) + h(x) \left[\frac{d}{dx} (F_{yy} - F_{yy'}) \right] = 0 \quad \dots (2)$$

وإذا فرضنا عدم وجود نقطه مرافقه للنقطه a في $[a, b]$ فان ذلك يعني وجود داله $u(x)$ بحيث ان :

$$\frac{d}{dx} (u' F_{yy}) + u(x) \left[\frac{d}{dx} (F_{yy} - F_{yy'}) \right] = 0 \quad \dots (3)$$

وعليه فإن $u(a) = 0$ ، $u'(a) = 1$ ، $u(x) \neq 0$ لكل $x \in (a, b]$

$$\frac{d}{dx} (F_{yy} - F_{yy'}) = \frac{-1}{u} \cdot \frac{d}{dx} (u' F_{yy}) \quad \dots (4)$$

ومن (1) ، (4) نجد ان

$$\delta^2 J = \int_a^b \left[\frac{h^2}{u} \cdot \frac{d}{dx} (u' F_{yy}) - h \frac{d}{dx} (h' F_{yy}) \right] dx$$

وبالتكامل بالتجزئه واستخدام الشرط $h(a) = h(b) = 0$ ، نجد ان

$$\delta^2 J = \int_a^b \left[h'^2 F_{yy} - u' F_{yy} \frac{d}{dx} \left(\frac{h^2}{u} \right) \right] dx$$

$$= \int_a^b F_{yy} \left[h'^2 - \frac{2hh'u'}{u} + \frac{u'^2 h^2}{u^2} \right] dx$$

$$= \int_a^b F_{yy} \left(h' - \frac{u'h}{u} \right)^2 dx$$

لكن $(h' - \frac{u'h}{u})^2 > 0$ ، لأنه اذا كان $h' - \frac{u'h}{u} = 0$ ، فإن $h' - \frac{u'h}{u} = 0$ ، وعليه فإن $u(x) = k h(x)$ ، حيث k ثابت . لكن $h(b) = 0$ ، اذاً $u(b) = 0$ وهذا خلاف الفرض . اذاً $(h' - \frac{u'h}{u})^2 > 0$ ، وعليه فإن $\delta^2 J > 0 \Leftrightarrow F_{yy} > 0$ ، وعليه فإن للدالي $J[y]$ قيمة صغرى محليه .

□

مثال ٥ - ٢ - ٥:

ليكن

$$. y(1) = 1 , y(0) = 0 , J[y] = \int_0^1 y'^3 dx$$

إذا معادله اويلر- لاگرانج للدالي $J[y]$ هي $y' = c$ ، وعليه فإن $y = cx + b$ ، لكن $y(0) = 0$ ، $y(1) = 1$ ، اذاً $y = x$. لكن $F_{yy} = 6y'$ ، اذاً $F_{yy} = 6 > 0$ ، اذاً $y = x$ ، $h(x) = x$ وبالتالي فإن $h(0) = 0$ ، $h'(0) = 1$ ، وعليه فإن $[0,1]$ لا يحوي أي نقطة مرافقه للنقطة $x = 0$ ، وبالتالي فإن للدالي $J[y]$ قيمة صغرى محليه ضعيفه على $y = x$.

٥ - ٣: شرط فيرشتراس Weierstrass Condition

سنركز اهتمامنا في هذا الجزء على دراسة شرط فيرشتراس الضروري واللازم لوجود قيم قصوى صغرى او عظمى محليه للداليات وللتمهيد الى ذلك نورد مايلي.

تعريف ٥ - ٣ - ١:

يقال عن عائلة من المنحنيات $y = y(x,c)$ ، انها تشكل مجالاً خاصاً او

فعلياً (Proper Field) في المنطقة $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ، إذا مرّ بكل نقطة من نقاط المنطقة D ،
 منحني واحد وواحد فقط من تلك العائلة .

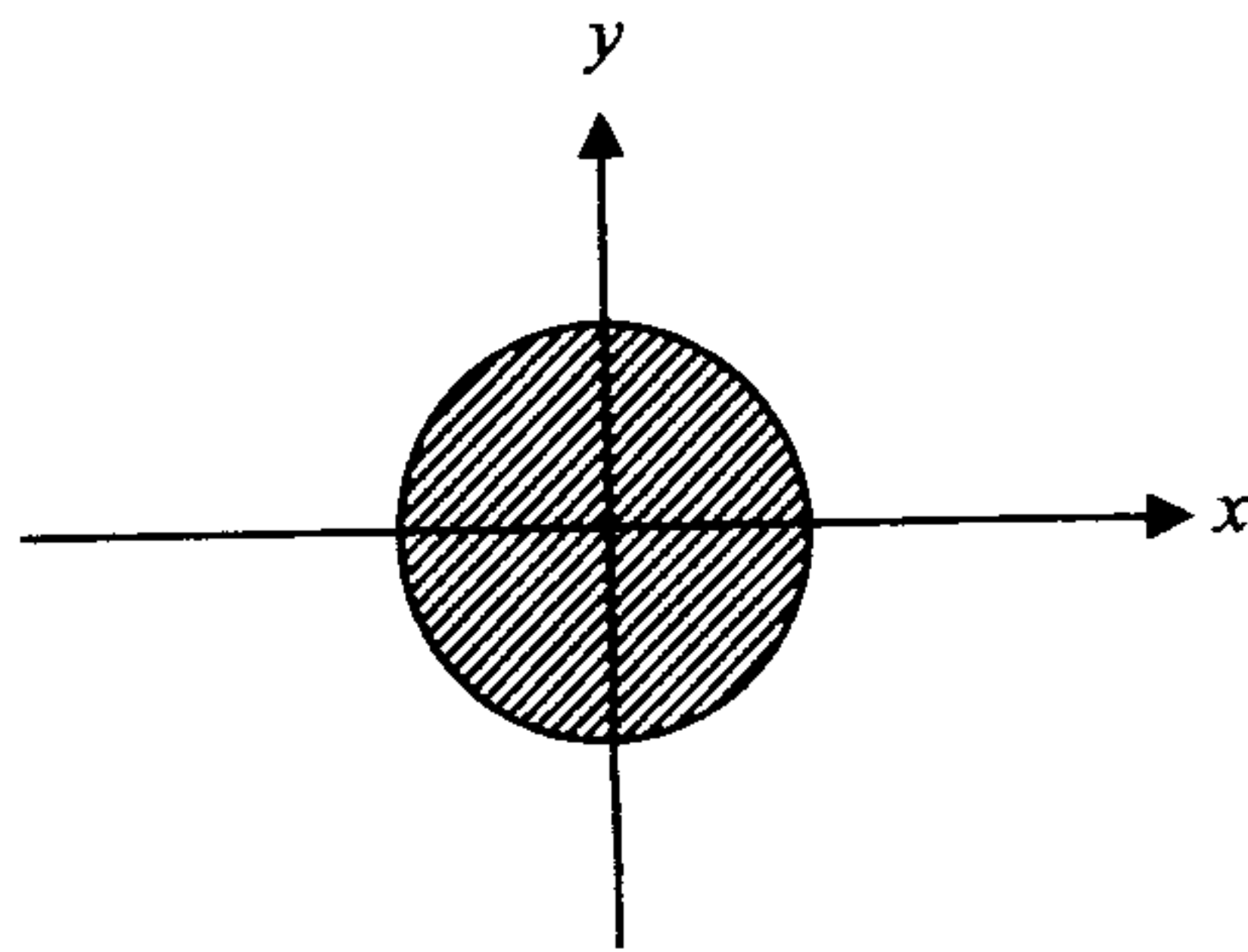
ويعرف ميل المجال $P(x, y)$ عن النقطة (x, y) ، بأنه ميل المماس لمنحني من
 العائلة $y(x, c)$ يمر بالنقطة (x, y) .

مثال ٥ - ٣ - ١:

إذا كانت $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ ، فإن

(١) عائلته الخطوط المستقيمة $y = x + c$ ، حيث c ثابت تمثل مجالاً خاصاً

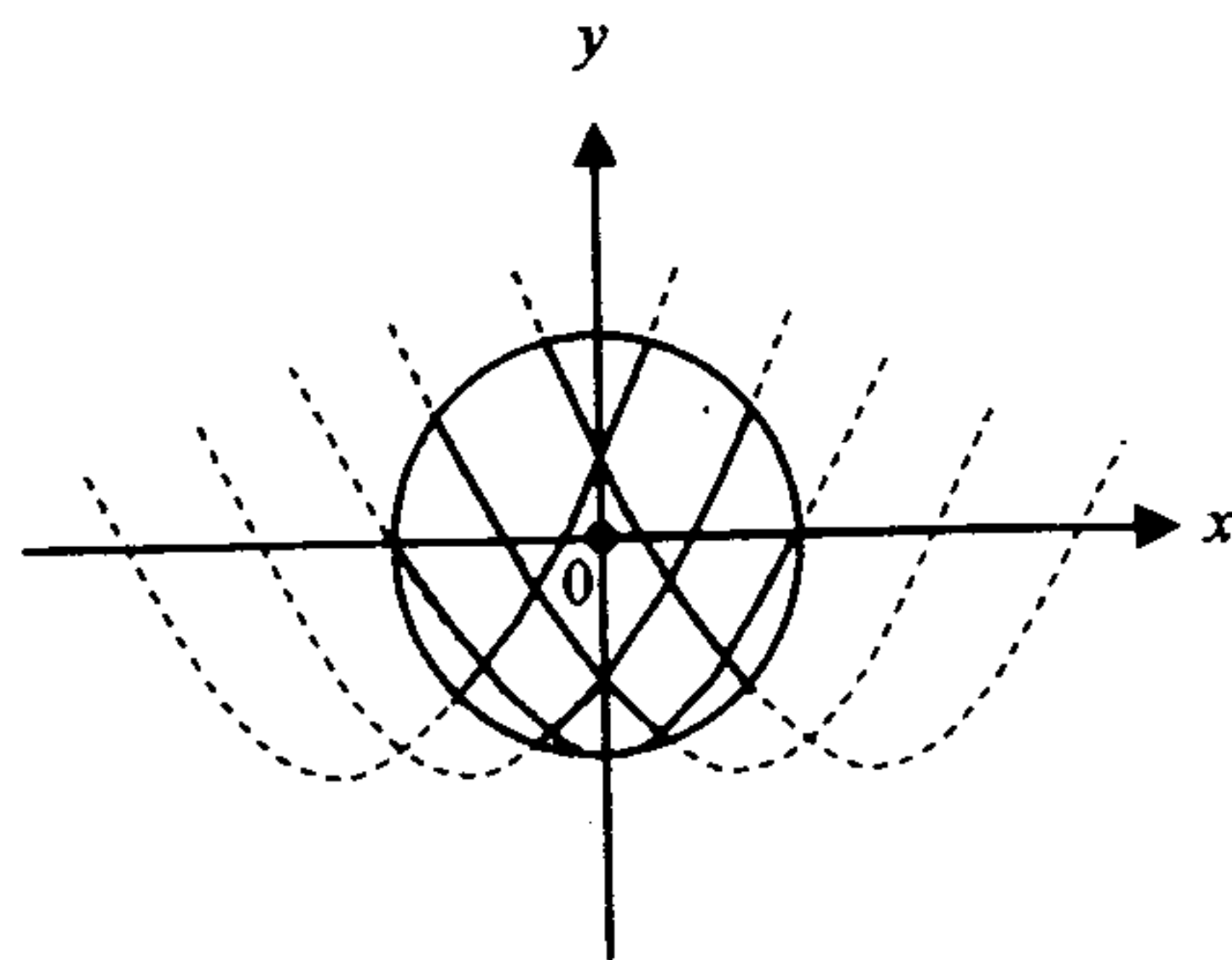
في المنطقة D ، ميله $P(x, y) = 1$ ، انظر الشكل (٥ - ٢) .



شكل (٥ - ٢)

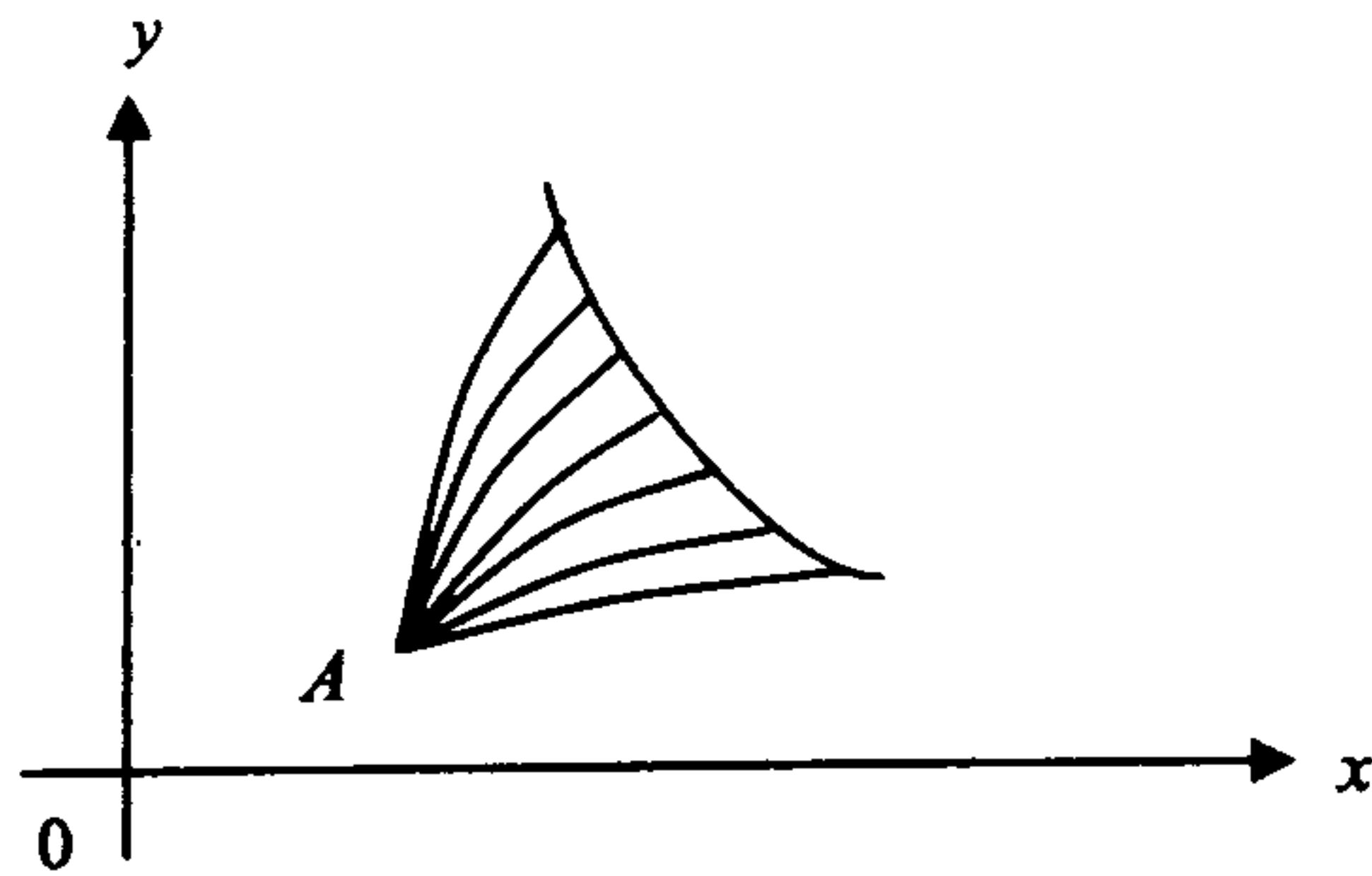
(ب) عائلته القطوع المكافئة $y = (x - a)^2 - 1$ ، لا تمثل مجالاً على D ، لأن تلك

القطاعات تتقاطع دائره الدائره $x^2 + y^2 = 1$ ، انظر شكل (٥ - ٣) .



شكل (٥ - ٣)

ملاحظه: اذا كانت كل منحنيات العائلة $y = y(x, c)$ تمر خلال نقطة معينة $A(x_0, y_0)$ فإنها لا تمثل مجالاً خاصاً في المنطقه D . وفي هذه الحالة، إذا كانت المنحنيات تغطي المنطقه D كلها ولا تتقاطع عند أي نقطه في D ما عدا عند النقطة $A(x_0, y_0)$. أي أن شروط تعريف المجال تتحقق عند كل نقاط D ما عدا عند النقطة $A(x_0, y_0)$. حينئذ نقول أن العائلة $y = y(x, c)$ تمثل مجالاً مركزياً (Central Field) انظر شكل (٥-٤).

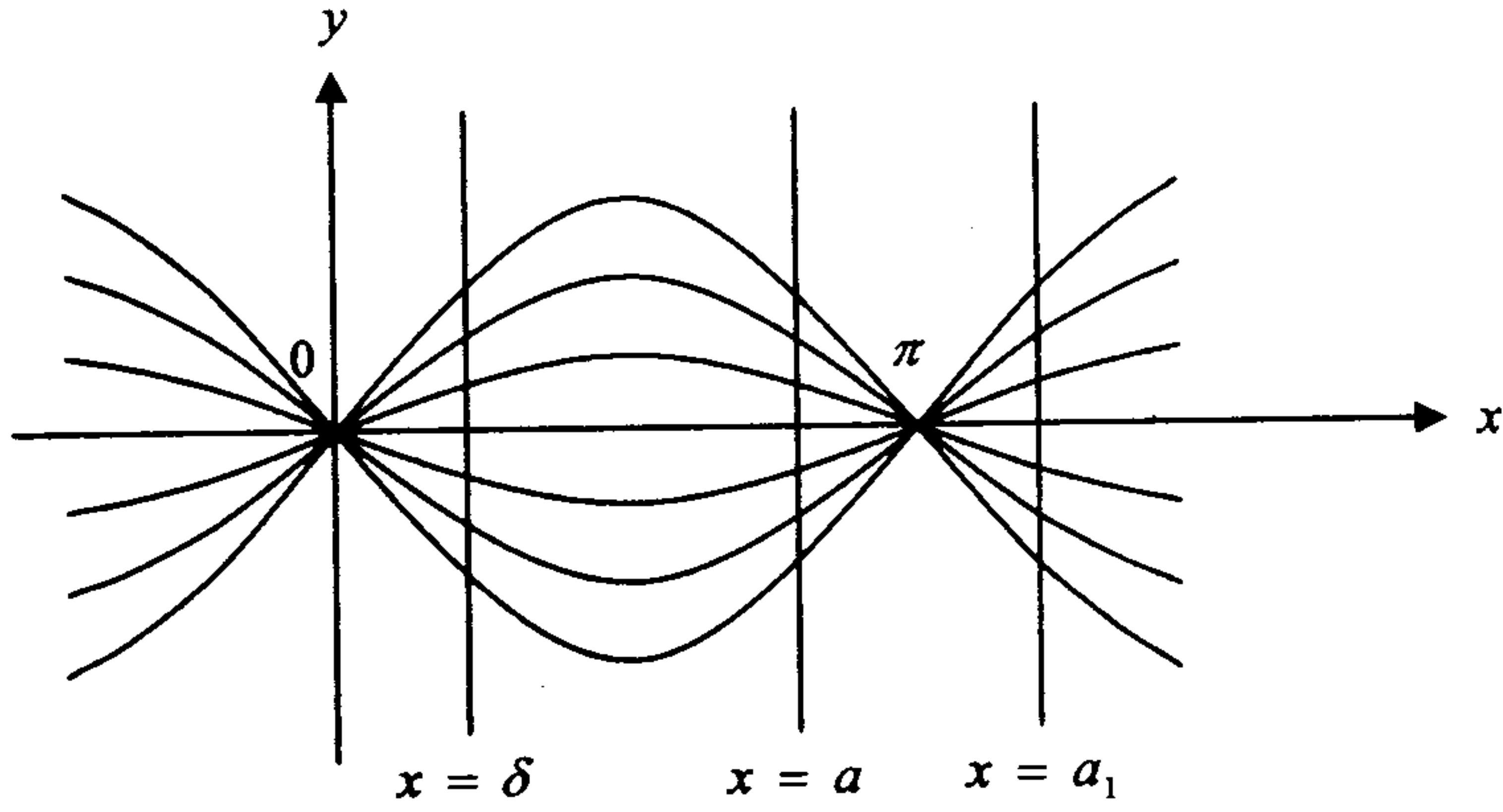


شكل (٥-٤)

مثال ٥-٣-٢:

العائلة $y = c \sin x$ ، $0 \leq x \leq a$ ، $a < \pi$ ، حيث c ثابت اختياري، تمثل مجالاً مركزياً، انظر الشكل (٥-٥). لاحظ أن نفس العائلة (المنحني الجيبي) تمثل مجالاً خاصاً في جوار صغير لفترة من محور السينات وهي $\delta \leq x \leq a$ ، حيث $\delta > 0$ ، $a < \pi$. انظر الشكل (٥-٥).

كما نلاحظ أيضاً أن نفس العائلة لا تمثل مجالاً في جوار فترة من محور السينات هي $0 \leq x \leq a_1$ حيث $a_1 > \pi$. انظر الشكل (٥-٥).



شكل (5-5)

تعريف 5-3-2:

إذا تكون المجال الخاص او المجال المركزي من عائله من منحنيات القيم القصوى لمسأله معينة من مسائل التغيرات ، فإنه يسمى مجال قيم قصوى .

والآن إذا كان $y = y(x)$ منحنى قيم قصوى للدالي $J[y] = \int_{x_2}^{x_1} F(x, y, y') dx$ ،

وكانت نقاط الحدود $A(x_0, y_0), B(x_1, y_1)$ ثابتة. فيقال أن منحنى القيم

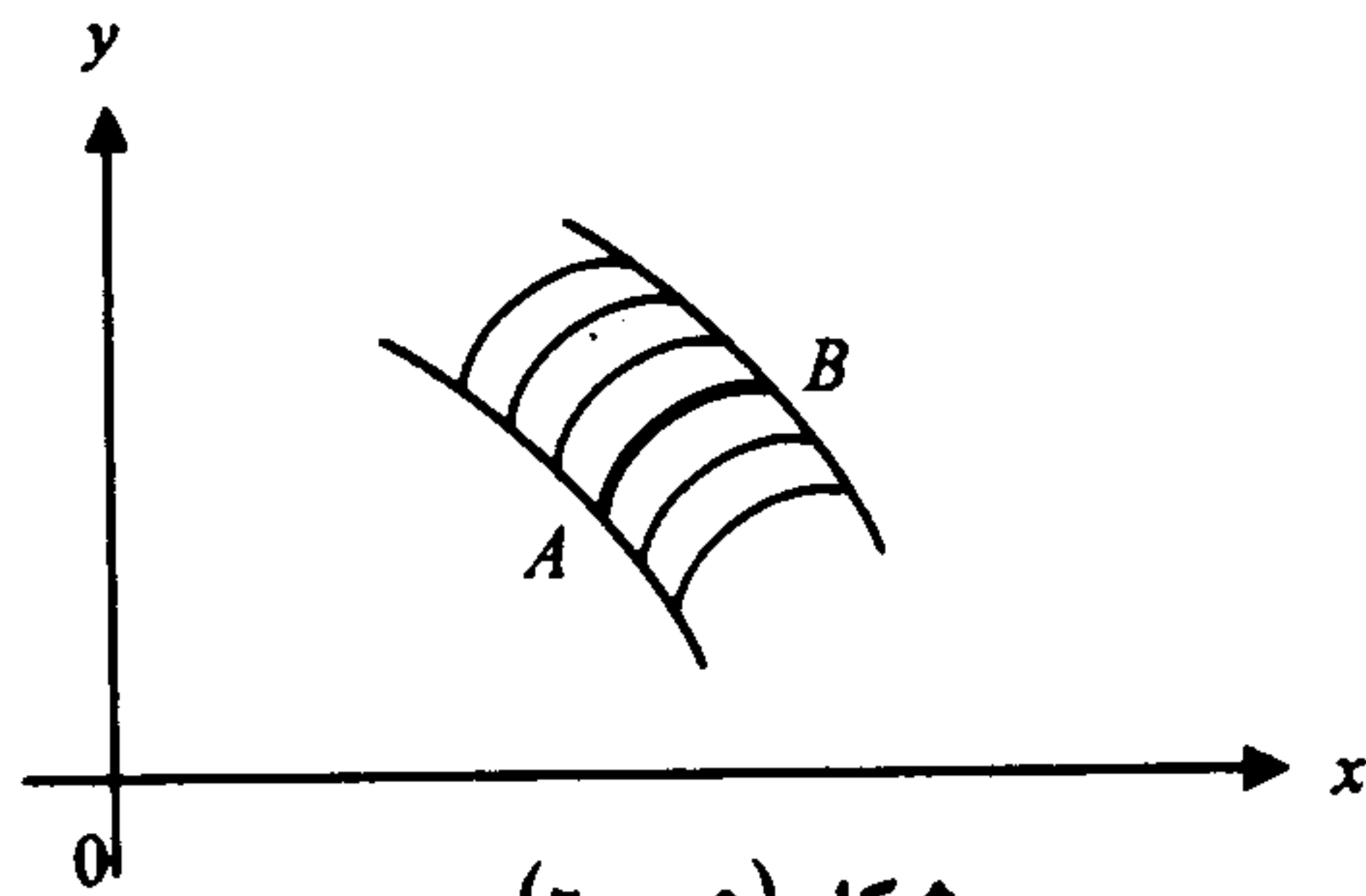
القصوى $y = y(x)$ ينتمي الى مجال القيم القصوى ، إذا كانت عائلة منحنيات

القيم القصوى $y = y(x, c)$ لهذا الدالي تمثل مجالاً يحتوي على منحنى القيم

القصوى $y = y(x)$ لقيمة معينة $C = C_0$ والمنحنى $y = y(x)$ لا يقع على

حدود المنطقة D التي تمثل فيها العائلة $y = y(x, c)$ مجالاً خاصاً . انظر

الشكل (5-6)



شكل (5-6)

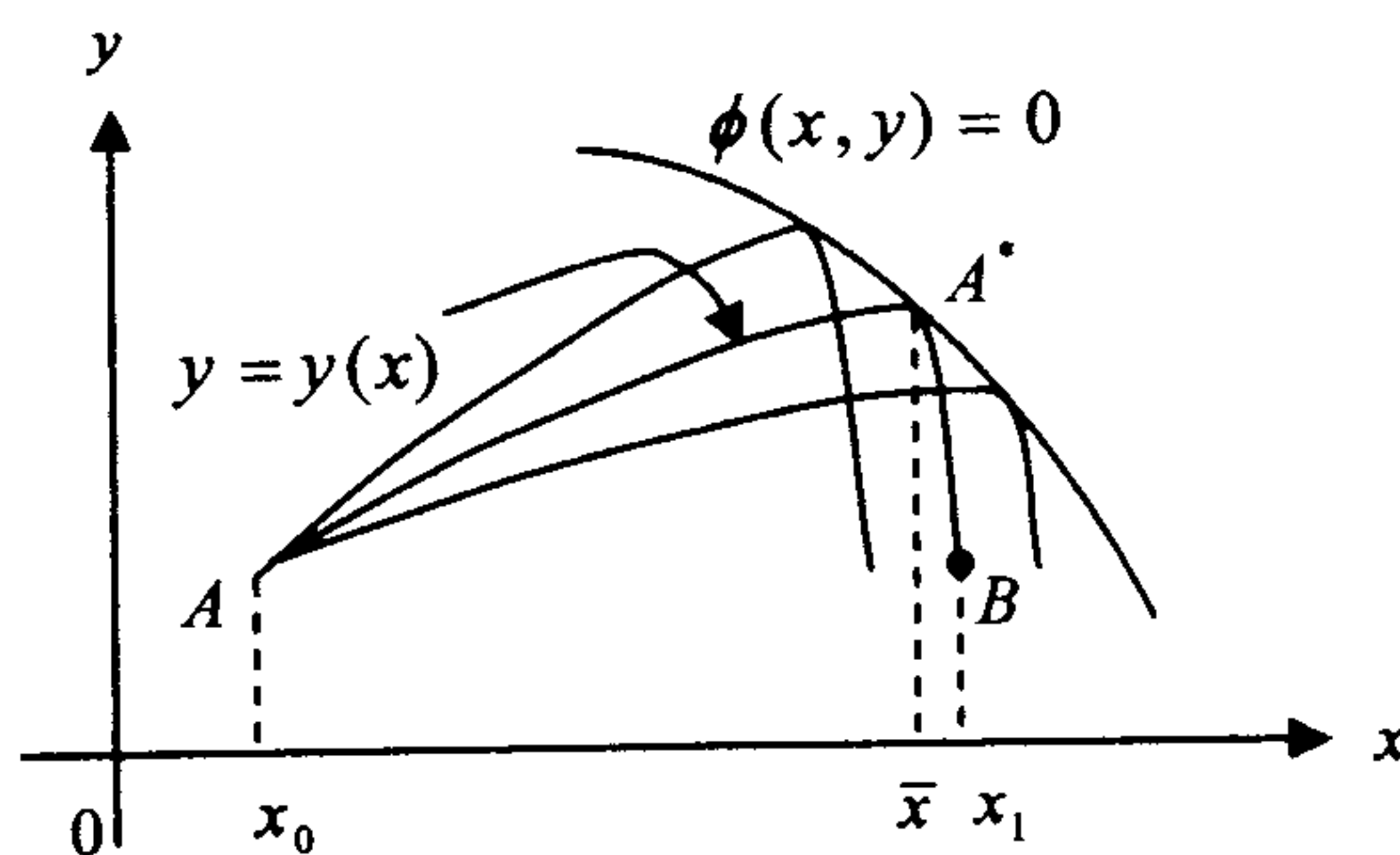
وإذا كان رسم منحنيات القيم القصوى ذات المركز $A(x_0, y_0)$ ، يمثل مجالاً في جوار منحنى القيم القصوى $y = y(x)$ والذي يمر بالنقطة A ، فإن المجال المركزي يحتوي على منحنى القيم القصوى $y = y(x)$.

مثال ٥ - ٣- ٣:

$$\text{ليكن } J[y] = \int_0^1 (y'^2 - y^2) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

إذا الحل العام لمعادلة أويلر- لاگرانج هو $y = c \sin x$ ، ومنحنيات هذه العائلة تكون مجالاً مركزياً في الفترة $[0, a]$ ، $a < \pi$ ، ويشتمل على منحنى قيم قصوى $y = 0$ عندما $c = 0$. لاحظ أن $a < \pi$ لا يحوي نقاط مرافقه للنقطة $x = 0$. أما إذا كانت $a \geq \pi$ فإن العائلة $y = c \sin x$ لا تمثل مجالاً لأن الفترة $[0, a]$ ، $a \geq \pi$ تحوي نقاط مرافقه للنقطة $x = 0$.

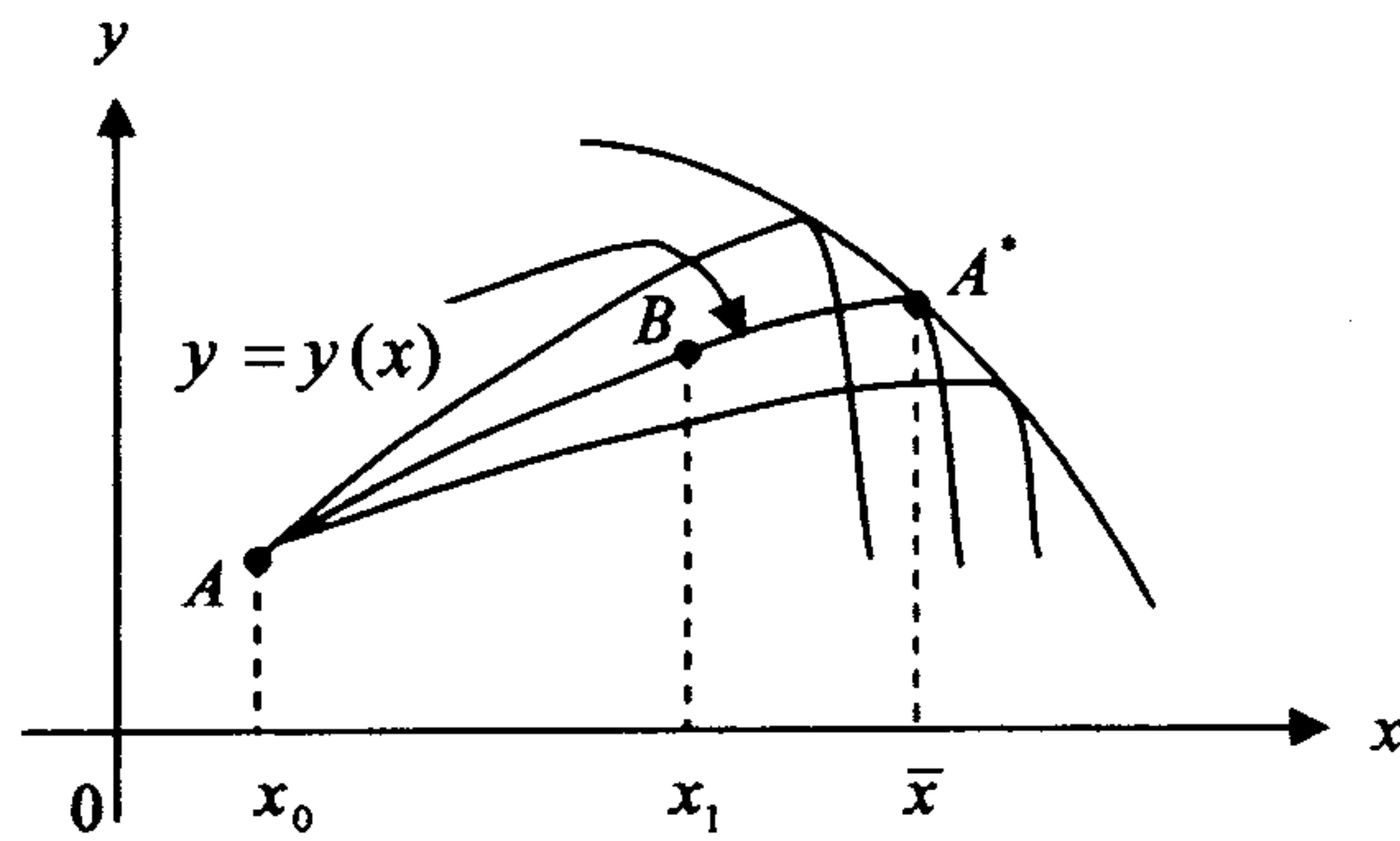
ملاحظة: إذا كانت $F(x, y, c) = 0$ عائلة من المنحنيات المارة بنقطة معينة $A(x_0, y_0)$ وتقاطع المنحنيان القريبان من بعضهما في تلك العائلة عند نقاط من منحنى $\phi(x, y) = 0$ " يسمى مثل هذا المنحنى المنحني المميز لتلك العائلة"، فإن منحنيات هذه العائلة والتي تكون في حالة قرب من منحنى القيم القصوى $y = y(x)$ الذي يمر بالنقطتين $A(x_0, y_0)$ ، $B(x_1, y_1)$ سوف تتقاطع عند نقاط قريبة من نقطه التماس للمنحنى $y(x)$ ، مع المنحنى المميز، انظر شكل (٥- ٧).



شكل (٥- ٧)

وإذا كان للقوس AB من منحنى القيم القصوى $y = y(x)$ ، نقطه مثل A^* مختلفه عن A ومشاركه مع المنحنى المميز للعائلة $y = y(x, c)$ ، فإن منحنيات هذه العائلة والقريبه من $y(x)$ سوف تتقاطع مع نفسها ومع المنحنى $y(x)$ قريباً من النقطه A^* ، وبالتالي فإنها لا تمثل مجالاً، شكل (٥-٧)، وهذا يعني ان A^* نقطه مرافقه للنقطه A ، وبالتالي فإن A^* تمثل حلاً لمعادله جاكوبي يحقق الشرط $h'(x_0) = 1$ ، $h(x_0) = 0$ ، وعليه فإن الفتره (x_0, x_1) تحوي نقطه مرافقه للنقطه x_0 .

اما اذا كان القوس AB من منحنى القيم القصوى $y = y(x)$ ، لا يشترك بنقاط مختلفه عن A مع المنحنى المميز لعائلة منحنيات القيم القصوى والتي تشمل على المنحنى $y = y(x)$ ، فإن منحنيات القيم القصوى من هذه العائلة والتي تكون قريبه قريباً كافياً من القوس AB يشتمل على هذا القوس، شكل (٥-٨).



شكل (٥-٨)

إذا لا توجد نقاط مرافقه للنقطه A على القوس AB ، وهذا يعني عدم وجود نقطه مرافقه للنقطه x_0 على الفتره (x_0, x_1) ، ومن ثم فإن شرط جاكوبي يتحقق، وعليه فإن القوس AB يقع في مجال مركزي مكون من منحنيات القيم القصوى مركزه النقطه A .

والآن الى تعريف دالة الزيادة لفيرشتراس.

تعريف ٥-٣-٣

نسمي الدالة $E: [a, b] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ، حيث

$$E(x, y, y', P) = F(x, y, P) - F(x, y, y') - (P - y') F_{y'}(x, y, y')$$

حيث P ميل المجال (الحقل) المركزي ، داله الزيادة لفيرشتراس (weierstrass excess Function) نسبة للرياضي الألماني كارل فيرشتراس (١٨١٥م - ١٨٧٩م) .

مثال ٥-٣-٤

$$y(1) = 1 \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad \mathcal{J}[y] = \int_0^1 y'^3 dx \quad \text{إذا كان}$$

فإن حل معادله اويلر- لاگرانج هو $y = x$ ، وعليه فإن $y' = 1$. وبالتالي فإن

$$E(x, y, y', P) = P^3 - 1 - 3(P-1) = P^3 - 3P + 2$$

والآن الى المبرهنه الآتيه

مبرهنه ٥-٣-١

إذا كان $y(x)$ منحنى قيمه صغرى محليه للدالي

$$. \quad y(b) = B \quad , \quad y(a) = A \quad , \quad \mathcal{J}[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx \in D_1$$

فإن $E(x, y, y', P) \geq 0$ لكل $x \in [a, b]$ ، ولكل $P \in \mathbb{R}$.

البرهان :

ليكن $[c, d] \subset [a, b]$ ، ولنفرض ان

$$y^*(x) = \begin{cases} y(x) & x \in [c, d] \subset [a, b] \\ Y(x) & x \in [c, \varepsilon], \varepsilon \in [c, d] \\ \phi(x, \varepsilon) & x \in [\varepsilon, d] \end{cases}$$

$$\phi(x, \varepsilon) = y(x) + \frac{Y(\varepsilon) - y(\varepsilon)}{d - \varepsilon} (d - x), P \in R, Y(x) = y(c) + p(x - c) \text{ حيث}$$

لكن للدالي $J[y]$ قيمه صفري محليه على $y(x)$ ، إذا $J[y] \leq J[y^*]$ ، لكن $\Delta J(c) = 0$

$$g(\varepsilon) = \Delta J(\varepsilon) = \int_c^d [F(x, Y(x), Y'(x)) - F(x, y, y')] dx + \int_c^d [F(x, \phi(x, \varepsilon), \phi_x(x, \varepsilon)) - F(x, y, y')] dx$$

وباستخدام قاعده ليبتز، نجد ان

$$\delta J[\varepsilon] = F(\varepsilon, Y(\varepsilon), Y'(\varepsilon)) - F(\varepsilon, \phi(\varepsilon, \varepsilon), \phi_x(\varepsilon, \varepsilon)) + \int_c^d [F_y \phi_\varepsilon(x, \varepsilon) + F_y \phi_{x\varepsilon}(x, \varepsilon)] dx \dots (1)$$

لكن $\phi_{\varepsilon x} = \phi_{x\varepsilon}$ ، وبالتكامل بالتجزئه نجد ان

$$\int_c^d F_y \phi_{\varepsilon x}(x, \varepsilon) dx = F_y(x, \phi(x, \varepsilon), \phi_x(x, \varepsilon)) \phi_\varepsilon(x, \varepsilon) \Big|_c^d - \int_c^d (\phi_\varepsilon(x, \varepsilon) \frac{d}{dx} F_y) dx \dots (2)$$

ومن (1) ، (2) نجد ان

$$\delta J[\varepsilon] = \int_c^d (F_y - \frac{d}{dx} F_y) \phi_\varepsilon(x, \varepsilon) dx + F_y(x, \phi(x, \varepsilon), \phi_x(x, \varepsilon)) \phi_\varepsilon(x, \varepsilon) \Big|_c^d \dots (3)$$

$$\phi_\varepsilon(x, \varepsilon) = \frac{Y'(\varepsilon) - y(\varepsilon)}{d - \varepsilon} (d - x) + \frac{Y(\varepsilon) - y(\varepsilon)}{(d - \varepsilon)^2} (d - x)^2, Y(x) = y(c) \text{ لكن}$$

إذا $\phi_\varepsilon(d, c) = 0$

$$\phi_\varepsilon(c, c) = Y'(\varepsilon) - y(\varepsilon) \dots (4)$$

كما ان

$$x \in [c, d] \text{ لكل } \phi(x, a) = y(x), \phi_x(x, a) = y'(x) \dots (5)$$

وعليه فإن بوضع $\varepsilon = c$ نجد ان (3) تصبح كالآتي :

$$F_y(c, y(c), y'(c)) [y'(c) - Y'(c)]$$

ومن (4) ، (5) ومعادله اويلر- لاجرانج " $F_y - \frac{d}{dx} F_y$ " نجد ان

$$g(x) = F(c, Y(c), Y'(c)) - F(c, \phi(c, c), \phi_x(c, c)) - [Y'(c) - y'(c)] F_y(c, y(c), y'(c)) \dots (6)$$

لكن $Y'(c) = P$ ، $Y(c) = y(c)$ ، $\phi_x(c, c) = y'(c)$ ، $\phi(c, c) = y(c)$ إذا من الشرط $\delta J(c) \geq 0$ والعلاقة

$$E(x, y, y', P) = F(x, y, P) - F(x, y, y') - (P - y') F_y(x, y, y')$$

والمعادلة (6) ينتج ان

$$P \in \mathbb{R} \text{ لكل } \delta J(c) = E(c, y(c), y'(c), P) \geq 0$$

□

ملاحظة: اذا كان للدالي $J[y]$ قيمة عظمى محلية على $y(x)$ ، فإن

$$P \in \mathbb{R} \text{ لكل } E(x, y, y', P) \leq 0$$

واخيراً الى المبرهنه الآتية التي تحدد الشرط الكافي لوجود قيم قصوى محلية قوية

مبرهنه ٥ - ٣ - ٢:

$$y(b) = B \text{ ، } y(a) = A \text{ ، } J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx \in \ell_1 \text{ إذا كان}$$

وكان $[a, b]$ لا يحوي أي نقطة مرافقه للنقطة a و $E(x, y, y', P) > 0$ لكل

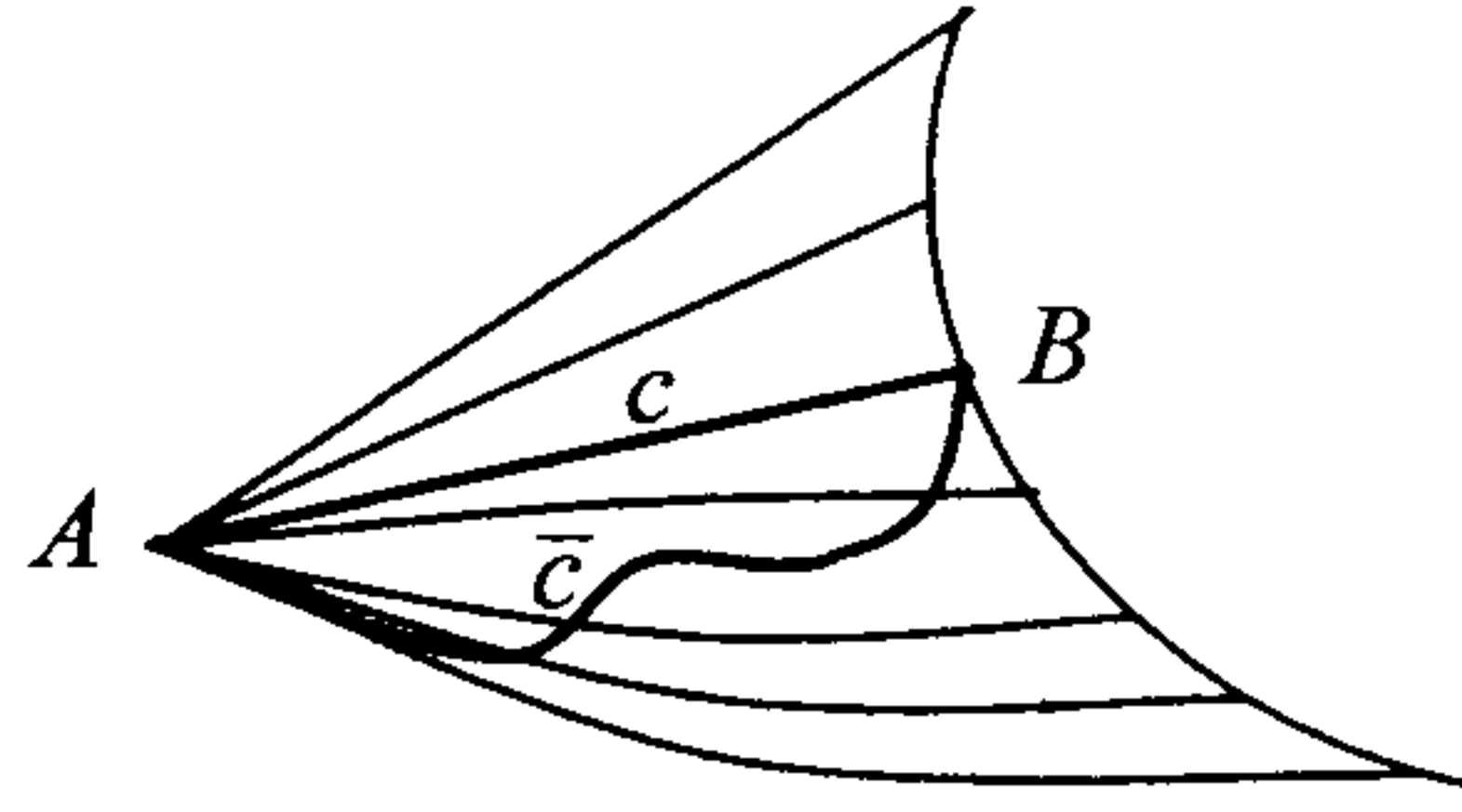
$P \in \mathbb{R}$ ، فإن للدالي $J[y]$ قيمة صغرى محلية قوية على المنحني $y(x)$.

البرهان:

بما ان شرط جاكوبي متحقق ، إذا يمكن احاطة منحني القيم القصوى

المرابالنقطتين $A(a, y_a)$ ، $B(b, y_b)$ بمجال مركزي ميله $P = P(x, y)$ ، انظر

شكل (٥ - ٩) .



شكل (٥-٩) .

والآن افرض ان

$$\Delta J = \int_{\bar{c}} F(x, y, y') dx - \int_c F(x, y, y') dx$$

حيث \bar{c} منحنى آخر يمر بالنقطتين A, B قريباً من c . واذا كان

$$K[y] = \int_{\bar{c}} [F(x, y, P) + (\frac{dy}{dx} - P) F_y(x, y, P)] dx$$

فإن $\int_c F(x, y, y') = K[y]$ لأن $y' = \frac{dy}{dx} = P$ في هذه الحالة .

$$K[y] = \int_{\bar{c}} [F(x, y, P) - P F_p(x, y, P)] dx + F_p(x, y, P) dy \quad \text{لكن}$$

عبارة عن تكامل تفاضل تام (exact differential) للدالي $\bar{J}[x, y]$ التي حول لها الدالي $J[y(x)]$. إذاً

$$\delta \bar{J} = F_y(x, y, y') dy + [F(x, y, y') - y' F_y(x, y, y')] dx$$

وعليه وعلى المنحنى c نجد ان

$$\int_{\bar{c}} [F(x, y, P) + (y' - P) F_p] dx = \int_c F(x, y, y') dx$$

وحيث ان $K[y]$ تكامل تفاضل تام ، إذاً $K[y]$ لا يعتمد على المسار الذي يؤخذ

عليه التكامل " يسمى مثل هذا التكامل تكامل هيلبرت اللامتغير Hilbert

" invariant integral .

$$\int_c^{\bar{c}} F(x, y, y') dx = \int_c^{\bar{c}} [F(x, y, P) + (y' - P) F_p(x, y, P)] dx \quad \text{إذا}$$

ليس على $c = \bar{c}$ فقط بل على أي اختيار للمسار \bar{c} ، وعليه فإن

$$\begin{aligned} \Delta J &= \int_c^{\bar{c}} F(x, y, y') dx - \int_c^{\bar{c}} F(x, y, y') dx \\ &= \int_c^{\bar{c}} F(x, y, y') dx - \int_c^{\bar{c}} [F(x, y, P) + (y' - P) F_p(x, y, P)] dx \\ &= \int_c^{\bar{c}} [F(x, y, y') - F(x, y, P) + (y' - P) F_p(x, y, P)] dx \\ &= \int_c^{\bar{c}} E(x, y, P, y') dx = \int_c^{\bar{c}} E(x, y, P, y') dx \end{aligned}$$

لكن $E(x, y, P, y') \geq 0$ يعني ان $\Delta J \geq 0$ ، وعليه فإن للدالي $J[y]$ قيمة صغرى محلية على المنحني $y(x)$ ، أما اذا كان $E(x, y, y', P) > 0$ ، فإن $\Delta J > 0$ ، وعليه فإن للدالي قيمة صغرى محلية قوية على المنحني $y(x)$. □

ملاحظة: اذا تحقق شرط جاكوبي، وكان $E(x, y, y', P) < 0$ ، فإن للدالي $J[y]$ قيمة عظمى محلية قوية على $y(x)$.

مثال ٥ - ٣ - ١:

$$J[y] = \int n(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx \quad \text{ليكن}$$

$$F_{yy'}(x, y, p) = \frac{n(x, y)}{(1 + p^2)^{3/2}} > 0 \quad \text{إذا}$$

وعليه فإن شرط فيراشتراس متحقق.

وبالتالي إذا أمكن إحاطة منحنى القيم القصوى المار بنقطتين A, B بمجال فانه يعطي الدالي قيمة صغرى قوية.

$$(١) \text{ إذا كانت } n(x, y) = y^{-1}$$

فإن منحنيات القيم القصوى في نصف المستوى $y > 0$ تكون عبارة عن

أنصاف دوائر متعامدة مع Ox . وإذا لم تقع A, B في نصف المستوى العلوي على خط مستقيم عمودي على Ox ، فإن منحنى واحد من هذه المنحنيات يمر بهاتين النقطتين ويمكن إحاطته بمجال .

$$(2) \text{ إذا كانت } n(x, y) = \sqrt{y+h}$$

$$J[y] = \int_a^b \sqrt{y+h} \sqrt{1+y'^2} dx \quad \text{فإن}$$

حيث h عدد ثابت موجب .

وهنا نلاحظ أن الدالة F خالية من x . إذن معادلة اويلر- لاجرانج تصبح على الشكل

$$\sqrt{y+h} \sqrt{1+y'^2} - \frac{\sqrt{y+h} y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = c_1$$

وعليه فإن

$$\frac{\sqrt{y+h}}{\sqrt{1+y'^2}} = c_1$$

بحل هذه المعادلة بالنسبة إلى y' ثم بالتكامل نحصل على الحل العام لمعادلة اويلر- لاجرانج، وهو

$$y+h - c_1^2 = \left(\frac{x}{2c_1} + c_2 \right)^2$$

وهذه المعادلة تمثل مجموعة من القطاعات المكافئة .

وإذا وضعنا $c_1 = 0$ نحصل على مستقيمات موازية لمحور $y=0$ كمنحنيات قصوى.

نأخذ مجموعة المنحنيات القصوى المنبعثة من المبدأ . أي نأخذ الشرطين

$$y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = \alpha \quad \text{الابتدائيين}$$

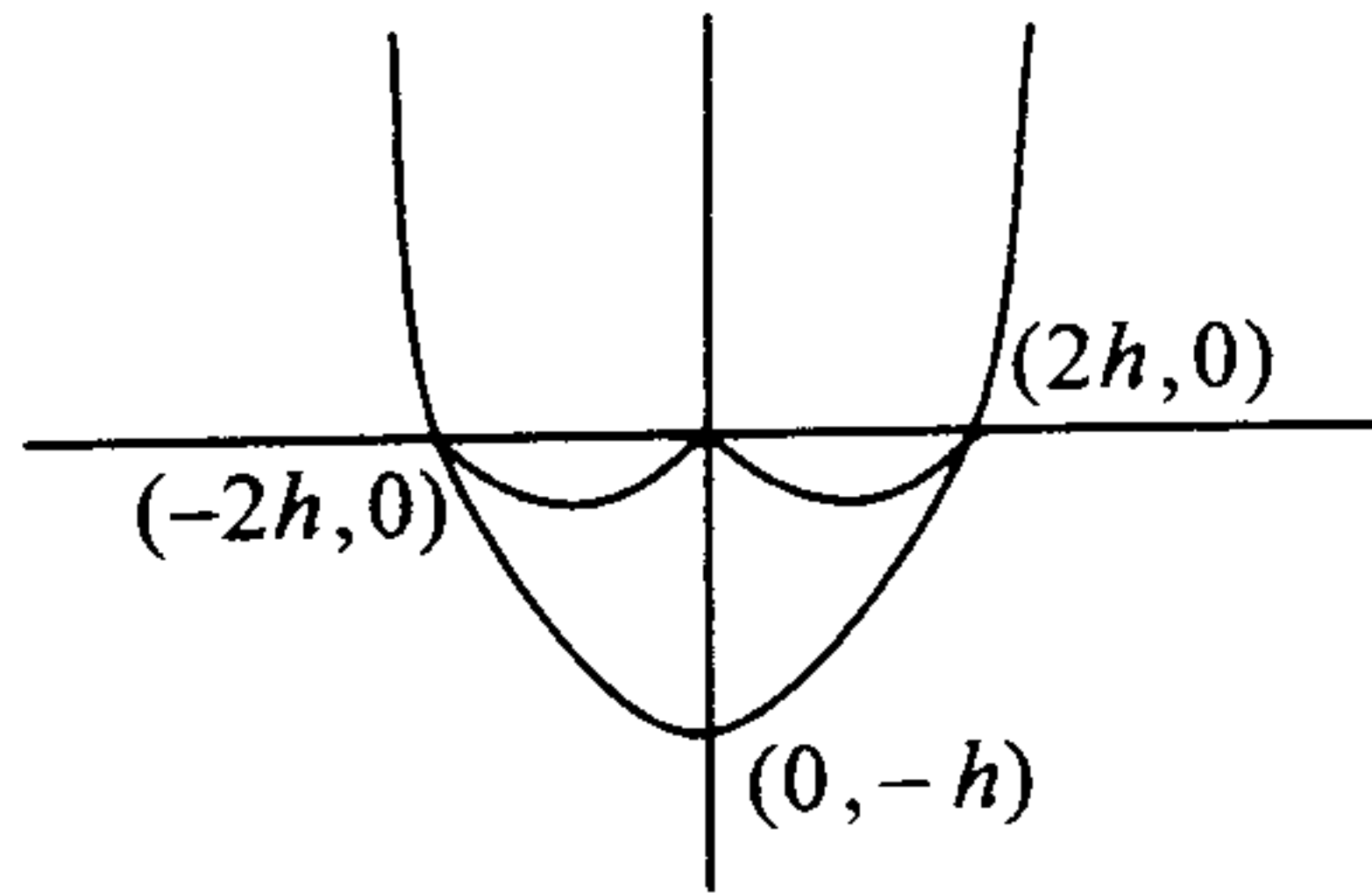
وبعد إيجاد c_1, c_2 من هذين الشرطين نحصل على

$$y = \frac{(1 + \alpha^2)}{4h} x^2 + \alpha x$$

وهذه المعادلة تعطي ، بعد الاشتقاق بالنسبة الى α وحذفها ، مغلف مجموعة

القطاعات المكافئة . $y = \frac{x^2}{4h} - h$ ، وهذا قطع مكافئ رأسه $(0, -h)$

ومحوره $x = 0$. انظر الشكل (٥ - ١٠) .



شكل (٥ - ١٠)

ويتحقق شرط جاكوبي على الجزء ، من منحنى القيم القصوى ، واقع بين
المبدأ وأيئة نقطة تسبق نقطة التماس لهذا القطع مع المغلف . وبالإضافة الى
ذلك فإن شرط لجندير يتحقق أيضاً لأن

$$F_{y'y'} = \frac{\sqrt{y+h}}{(1+y'^2)^{3/2}} > 0$$

أي أنه يمكن إحاطة هذا الجزء من منحنى القيم القصوى بحقل . كما أن
هذا الجزء يعطي الدالي قيمة صغرى قوية .

مثال ٥ - ٣ - ٦ :

$$J[y] = \int_0^1 y'^3 dx \quad \text{ليكن}$$

ونطرح مسألة رسم منحنى قيم قصوى يمر بين النقطتين $A(0,0)$ ، $B(1,1)$.

إن الحل العام لمعادلة اويلر- لاجرانج هو

$$y = c_1 x + c_2$$

لكن $y(0) = 0$ ، $y(1) = 1$ ، إذا $y = x$ ، وعليه فإن $F_{yy} = F_{yy'} = 0$ ،
 وبالتالي فإن $F_{yy'} = 6 > 0$ على المستقيم $y = x$ ، ومن ثم
 فإن شرط لجندر يتحقق.

وتصبح معادلة جاكوبي $h' = c$ وحلها $h(x) = x$ حيث $h'(0) = 1$ ،
 $h(0) = 0$ إذا شرطي لجندر و جاكوبي يتحققان على طول القطعة المستقيمة
 AB من مستقيم القيم القصوى $y = x$ وهذه القطعة تعطي الدالي قيمة صفري
 ضعيفة كما أن دالة فيراشتراس تصبح :

$$E(x, y, y', p) = p^3 - y'^3 - 3(p - y') y'^2$$

وعلى طول المستقيم $y = x$ نجد ان

$$E(x, y, y', p) = p^3 - 3p + 2$$

وعندما $p < -2$ ، نجد ان $E(x, y, y', p) < 0$ ، وهذا يعني عدم تحقق الشرط
 $E > 0$ ، وعليه فإن المستقيم $y = x$ لا يعطي قيمة صفري قويه .

ملاحظه: قد يكون من الصعب تحديد اشارة

$$E(x, y, y', p) = F(x, y, p) - F(x, y, y') - (p - y') F_{y'}(x, y, y')$$

لذلك نستخدم مفكوك تايلور للحدين $F(x, y, p) - F(x, y, y')$ حتى حدود
 الدرجة الثانيه في $(p - y')$ ، فيمكننا التعبير عن داله فيراشتراس ، كالاتي

$$E = E(x, y, y', p) = \frac{1}{2} (p - y')^2 F_{yy'}(x, y, \alpha)$$

حيث $\alpha \in (p - y')$ ، ومن ثم $E \geq 0$ اذا واذا فقط $F_{yy'}(x, y, \alpha) \geq 0$ وعليه فإن
 الشرط الكافي لوجود قيم صفري محليه قوه للدالي $J[y]$ على المنحني $y(x)$ هو
 امكانيه احاطة $y(x)$ بحقل تتحقق عند كل نقطه من نقاطه المتراجحه

$$. F_{yy'} > 0$$

مثال ٥ - ٣ - ٧:

حدد نوع القيم القصوى للدالي

$$. b > 0 , a > 0 , y(a) = b , y(0) = 0 , J[y] = \int_0^a (6y'^2 - y'^4 + yy') dx$$

الحل

$$F = F(y, y') = 6y'^2 - y'^4 + yy' \quad \text{بما ان}$$

إذا معادله اويلر- لا جرانج هي

$$F - y' F_{y'} = c_1$$

وعليه فإن $3y'^4 - 6y'^2 = c_1$ ، ومنها نجد ان $y' = c$ وعليه فإن $y = cx + d$

لكن $y(0) = 0$ ، إذا $y = cx$ ، وحيث $y(a) = b$ ، إذا $c = \frac{b}{a}$ ، وعليه فإن $y = \frac{b}{a}x$

وهو محتوى في عائله المستقيمات $y = cx$ التي تشكل مجالاً مركزياً . لكن

$$E(x, y, y', p) = F(x, y, p) - F(x, y, y') - (p - y') F_{y'}(x, y, y')$$

$$E(x, y, y', p) = 6p^2 - p^4 - yp - 6y'^2 + y'^4 - yy' - (p - y')(12y' - 4y'^3 - y)$$

$$= 6p^2 - p^4 - 6y'^2 - 3y'^4 - 12py' - 4py'^3$$

إذا من الصعب تحديد اشارته E ، لذلك نستخدم الملاحظة اعلاه، فنجد ان

$$E = E(x, y, y', p) = \frac{1}{2} (p - y')^2 F_{y'y'}(x, y, \alpha)$$

لكن $F_{y'y'} = 12(1 - y'^2)$ ، إذا $F_{y'y'}(x, y, \alpha) = 12(1 - \alpha^2)$ وعليه فإن $F_{y'y'} = 0$

يعني أن $\alpha = \pm 1$. إذا $F_{y'y'} > 0$ لكل $0 < \frac{b}{a} = \alpha < 1$ ، وعليه توجد قيمه

صغرى محليه للدالي $J[y]$. لكن $F_{y'y'} < 0$ لكل $\alpha > 1$ ، إذا $E < 0$ لكل $\alpha > 1$

وعليه فإن للدالي قيمه عظمى محليه .

تمارين

(١) احسب $\delta^2 J$ لكل مما يأتي

$$\cdot J[y] = \int_a^b (y^2 + y'^2 - 2y \sin x) dx \quad (\text{ب}) \quad \cdot J[y] = \int_a^b x^2 y'^3 dx \quad (١)$$

(٢) اذا كان $J[y] = \int_0^1 (y^2 + y^3) dx \in \ell[0,1]$ ، فاثبت ان $y(x) = 0$ قيمه صغرى

محليه للدالي $J[y]$ ، بينما $y(x) = \frac{-2}{3}$ ، $0 \leq x \leq 1$ ، قيمه عظمى محليه

للدالي $J[y]$.

(٣) اذا كان $y(1) = 1$ ، $y(0) = 0$ ، $J[y] = \int_0^1 (y^2 - y'^4) dx$

فاثبت ان $\delta J(0, \Delta y) = 0$ لكل Δy بينما $\delta^2 J(0, \Delta y) > 0$.

(٤) هل يتحقق شرط جاكوبي على كل مما يأتي :

$$\cdot y(1) = 1 \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad J[y] = \int_0^1 (y'^2 + y') dx \quad (١)$$

$$\cdot J[y] = \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (\text{ج}) \quad \cdot J[y] = \int_0^b (x^2 + y^2 + y'^2) dx \quad (\text{ب})$$

$$\cdot \alpha > 1 \quad , \quad J[y] = \int_a^b (y'^2 - \alpha^2 y^2) e^{2y} dx \quad (\text{د})$$

(٥) هل يتحقق شرط جاكوبي الموسع على الدالي :

$$y(0) = y(a) = 0 \quad , \quad J[y] = \int_0^a (y'^2 + y^2 + x^2) dx$$

(٦) اوجد القيم القصوى وحدد نوعها في كل مما يأتي :

$$\cdot y(a) = b \text{ ، } y(0) = 0 \text{ ، } J[y] = \int_0^a \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} dx \quad (١)$$

$$\cdot y(2) = 0 \text{ ، } y(0) = 1 \text{ ، } J[y] = \int_0^2 (xy' + y'^2) dx \quad (ب)$$

$$\cdot y(0) = y(a) = 0 \text{ ، } a > 0 \text{ ، } J[y] = \int_0^a (y'^2 + 2yy' - 16y^2) dx \quad (ج)$$

$$\cdot y(-1) = y(2) = 1 \text{ ، } J[y] = \int_{-1}^2 y'(1 + x^2 y') dx \quad (د)$$

(٧) اوجد المنحني المار بالنقطتين $(-1, -1)$ ، $(1, 1)$ والذي يجعل للدالي

$$J[y] = \int_{-1}^1 (x^2 y'^2 + 12y^2) dx \text{ قيمه صغرى .}$$

(٨) اوجد معادلة المنحني المار بالنقطتين $(1, 3)$ ، $(2, 5)$ والذي يجعل الدالي

$$J[y] = \int_1^2 y'(1 + x^2 y') dx \text{ يملك قيمه صغرى .}$$

(٩) حدد نوع القيم القصوى في كل مما يأتي :

$$\cdot y(\pi/4) = 0 \text{ ، } y(0) = -1 \text{ ، } J[y] = \int_0^{\pi/4} (4y^2 - y'^2 + 8y) dx \quad (١)$$

$$\cdot y(2) = 8 \text{ ، } y(1) = 1 \text{ ، } J[y] = \int_1^2 (x^2 y'^2 + 12y^2) dx \quad (ب)$$

$$\cdot y(1) = \frac{1}{3}e^2 \text{ ، } y(0) = \frac{1}{3} \text{ ، } J[y] = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2ye^{2x}) dx \quad (ج)$$

$$\cdot a > 0 \text{ ، } 0 < b < 1 \text{ ، } y(a) = b \text{ ، } y(0) = 1 \text{ ، } J[y] = \int_0^a \frac{y}{y'^2} dx \quad (د)$$

$$\cdot a, b > 0 \text{ ، } y(a) = b \text{ ، } y(0) = 0 \text{ ، } J[y] = \int_0^a \frac{dx}{y'} \quad (هـ)$$

$$\cdot a, b > 0 , y(a) = b , y(0) = 0 , J[y] = \int_0^a \frac{dx}{y'^2} \quad (\text{و})$$

$$\cdot y(2) = 4 , y(1) = 1 , J[y] = \int_1^2 \frac{x^3}{y'^2} dx \quad (\text{ز})$$

$$\cdot y(3) = 26 , y(1) = 0 , J[y] = \int_1^3 (12xy + y'^2) dx \quad (\text{ح})$$

$$\cdot y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 , y(0) = 0 , J[y] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (y^2 - y'^2 + 6y \sin(2x)) dx \quad (\text{ط})$$

$$\cdot y(2) = 3 , y(0) = 0 , J[y] = \int_0^2 (y^2 + y'^2 - 2xy) dx \quad (\text{ي})$$

(١٠) اثبت بتحقيق شرط جاكوبي ان للدالي

$$y(1) = 1 , y(0) = 0 , J[y] = \int_0^1 \sqrt{1+y'^2} dx$$

قيمته صفري على المستقيم $y = x$.

(١١) اثبت ان منحنى القيم الصفري للدالي

$$y(1) = 1 , y(0) = 0 , J[y] = \int_0^1 (y'^2 + y') dx$$

يحقق الشروط الضرورية لكل من لجندر، جاكوبي وفيرشتراس.

الفصل السادس

التحكم الأمثل "Optional Control"

تهتم نظريه التحكم الامثل "Optional Control Theory" بدراسة القيم القصوى للداليات ، التي تعتمد على متغيرات تحكم (Control Variable) منتميه الى مجموعه من الدوال تحقق شروطاً معينه ، وسنركز اهتمامنا في هذا الفصل على دراسة المسائل البسيطة للتحكم الأمثل ويظم ، اربعة بنود تناولنا في الأول منها كيفية صياغة المسألة وربط الضوابط وتجميع التكاليف ، وتناول في البند الثاني ، التكلفة المثلى ومبدأ الأمثليه لبلمان وبعض تطبيقاته ، وتناولنا في البند الثالث الشروط الضرورية للتحكم الامثل ، اما في البند الأخير فقد درست قاعدة القيمة العظمى لبونترياجن وبعض تطبيقاتها .

١-٦ صياغة المسألة وربط الضوابط وتجميع التكاليف

في كثير من المسائل الهندسيه ، والتحكم بالصواريخ والأقتصاد وإدارة الأعمال يكون الهدف المطلوب تحديد القيم القصوى للداليات من الشكل

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F[t, X(t), U(t)] dt$$

حيث $U(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)) \in R^m$ ، $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in R^n$

والتي تحقق شروطاً معينه تتضمن معادلات تفاضليه على الصورة

$$x_i = x_i(t) \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad , \quad X'_i(t) = \frac{dX_i}{dt} = g_i(t, X(t), U(t))$$

و $u_j = u_j(t)$. وفي كثير من التطبيقات تمثل t الزمن ، t_0 الزمن الابتدائي ، t_1

الزمن النهائي ، اما $X(t)$ فتسمى داله الوضع او الحاله (state function) ،

وتسمى $U(t)$ دالة التحكم (control function)، أما المعادلات التفاضليه
 $X'_i(t) = g_i(t, X(t), U(t))$ والشروط الاخرى، فتخدم سلوك دالة الوضع في
 حاله تحديد دالة التحكم، اما J فتمثل الكلفه او الانتاج المطلوب تقليلها او
 تكثيرها بالنسبه للمعطيات. واذا كان

$$U(t) \in \mathbb{R}^m, X(t) \in \mathbb{R}^n, J = \int_{t_0}^{t_1} F[t, X(t), U(t)] dt \quad \dots (1)$$

Autonomous

$$X(t_0) = x_0, X'(t) = g(X(t), U(t))$$

فيسمى النظام (1) نظاماً ذاتياً (Autonomous System) ويسمى التحكم تحكماً
 بسيطاً.

مثال ٦- ١- ١:

اذا كانت $g(t, X(t), U(t)) = \alpha X + \beta U$ ، $F(t, X(t), U(t)) = X^2 + U^2$
 حيث α, β ثوابت، فإن

$$X(t_0) = x_0, X'(t) = \alpha X(t) + \beta U(t), J = \int_{t_0}^{t_1} (X^2 + U^2) dt$$

مثال ٦- ١- ٢:

اذا كانت $F(t, x, u) = x^2 \cos^2 u$ ، $x'(t) = g(t, x, u) = \frac{1}{2} \sin u(t)$ ، $0 < t < \pi$ ،
 فإن $x(0) = \frac{\pi}{2}$

$$x(0) = \frac{\pi}{2}, x'(t) = \frac{1}{2} \sin u(t), J[u] = \int_0^{\pi} x^2(t) \cos^2 u(t) dt$$

مثال ٦- ١- ٣:

يراد زياده ارباح شركه خلال فتره زمنيه معينه من t_0 الى t_1 ، ويوجد في تلك

الشركه كميته من المال وعوامل انتاج اخرى ، وبأهمال بقية عوامل الإنتاج والتفكير في مصدر الربح (رأس المال) والذي يرمز له بالرمز $M(t)$ ، والتعبير عن معدل الإنتاج في اللحظة t بالرمز $U(t)$. نجد ان الربح يعتمد على كميته رأس المال ومعدل الإنتاج والذي يرمز له في هذه الحالة بالرمز $F(t, M(t), U(t))$ ، وحيث ان معدل الإنتاج يعتمد على الزمن t . اذاً اتخاذ القرار يتغير بتغير الزمن ، مما يجعل رأس المال متغير ايضاً ، وعليه فان $M' = \frac{dM}{dt} = g(t, M, U)$ ، وتصبح المسأله في هذه الحالة هي ايجاد اكبر قيمه للدالي :

$$M' = F(t, M, U) , J[U] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, M(t), U(t)) dt$$

والآن الى بعض التعاريف المفيده ، التي تحدد بعض خواص داله التحكم والدوال المعتمده عليها .

تعريف ٦- ١- ١ :

يقال عن داله التحكم $R^m \rightarrow u: [\bar{t}_0, \bar{t}_1]$ ، انها مقبوله او مسموح بها (Admissible) ، اذا كانت

(ا) معرفه ومتصله مقطعيأ (Piecewise continuous) على $[\bar{t}_0, \bar{t}_1]$

(ب) $u(t) \in U$ لكل $t \in [\bar{t}_0, \bar{t}_1]$ ، حيث $U \subseteq R^n$ تصف مجموعه القيود (Constraint Set) .

لاحظ ان استخدام التحكم المقبول (Admissible Control) ، يثبت ان الشرط

الأبتدائي $x(t_0) = x_0$ ، $t_0 \in [\bar{t}_0, \bar{t}_1]$ يجعل المعادله $X'(t) = g(x(t), u(t))$ تملك

حلاً وحيداً ممهداً مقطعيأ (Piecewise X Smooth Solution) ، حيث

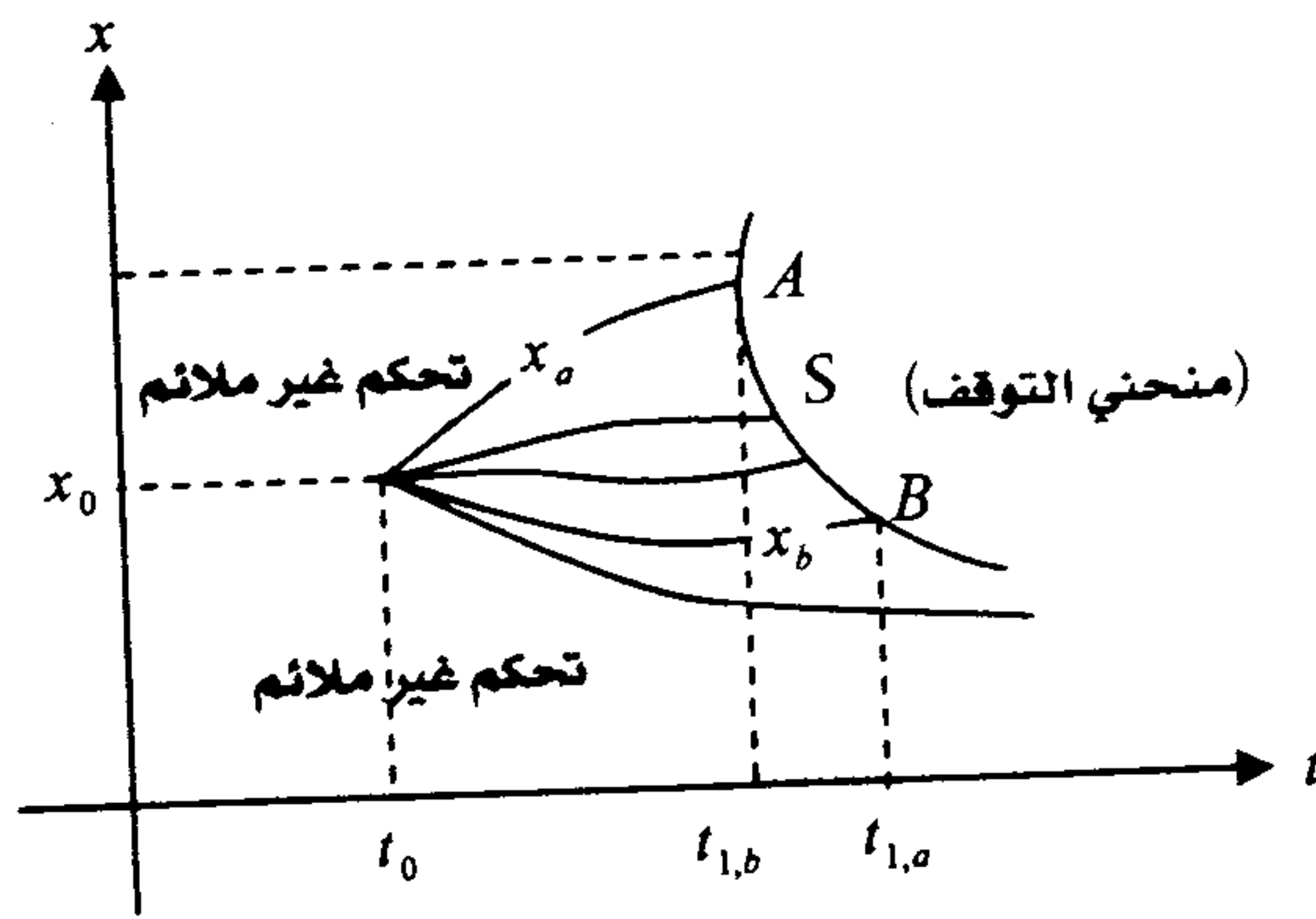
$$[t_0, t_1] \subset [\bar{t}_0, \bar{t}_1] , X(t_0) = x_0 , X: [t_0, t_1] \rightarrow R^n$$

والآن لنركز اهتمامنا على المسائل التي يكون فيها الشرط الأبتدائي معلوم ،

بينما الشرط النهائي ينتمي الى مجموعه جزئيه B " يطلق عليها مجموعه الهدف Target Set " من R^n . إذا $X(t_0) = x_0$ ، $X(t_1) \in B$.

تعريف ٦- ١- ٢:

يقال عن تحكم $U: [t_0, t_1] \rightarrow R^m$ ، انه تحكم ملائم او عملي "Feasible Control" عند النقطة x_0 ، اذا كان U تحكماً مقبولاً ، ويولد الحل $X: [t_0, t_1] \rightarrow R^n$ بحيث ان $X(t_0) = x_0$ ، $X(t_1) \in B$.
 وحيث ان لكل قيمه ابتدائيه $X(t_0) = x_0$ ، يكون للنظام $X'(t) = g(X(t), U(t))$ حلاً محدوداً ، يطلق عليه المسار (Trajectory) او متجه الوضع ، وحيث ان $X(t_0) = x_0$ تعطى دائماً ويطلب تحديد $x_1 = X(t_1)$ خلال او على سطح S يسمى السطح النهائي او سطح التوقف (Terminal Surface) ، وهو مجموعه جزئيه من الفضاء الأقليدي R^{n+1} ، وعندما $m = n = 1$ نجد ان S تمثل منحنياً ، مثل المنحني في شكل (٦- ١) وتحدد S العلاقه بين $X(t)$ و t عند $t = t_1$.



شكل (٦- ١)

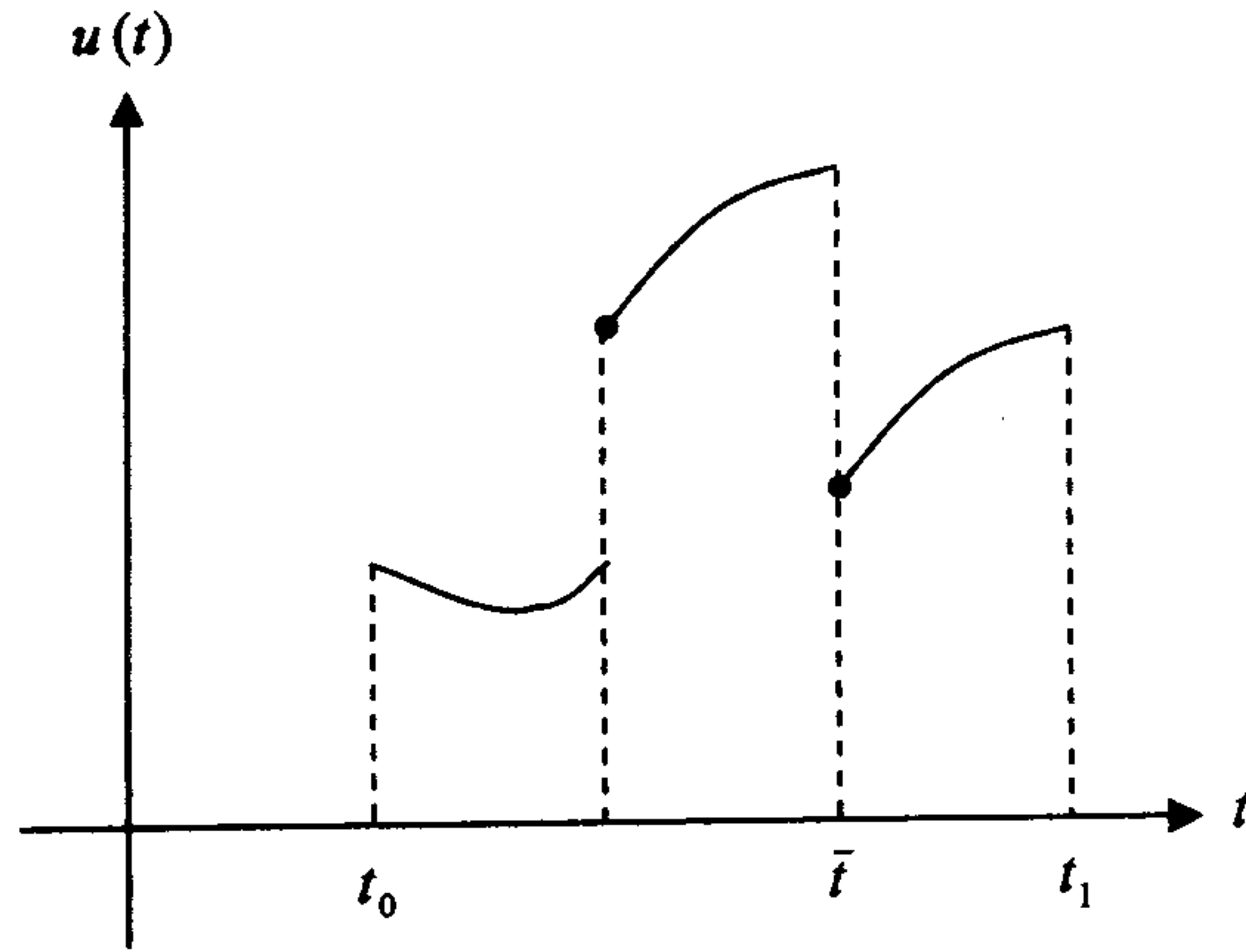
ويقال عن عمليه تحكم انها مثلى صغرى ، اذا كان $J[u^*] \leq J[u]$ لكل $u \in U$ ،
 ويقال عن عمليه تحكم انها مثلى عظمى اذا كان $J[u] \leq J[u^*]$ لكل $u \in U$ ،

ويسمى المسار المقابل او المصاحب لتلك العمليه ، المسار الأمثل (Optimal trajectory). وفي الشكل (٦- ١) ، نجد انه اذا كانت x_a هو المسار الأمثل فإن A هي نقطه النهايه ، $t_{1,a}$ الزمن النهائي ، اما اذا كان x_b مساراً امثلاً ، فإن B نقطه النهايه و $t_{1,b}$ الزمن النهائي ، وكلا النقطتين A, B تقعان على منحنى التوقف S .

والآن الى تعريف ربط تحكمين .

تعريف ٦- ١- ٢:

يقال عن تحكم مقبول $u: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ، انه اتحاد او رابط (Joining) لتحكمين مقبولين $v: [t_0, \bar{t}] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ، $\omega: [\bar{t}, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ، اذا كان $u(t) = v(t)$ لكل $t \in [t_0, \bar{t}]$ و $u(t) = \omega(t)$ لكل $t \in [\bar{t}, t_1]$. انظر الشكل (٦- ٢) ،



شكل (٦- ٢)

والآن $v: [t_0, \bar{t}] \rightarrow \mathbb{R}^m$ تحكماً مقبولاً ، مولداً للحل $y: [t_0, \bar{t}] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ، تكلفته

الناظره $J[v]$ ، $\omega: [\bar{t}, t_1] \rightarrow R^m$ تحكماً مقبولاً مولداً للحل $z: [\bar{t}, t_1] \rightarrow R^n$ ،
 تكلفته المناظره $J[\omega]$ ، حيث $y(t_0) = y_0$ ، $z(\bar{t}) = y(\bar{t})$ ، وكان $u: [t_0, t_1] \rightarrow R^m$ ،
 تحكماً مقبولاً ، تكلفته $J[u]$ ومعرفاً بربط التحكمين ω ، v ، والمولد للحل
 $X: [t_0, t_1] \rightarrow R^n$ ، $X(t_0) = x_0$ ، حيث $X(t) = y(t)$ لكل $t \in [t_0, \bar{t}]$ ،
 $X(t) = z(t)$ لكل $t \in [\bar{t}, t_1]$ ، فإن $J[u] = J[v] + J[\omega]$ ، أي ان التكلفه
 الكليه تساوي مجموع التكاليف .

٦-٢ : قاعده الأمثليه وبعض تطبيقاتها

سنركز اهتمامنا في هذا الجزء على اثبات قاعده او مبدأ الأمثليه
 (Optimality Principle) لبلمان ، ودراسه بعض تطبيقاته كأشتقاق معادله
 لبلمان والحصول منها على معادله هاملتون ، وللوصول الى ذلك نفرض ان

$$E = \{ x_0 \in R^n \mid \text{يوجد تحكـم عملي عند } x_0 \}$$

$$E^* = \{ x_0 \in R^n \mid \text{يوجد تحكـم مقبول عند } x_0 \}$$

إذا $E^* \subseteq E$ لأن الأمثليه تعني امكانية العمل ، وعليه فإن $E^* \neq 0$. والآن
 لنفرض ان $u^*: [t_0, t_1^*] \rightarrow R^m$ تحكـم امثل عند x_0 ، يولد الحل
 $x^*: [t_0, t_1^*] \rightarrow R^n$ ، $x^*(t_0) = x_0$ ، ولتكن $J^* = [x_0, u^*, x^*]$ التكلفه المثلى
 (optimality control function) حيث $x_0 \in E^*$. إذا اذا كانت التكلفه المثلى
 قصوى فإن $J[x_0, u^*]$ يكون وحيداً ، وبالتالي فإن $J^*: E^* \rightarrow R$.

والآن الى قاعده الأمثليه لبلمان والتي تنص على انه بصرف النظر عن القرارات
 المتخذة للدخول الى أي حاله معينه في أي مرحله معينه تكون القرارات المتبقيه
 مثلى لتلك مرحله .

مبرهنة ٦-٢-١: مبدأ الأمثلية لبلمان

إذا كان $u^* : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ، تحكماً أمثلاً أصغراً أو أكبراً عند x_0 ، ومولداً للحل $x^* : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ، $x^*(t_0) = x_0$ ، فإن تقييد أو قصر u^* على الفترة $[\bar{t}, t_1]$ يكون تحكماً أمثلاً عند $x^*(\bar{t})$ ، حيث $\bar{t} \in [t_0, t_1]$.

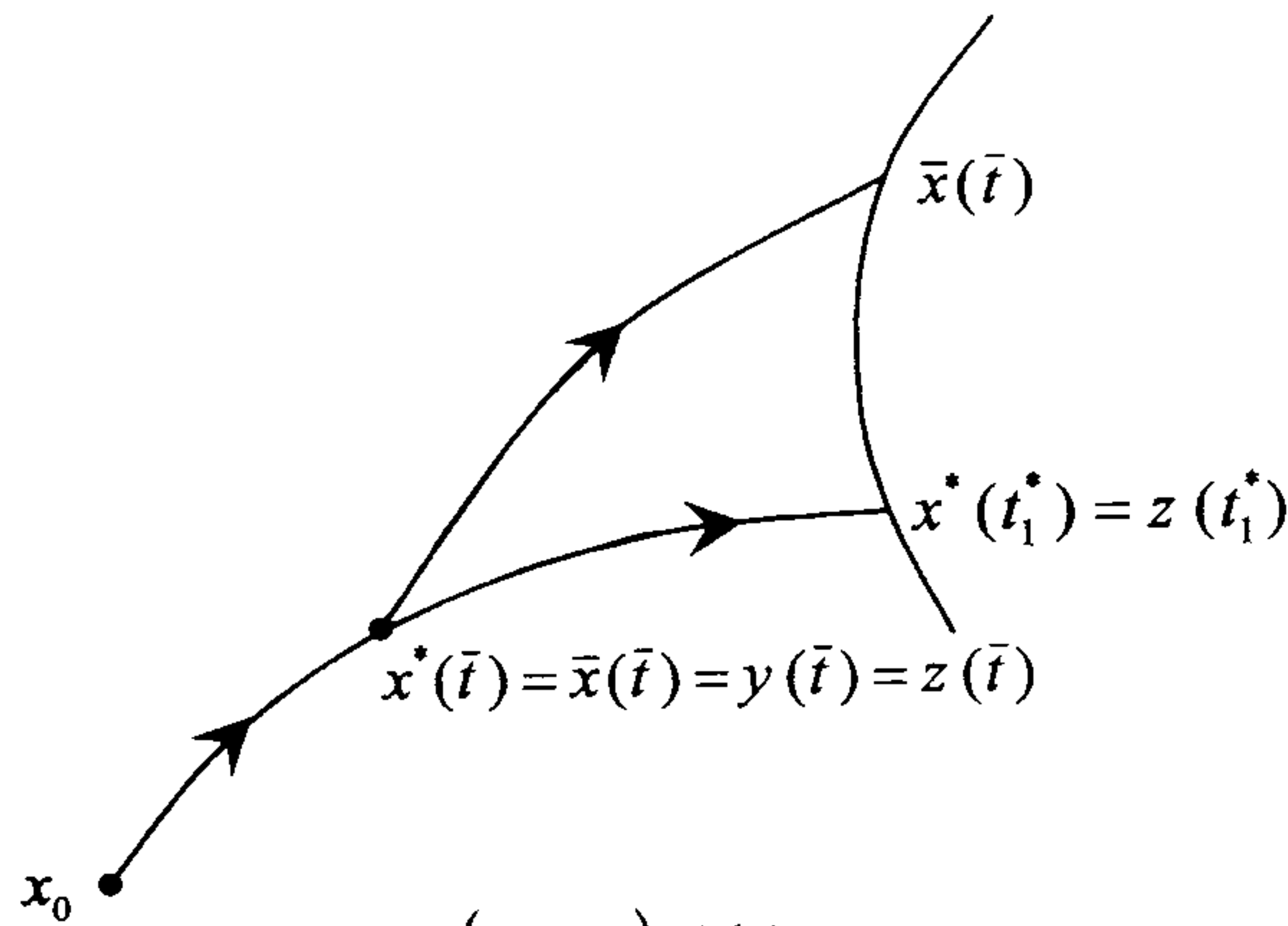
البرهان:

سنثبت المبرهنة عندما u^* تحكماً أمثلاً أصغراً ، لأن الأثبات في الحالة

الأخرى مشابه .

$$J[x_0, u^*] = J[x_0, v, y] + J[x_0(\bar{t}), \omega, z] \quad \text{بما ان}$$

حيث $z(t) = x^*(t)$ ، $\omega(t) = u^*(t)$ ، $t \in [t_0, \bar{t}]$ لكل $y(t) = x^*(t)$ ، $v(t) = u^*(t)$ لكل $t \in [\bar{t}, t_1]$ إذا كان u^* متصللاً عند $t = \bar{t}$ ، أما إذا كان u^* غير متصل عند $t = \bar{t}$ ، انظر الشكل (٦-٣) ،



شكل (٦-٣)

فأفرض ان

$$v(\bar{t}) = \lim_{t \rightarrow \bar{t}^-} u^*(t) = u^*(\bar{t}^-)$$

$$\omega(\bar{t}) = \lim_{t \rightarrow \bar{t}^+} u^*(t) = u^*(\bar{t}^+)$$

والآن لنفرض ان ω ليس تحكماً امثل عند $x^*(\bar{t})$ ، إذا يوجد تحكماً مقبول
 $\bar{u}: [\bar{t}, \bar{t}_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ عند $x^*(\bar{t})$ مولد للحل $\bar{x}: [\bar{t}, \bar{t}_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ، $\bar{x}(\bar{t}) = x^*(\bar{t})$ ، $\bar{x}(\bar{t}_1) \in B$ بحيث ان

$$J[x^*(\bar{t}), \bar{u}, \bar{x}] < J[x^*(\bar{t}), \omega, z]$$

ويربط \bar{u} ، v نحصل على تحكماً مقبول عند x_0 ، وليكن $u: [t_0, \bar{t}_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ،
يولد الحل $x: [t_0, \bar{t}_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ و $x(t_0) = x_0$ و $x(t) = y(t)$ ، $x(t) = \bar{x}(t)$ لكل
 $t \in [\bar{t}, \bar{t}_1]$ لكن التكلفة الكليه تساوي مجموع التكاليف إذا
 $J[x_0, u, x] < J[x_0, u^*, x^*]$ وهذا تناقض ، لأن التحكماً هو تحكماً امثل اصغر
عند x_0 . إذا $\omega(t) = u^*(t)$ ، لكل $t \in [t_0, \bar{t}_1^*]$ ، وعليه فإن ω تحكماً امثل اصغر
عند $x^*(\bar{t})$ و $\bar{t} \in [t_0, \bar{t}_1^*]$.

□

والآن الى بعض تطبيقات قاعدة الأمثليه ، واستخدام حساب التغيرات للحصول
على معادله بلمان ، واشتقاق معادله هاملتون منها ، وعليه ، اذا كان المطلوب
ايجاد القيمة العظمى للتحكماً :

حيث $J[u] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, u) dt$ ، $x' = g(x, x(t), u(t))$ ، $x(t_0) = x_0$ وفرضنا ان
 $\bar{J} = \max_{u \in U} J[u]$ ، وبدلنا t_0 بالمتغير t ، فإن

$$\bar{J}(x, t) = \max_{u \in U} J[t, u] = \int_t^{t_1} F(t, x, u) dt$$

ويكون $\max_{u \in U} J[u] = \bar{J}(t_0, x_0)$ لكن

$$\bar{J}(t, x) = \max_{u \in U} \left[\int_t^{t+\Delta t} F(t, x, u) dt + \int_{t+\Delta t}^{t_1} F(t, x, u) dt \right]$$

وحسب قاعده الأمثليه نجد ان

$$\bar{J}(t + \Delta t, x + \Delta x) = \max_{u \in U} \left[\int_{t+\Delta t}^{t_1} F(t, x, u) dt \right]$$

وبالتالي فإن

$$\bar{J}(t, x) = \max_{u \in U} \left[\int_t^{t+\Delta t} F(t, x, u) dt + \bar{J}(t + \Delta t, x + \Delta x) \right]$$

وإذا كانت Δt صغيرة جداً، فإن

$$\int_t^{t+\Delta t} F(t, x, u) dt = F(t, x, u) \cdot \Delta t$$

$$\bar{J}(t, x) = \max_{u \in U} [F \cdot \Delta t + \bar{J}(t + \Delta t, x + \Delta x)] \quad \text{وعليه فإن}$$

وباستخدام متسلسلة تايلور، نجد ان

$$\bar{J}(t + \Delta t, x + \Delta x) = \bar{J}(t, x) + \frac{\partial \bar{J}}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial \bar{J}}{\partial x} \Delta x + \dots$$

وعليه فإن

$$\bar{J}(t, x) = \max_{u \in U} [F \cdot \Delta t + \bar{J}(t, x) + \frac{\partial \bar{J}}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial \bar{J}}{\partial x} \Delta x + \dots]$$

ومنها نجد ان

$$\max_{u \in U} [F + \frac{\partial \bar{J}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{J}}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \dots] = 0$$

لكن $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t) = g(t, x, u)$ إذا،

$$-\frac{\partial \bar{J}}{\partial t} = \max_{u \in U} [F(t, x, u) + \frac{\partial \bar{J}}{\partial x} \cdot g(t, x, u)] \quad \dots (1)$$

وتعرف المعادلة (1)، بمعادله بلمان (Bellman's Equation). ويمكننا الآن

استنتاج معادله هاملتون من معادله بلمان كالآتي :

نفرض ان $u = x'$ ، اذا بالتعويض في (1) ينتج ان

$$\max_x [F(t, x, u) + \frac{\partial \bar{J}}{\partial x} \cdot x' + \frac{\partial \bar{J}}{\partial t}] = 0 \quad \dots (2)$$

وبأخذ المشتقه الجزئية بالنسبة الى x' لكل حد داخل القوس في المعادلة (2)،

ينتج ان

$$\frac{\partial F}{\partial x'} + \frac{\partial \bar{J}}{\partial x} = 0 \quad \dots (3)$$

$$F + \frac{\partial \bar{J}}{\partial x} \cdot x' + \frac{\partial J}{\partial t} = 0 \quad \dots (4) \quad \text{وعليه فإن}$$

$$\text{إذاً، } \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial x'} + \frac{\partial \bar{J}}{\partial x} \right) = 0 \quad \text{وحيث أن}$$

$$\frac{d}{dt}(F_{x'}) + \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial x \partial t} \cdot \frac{dt}{dt} + \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial x^2} \cdot \frac{dx}{dt} = 0 \quad \dots (5)$$

$$\text{لكن } \frac{\partial}{\partial x} \left(F + \frac{\partial \bar{J}}{\partial x} \cdot x' + \frac{\partial J}{\partial t} \right) = 0 \quad \text{إذاً،}$$

$$F_x + F_{x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial x^2} \cdot x' + \frac{\partial \bar{J}}{\partial x} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial t \partial x} = 0$$

ومنها نجد ان

$$F_x + (F_{x'} + \bar{J}_x) \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial x^2} \cdot x' + \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial t \partial x} = 0 \quad \dots (6)$$

ومن (3)، (6) ينتج ان

$$F_x + \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial x^2} \cdot x' + \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial t \partial x} = 0$$

وعليه فإن

$$\frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial x^2} \cdot x' + \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial t \partial x} = -F_x \quad \dots (7)$$

ومن (5)، (7) ينتج ان

$$F_x - \frac{d}{dx} F_{x'} = 0$$

وهي معادله اويلر- لاگرانج ، لكن

$$\lambda(t_1) = \lambda_1 \quad , \quad \lambda(t_0) = \lambda_0 \quad , \quad L = \int_{t_0}^{t_1} (H + \lambda'x) dt - (\lambda_1 x_1 - \lambda_0 x_0)$$

عند القيمة القصوى ، وعليه فإن $\bar{L} = \bar{J}$ و $x(t_1) = x_1$ ، $x(t_0) = x_0$

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial x_0} = \frac{\partial \bar{J}}{\partial x_0} = \bar{\lambda}_0 \quad \dots (8)$$

وحسب قاعدة بلمان للأمثلية ، يمكن حذف نقطة البدايه ، وعندما تكون u في نهايتها العظمى ، يكون

$$\begin{aligned} H(t, x, u, \lambda) &= F(t, x, u) + \lambda g(t, x, u) \\ &= F(t, x, u) + \frac{\partial \bar{J}}{\partial x} \cdot x' \quad \dots (9) \end{aligned}$$

وتصبح معادلة بلمان كالآتي

$$\frac{-\partial \bar{J}}{\partial t} = H(t, x, u, \frac{\partial \bar{J}}{\partial x}) \quad \dots (10)$$

والمعادلة (10) هي معادلة هاملتون - جاكوبي ، إذا

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-\partial \bar{J}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(H(t, x, u, \frac{\partial \bar{J}}{\partial x}) \right)$$

وبالتالي فإن

$$\frac{-\partial^2 \bar{J}}{\partial x \partial t} = \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial \left(\frac{\partial \bar{J}}{\partial x} \right)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{J}}{\partial x} \right) = \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial x^2}$$

وعليه فإن

$$\frac{-\partial H}{\partial x} = \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial t \partial x} + \frac{\partial H}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial x^2} \quad \dots (11)$$

ويتفاضل طرفي المعادلة (8) بالنسبة إلى t ، ينتج ان

$$\lambda' = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{J}}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial x \partial t} \cdot \frac{dt}{dt} + \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial x^2} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial x^2} \cdot x' \quad \dots (12)$$

ومن (9) نجد أن $\frac{\partial H}{\partial \lambda} = g(t, x, u) = x'$ ، لكن \bar{J} قابلة للاشتقاق مرتين

ومتصله ، إذا

$$\frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial t \partial x}$$

وعليه ومن (11) ، (12) ينتج ان

$$\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial x} , \quad \frac{\partial H}{\partial \lambda} = x'$$

وهي معادلات هاميلتون .

٦-٣ : الشروط الضرورية للتحكم الأمثل

سنركز اهتمامنا في هذا الجزء على تحديد $x(t)$ المتولده من دالة

التحكم $u(t)$ والتي تجعل الدالي $J[u] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, u) dt$ حيث $x'(t) = g(t, x, u)$ ،

$t_0 < t < t_1$ ، $x(t_0) = x_0$ ، يملك قيمة قصوى . أي أننا نحسب التحكم الأقصى ،

ولحساب ذلك ، نفترض أن

$$J[u] = \int_{t_0}^{t_1} F[t, x(t, u), u(t)] dt \quad \dots (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} t > t_0 , \quad \frac{d}{dt} x(t, u) = g(t, x(t, u), u(t)) \\ x(t_0, u) = x_0 \end{array} \right\} \quad \dots (2)$$

و u قيمة قصوى (صغرى) للدالي J ، إذا $\delta J[u, \Delta u] = 0$ ، لكل الدوال

المتصلة Δu لكن

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} J(u + \varepsilon \Delta u) &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_0}^{t_1} F[t, x(t, u + \varepsilon \Delta u), u(t) + \varepsilon \Delta u(t)] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} F[t, x(t, u + \varepsilon \Delta u), u(t) + \varepsilon \Delta u(t)] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} F_x[t, x(t, u + \varepsilon \Delta u), u + \varepsilon \Delta u] \frac{\partial}{\partial x} x(t, u + \varepsilon \Delta u) \\ &\quad + F_u[t, x(t, u + \varepsilon \Delta u), u + \varepsilon \Delta u] \Delta u \end{aligned}$$

حيث $X = x(t, u + \varepsilon \Delta u)$ ، $X = u(x) + \varepsilon \Delta u(x)$ ، لكن

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} X(t, u + \varepsilon \Delta u) \Big|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{X(t, u + \varepsilon \Delta u) - X(t, u)}{\varepsilon} \quad \dots (3)$$

$$= X'(t, u)$$

إذا

$$\delta J(u, \Delta u) = \int_{t_0}^{t_1} \{F_x[t, x(t, u), u(t)] \frac{\partial}{\partial \varepsilon} X(t, u + \varepsilon \Delta u) \Big|_{\varepsilon=0} + F_u[t, x(t, u), u(t)] \Delta u(t)\} dt \quad \dots (4)$$

الدوال المتصلة Δu ، $X = X(t, u)$ تحدها العلاقة (2) أما

$$\left. \begin{aligned} F_x [t, x(t, u), u(t)] &= F_x(t, x, u) \\ F_u [t, x(t, u), u(t)] &= F_u(t, x, u) \end{aligned} \right\} \quad \dots (5)$$

ومن (2) ، (3) نجد أن

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} X(t, u + \varepsilon \Delta u) = \int_{t_0}^t e^{\int A(s) ds} \cdot B(\tau) \Delta u(\tau) d\tau \quad \dots (6)$$

حيث

$$\left. \begin{aligned} A(t) = g_x [t, x(t, u), u(t)] &= \frac{\partial}{\partial x} g(t, x, u) \Big|_{\substack{x=x(t, u) \\ u=u(t)}} \\ B(t) = g_u [t, x(t, u), u(t)] &= \frac{\partial}{\partial u} g(t, x, u) \Big|_{\substack{x=x(t, u) \\ u=u(t)}} \end{aligned} \right\} \quad \dots (7)$$

وعليه فإن

$$\delta J[u, \Delta u] = \int_{t_0}^{t_1} [F_x \cdot \int_{t_0}^t e^{\int A(s) ds} \cdot B(\tau) \cdot \Delta u(\tau) d\tau + F_u] dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \{F_u[t, x(t, u), u(t)] + \int_{\tau}^{t_1} F_x[\tau, x(\tau, u), u(\tau)] e^{\int_{\tau}^t A(s) ds} B(t) d\tau\} \Delta u(t) dt$$

لكن $\delta J(u, \Delta u) = 0$ ، إذا

$$F_u[t, x(t, u), u(t)] + \int_{\tau}^{t_1} B(t) F_x[\tau, x(\tau, u), u(\tau)] e^{-\int_{\tau}^t A(s) ds} d\tau = 0 \quad \dots (8)$$

حيث $t \in [t_0, t_1]$ وهو الشرط الذي يجعل $J[u]$ تملك قيمة قصوى ، هذا ويمكن

التعبير عن (8) كالاتي

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{F_u}{g_u} \right) + \left(\frac{F_u}{g_u} \right) g_x = F_x \quad \dots (9)$$

$$F_u(t_1, x(t_1, u), u(t_1)) = 0$$

مثال ٦-٣-١:

اوجد التحكم الأقصى للدالي

$$J[u] = \int_0^{\pi} X^2(t) \cos^2 u(t) dt$$

$$X(0) = \frac{\pi}{2}, \quad 0 < t < \pi, \quad \frac{d}{dt} X(t) = \frac{\sin u(t)}{2} \quad \text{حيث}$$

الحل

بما أن $X = X(t, u)$ إذاً

$$X(0) = \frac{\pi}{2}, \quad X' = \frac{\sin u(t)}{2} \quad \dots (1)$$

$$X(t, u) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \int_0^t \sin u(\tau) d\tau \quad \text{وعليه فإن}$$

لأي تحكم ثابت U . لكن $F(t, x, u) = x^2 \cos^2 u$ إذاً $g(t, x, u) = \frac{\sin u}{2}$

$$F_x = 2x(t, u) \cos^2 u(t), \quad F_u = -2X^2(t, u) \cos u(t) \sin u(t)$$

$$g_x = 0, \quad g_u = \frac{\cos u(t)}{2} \quad \text{لكن}$$

$$F_u(t_1, x(t_1, u), u(t_1)) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{F_u}{g_u} \right) + \left(\frac{F_u}{g_u} \right) g_x = F_x$$

إذاً

$$t = \pi \text{ عندما } X^2 \sin u \cos u = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{-2X^2 \cos u \sin u}{\frac{\cos u}{2}} \right) + 0 = 2X \cos^2 u$$

وعليه فإن

$$t = \pi \text{ عندما ، } X^2 \sin u \cos u = 0, 2 \frac{d}{dt}(X^2 \sin u) + X \cos^2 u = 0 \quad \dots (1)$$

ومن (1)، (2) ينتج أن $X[2 \frac{d}{dt}(X \sin u) + 1] = 0$ ، وعليه فإن

$$2 \frac{d}{dt}(X \sin u) + 1 = 0 \text{ وبالتالي فإن}$$

$$X \sin u = \frac{-t}{2} + C \quad \dots (3) \text{ ومنها نجد أن}$$

$$\sin u = \frac{c - \frac{t}{2}}{X} \text{ وبالتالي فإن}$$

$$2X' = \frac{c - \frac{t}{2}}{X} \Rightarrow 2X dx = (c - \frac{t}{2}) dt \Rightarrow X^2 = ct - \frac{t^2}{4} + b$$

لكن $X(0) = \frac{\pi}{2}$ ، إذا $b = \frac{\pi^2}{4}$ ، وعليه فإن

$$X(t) = \sqrt{ct - \frac{t^2}{4} + \frac{\pi^2}{4}} \quad \dots (4)$$

ومن (3)، (4) نجد أن دالة التحكم الأقصى

$$\sin u(t) = (c - \frac{t}{2}) \left(\frac{\pi^2}{4} + ct - \frac{t^2}{4} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad \dots (5)$$

ومن (4)، (5) نجد أن

$$0 \leq t \leq \pi \text{ ، } X^2 \cos^2 u = \frac{\pi^2}{4} - c^2 + 2ct - \frac{t^2}{2}$$

لكن $J[u] = \int_0^\pi X^2 \cos^2 u dt$ ، إذا

$$J = \int_0^\pi \left(\frac{\pi^2}{4} - c^2 + 2ct - \frac{t^2}{2} \right) dt = \left(\frac{\pi^2}{4} - c^2 \right) \pi + c\pi^2 - \frac{\pi^3}{6}$$

وعندما $c = \frac{\pi}{2}$ ، نجد أن $J = \frac{\pi^3}{3}$ ، وهي أكبر قيمة للدالي $J[u]$ ،

(5) تحدد أقصى تحكم عندما $c = \frac{\pi}{2}$ ، أما المعادلة (4) فتحدد القيه

للدالة $X(t)$ (extremum state function) ، عندما $c = \frac{\pi}{2}$.

٦-٤ : قاعدة القيمة القصوى وبعض تطبيقاتها

سنورد في هذا الجزء قاعدة (مبدأ) القيمة العظمى (maximum principle) لبونترياجن ، والتي تحدد أو تبين كيفية حساب التحكم الأمثل ، ثم نطبقها في بعض المسائل ، وللوصول إلى ما نريد ، نفرض أن

$$J[u] = \int_{t_0}^{t_1} (t, x, u) dt \quad \dots (1)$$

حيث $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)) \in \mathbb{R}^m$ ، $x = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$

دالة $u(t) \in U$ ، $i = 1, \dots, n$ ، $x'_i = \frac{dx_i}{dt} = g_i(t, x, u)$ (متصلة جزءاً جزءاً) ، $x(t_0) = x_0$ ، $x(t_1) = x_1$ إما أن تكون معلومه أو تحقق علاقة معينة ، دوال $g_j(t, x, u)$ ، ومشتقاتها متصلة بالنسبة إلى x ومركباتها ، ولنفرض أن $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ متغير مساعد ، ولتكن دالة هاملتون معرفة كالآتي

$$H(t, x, u, \lambda) = F(t, x, u) + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(t, x, u)$$

والمطلوب إيجاد $x(t)$ ، $u(t)$ بحيث يكون J أكبر ما يمكن . والآن إلى القاعدة الآتية بدون إثبات ، لأن إثباتها يتطلب معرفة الهندسة التفاضلية وخاصة الفضاء أو السطوح متعددة الطيات (Manifolds) .



مبرهنة ٦-٤-١ " قاعدة القيمة العظمى ، Maximal principle "

إذا كان التحكم الممكن $\bar{u}(t)$ ، والحل المتولد منه $\bar{x}(t)$ أمثلياً للدالي $J[u]$ ، المعرف في (1) ، فتوجد دالة غير صفريه $\lambda(t)$ معرفه لكل $t \in [t_0, t_1]$ ، بحيث أن .

$$i = 1, \dots, n \text{ لكل } , \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i} \quad (1)$$

$$i = 1, \dots, n \text{ لكل } , \frac{d\lambda_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (2)$$

(ج) تكون H اكبر ما يمكن عند $\bar{u}(t)$ ، أي أن $H(t, \bar{x}, \bar{u}, \lambda) \geq H(t, \bar{x}, u, \lambda)$

لكل $u \in U$.

$$\lambda_i(t_1) = 0 \quad , \quad x_0(t_0) = x_0 \quad (3)$$

لاحظ أن كل المشتقات اعلاه تحسب عند $u = \bar{u}(t)$ ، كما أن مجموعة المعادلات في (1) تمثل معادلات الحركة $x'_i = g_i$ ، والمعادلات في (1) و (2) تمثل معادله هاملتون بالشكل القانوني ، كما أن $\frac{\partial H}{\partial \bar{u}} = 0$ ، وتسمى العلاقات في (3) والتي عددها $2n$ بالشروط الحدية أو الشروط الأعتراضيه (Boundary or transversality conditions) وعليه فإن لحل أي مسأله بهذه القاعده استخدام المعادلات في (1) و (2) ثم استخدم المتباينه (ج) للحصول على $\bar{x}(t), \bar{u}(t)$ مستفيداً من الشروط الأعتراضيه لحساب الثوابت .

مثال ٦-٤-١ (مسألة أقل زمن)

وهي مسألة أقل زمن ممكن للانتقال من وضع معين إلى وضع آخر مثل $(0,0)$.
إذا المطلوب :

$$x'_2 = g_2(t, x_1, x_2, u) = u \quad , \quad x'_1 = g_1(t, x_1, x_2, u) = x_2 \quad , \quad \min_{u \in U} \int_{t_0}^{t_1} dt$$

حيث $u \in U$ داله تحكم معرفة كالآتي ، $|u(t)| \leq 1$

الحل :

لاحظ أن المسألة اعلاه تكافئ الآتي

$$F(t, x_1, x_2, u) = -1 \quad , \quad \max_u J = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x_1, x_2, u) dt$$

إذا $H = -1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$ ، وتصبح المعادلات في (٦-٤-١) كالآتي :

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1 \quad , \quad \frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0$$

ومنها نجد أن $\lambda_1 = c_1$ ، $\lambda_2 = c_2 - c_1 t$ ، حيث c_1 ، c_2 ثوابت . لكن من قاعدة القيمة العظمى نجد أن $J[u]$ أكبر ما يمكن إذا وإذا فقط كان $H(u)$ أكبر ما يمكن لكن $H(u)$ أكبر ما يمكن عندما يكون لكل من λ_2, u نفس الإشارة .

$$t \in [t_0, t_1] \text{ لكل } u(t) = \begin{cases} 1 & c_2 - c_1 t \geq 0 \\ -1 & c_2 - c_1 t < 0 \end{cases} \quad \text{إذا}$$

وعندما $u = 1$ ، نجد أن $x_2'(t) = 1$ ، لكل $t \in [t_0, t_1]$ إذا $x_2 = t + b$ ، حيث b ثابت ، ومن العلاقة $x_1' = x_2$ ، نجد أن

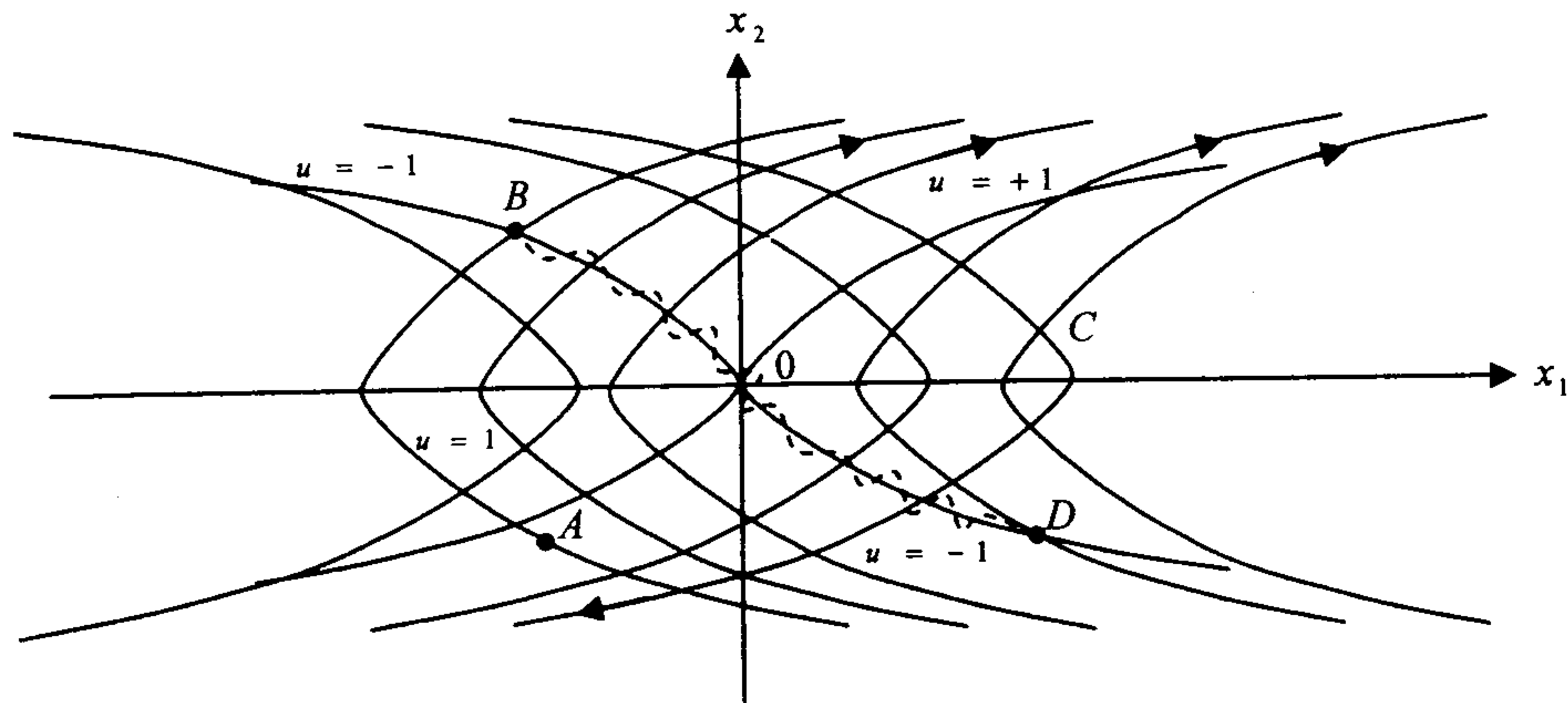
$$x_1 = \frac{t^2}{2} + bt + a = \frac{1}{2}(t+b)^2 + \left(a - \frac{b^2}{2}\right) = \frac{1}{2}x_2^2 + k$$

وعندما $u = -1$ ، نجد أن $x_2 = -t + b_1$ ، $x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + m$ ، حيث b_1, m ثوابت .

إذا توجد عائلتان من القطوع المكافئة هما

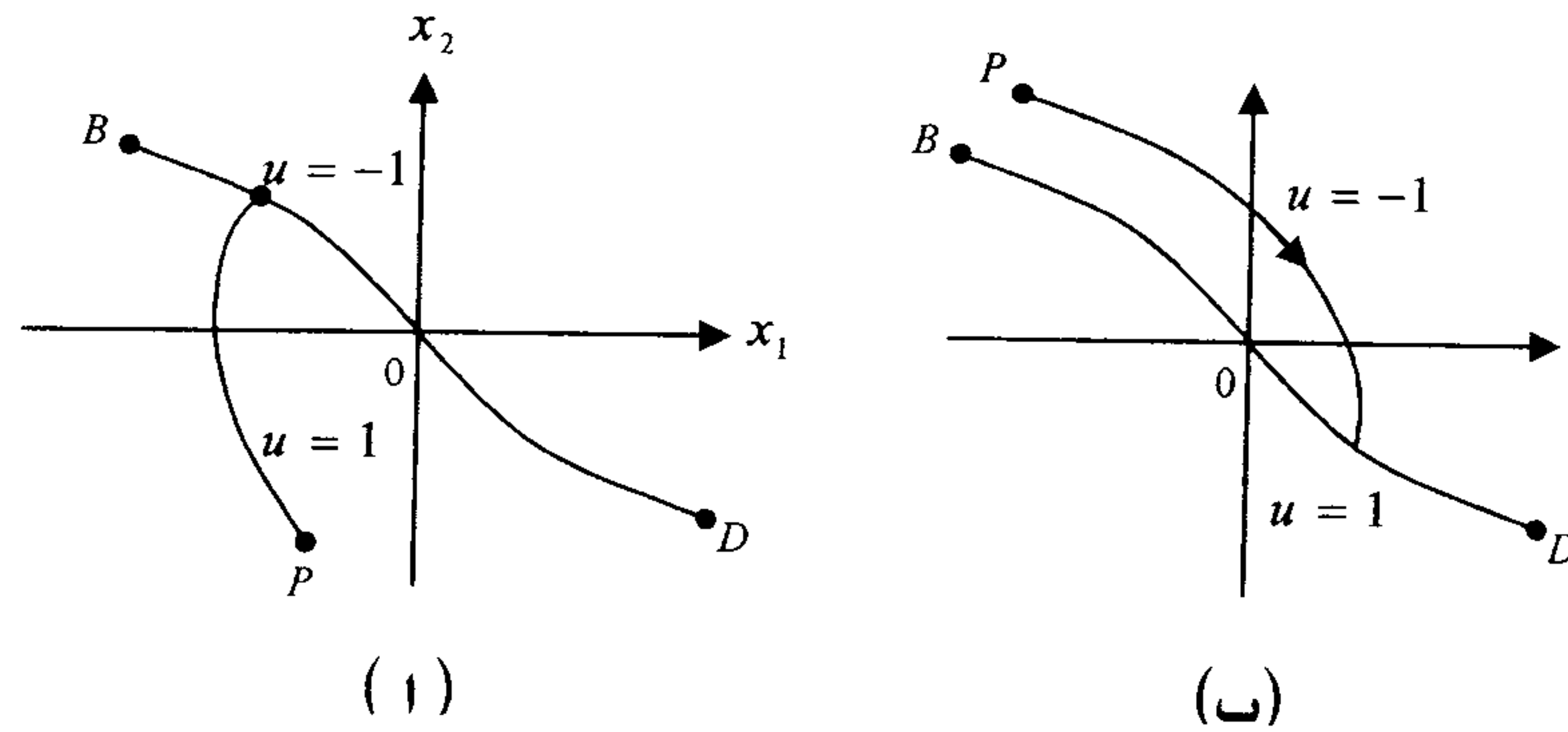
$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + b_2 \quad , \quad x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + k$$

ويمثل الشكل (٦-١) جزء منها .



شكل (٦-١)

وتتحرك النقطة (x_1, x_2) إلى الأعلى عندما $\frac{dx_2}{dt} = u = 1$ ، وإلى الأسفل عندما $\frac{dx_2}{dt} = u = -1$ ، وأقصر مسار للوصول إلى نقطه الأصل $(0,0)$ من أي نقطه كانت هو واحد من المسارين الموضحين في الشكل (٦-٢)



شكل (٦-٢)

فإذا كانت العملية هي الانتقال من A ، شكل (٦-١) ، $(u=1, x_0 = A)$ ، فإن مسار تلك الحالة هو التحرك إلى الأعلى على قوس AB حتى الوصول إلى B ، ثم التحرك على القوس $B0$ " للوصول إلى نقطة الأصل " وهو مقطع من القطع المكافئ $x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2$ ، $u = 1$ وهذا يعني أن التحرك من أي نقطه P في المستوى إلى نقطه الأصل يتطلب التحرك على قطع من القطع المكافئ $x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + m$ ثم الانتقال (التحرك) على جزء من القطع المكافئ $x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + k$ أو العكس ويطلق على مثل تلك الحلول أو الحركات التي يتغير فيها التحكم من قيمة إلى أخرى تحكم الخبطه - خبطه (Bang-bang control) .

مثال ٦-٤-٢ :

أوجد أكبر قيمة للدالي

$$x' = g(t, x, u) = x^2 - u(t) - 3x, \quad J[u] = \int_0^1 e^{-2t} u^2(t) dt$$

الحل

بما أن

$$\text{إذاً، } H = e^{-2t} u^2 + \lambda(x^2 - u - 3x)$$

$$\text{وعليه فإن، } \lambda' = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda(2x - 3)$$

$$2x = 3 - \frac{\lambda'}{\lambda} \quad \dots (1)$$

$$\text{لكن } \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \text{ إذاً } 2ue^{-2t} - \lambda = 0 \text{ وبالتالي فإن}$$

$$\lambda = 2ue^{-2t} \quad \dots (2) \text{ ومنها نجد أن}$$

$$\lambda' = -4ue^{-2t} + 2e^{-2t}u' \quad \dots (3)$$

وعليه فإن

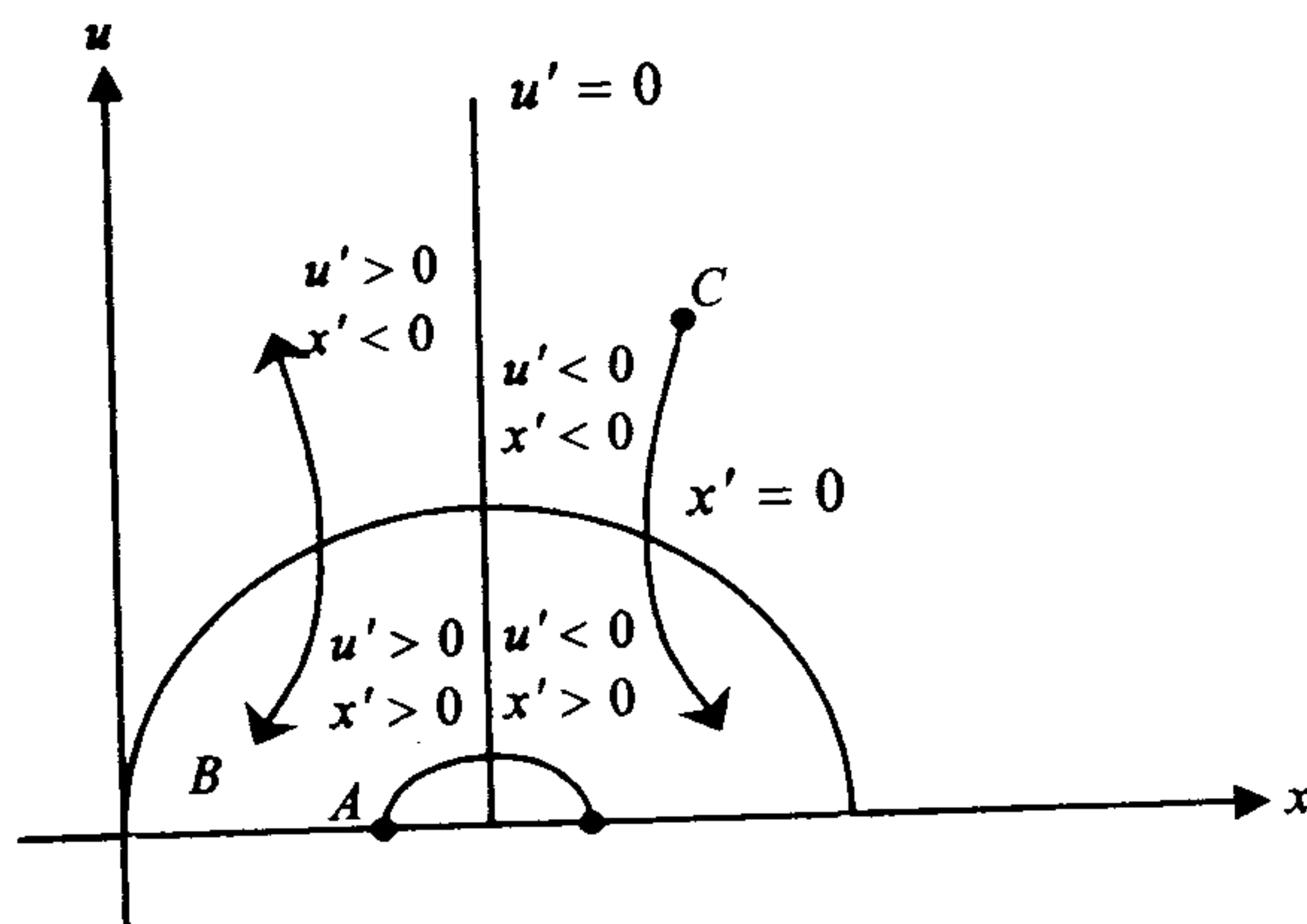
$$\frac{\lambda'}{\lambda} = -2 + \frac{u'}{u} \quad \dots (4)$$

ومن (1)، (4) ينتج أن

$$u' = (5 - 2x)u \quad \dots (5)$$

وعندما $x = \frac{5}{2}$ ، نجد أن $u' = 0$ ، وعندما $u = x^2 - 3x$ ، فإن $x' = 0$ ، ويوضح

الشكل (٦-٣) مسار الزمن الأمثلة من البداية إلى النهاية :



شكل (٦-٣)

تمارين

(١) تصف المعادلتان $x_1' = x_2$ ، $x_2' = u$ ، حركة جسيم في المستوى . أوجد دالة التحكم $u(t)$ لكي يتحرك الجسيم من النقطة A إلى $B(0,0)$ في أقل زمن ممكن ، حيث $|u(t)| \leq 1$.

(٢) أوجد دالة التحكم u التي تجعل الدالي $J = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + u^2) dt$ أقل ما

يمكن بشرط أن

$$. x(0) = e^{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{2}) + e^{-\sqrt{2}}(-1 + \sqrt{2}) ، 0 < t < 1 ، x' = \frac{dx}{dt} = -x + u$$

(٣) $\min J = \int_{t_0}^{t_1} dt$ ، عندما $x' = g(t, x, u) = u$ ، $x_0(t) = x_0$ ، $|u| \leq 1$

(٤) أوجد أقل قيمه إلى $J[u] = \int_0^x \sqrt{1 + u'^2} dt$ ، $x' = u$

(٥) أوجد $u(t)$ التي تجعل الدالي J أكبر ما يمكن عندما

$$0 \leq u \leq 1 ، x_2' = (x_1 + x_2)(1 - u) ، x_1' = (x_1 + x_2)u ، J[u] = \int_0^1 e^{-m} (x_1 + x_2) dt$$

(٦) أوجد $u(t)$ التي تجعل الدالي J أكبر ما يمكن عندما

$$|u| \leq 1 ، x(0) = x_0 ، x(1) = x_1 ، 0 < t < 1 ، x'(t) = u ، J[u] = \int_0^1 u^2(t) dt$$

(٧) تصف المعادلتان $x_1' = x^2$ ، $x_2' = -x_1 + u$ حركة جسيم في المستوى .
أوجد أقل زمن ممكن لتحرك الجسيم من نقطة A إلى $(0,0)$ ، عندما
 . $|u| \leq 1$

(٨) أوجد أقل قيمة للدالي $J[u] = \int_{t_2}^{t_1} dt$ عندما

$$x(t_0) = x_0 \quad , \quad |u| \leq 1 \quad , \quad x_2' = u^2 \quad , \quad x_1' = u$$

◆ المراجع ◆

- (1) N . I . Akhiezer " The Calculus of variation" (translated by A . H . Frink) Blaisdell publishing co. New York (1962).
- (2) A . M . Arthurs , "Calculus of variations" Routledge and Kegan Paul , London and Boston 1975.
- (3) G . A . Bliss , "Calculus of Variations" Open Court publishing Co. Chicago (1962).
- (4) M . Boas , "Mathematical methods in The Physical Science" John Wiley and Sons .
- (5) R . Courant and D . Hilbert , "Methods of Mathematical Physics" , Vol . 1 , Interscience Publishing Co. New York , (1953).
- (6) J . W . Craggs , "Calculus of Variations" George Allen and Unwin Ltd , London 1973.
- (7) S . E . Dreyfus , "Dynamic Programming and The Calculus of Variations" Academic Press 1965.
- (8) L . Elsgolts , "Differential Equations and the Calculus of Variations" Mir Publishers , Moscow 1970.
- (9) I . M Gelfand and S . V . Fomin , "Calculus of Variations" (Translated and Edited by R . A . Silverman) Prentice – Hall , Englewood , New Jersey (1963).
- (10) D . Koo , "Elements of Optimization" Springer – Verlag , New York , Berlin (1977).

- (11) G . Leitmann , "The Calculus of Variations and Optimal Control"
Plenum Press New York and London (1981).
- (12) G . F . Simmon , "Differential Equations with Applications and
Historical notes" Tata Mc Graw – Hill New Delhi (1984).
- (13) D . R . Smith , "Variational Methods in Optimization" Prentice –
Hall , Englewood , New Jersey (1974).

◆ دليل الرموز Symbols ◆

المعنى	الرمز
مجموعة الأعداد الحقيقية	\mathbb{R}
الفضاء الأقليدي (المستوى) الثنائي البعد	$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
الفضاء الأقليدي النوني البعد	$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$
مقياس او مقياس	
فضاء الدوال المتصلة على $[a, b]$ ولكل $f \in \ell$ يكون $\ f(x)\ = \max_{x \in [a, b]} f(x) $	ℓ
فضاء الدوال المتصلة على $[a, b]$ والتي تكون مشتقتها الأولى متصلة على $[a, b]$.	D_1
فضاء الدوال المتصلة على $[a, b]$ والتي تكون مشتقاتها $f^{(r)}$ ، $r = 1, \dots, n$ متصلة على $[a, b]$.	D_n

◆ دليل (فهرس) المصطلحات ◆

	(١)	
Inverse Problem	٧٤	المسأله العكسيه
Reflection	١٠٣	انعكاس
Refraction	١٠٧	انكسار
Joining	١٥٢	اتحاد (ربط)
	(ت)	
Variation	٢	تغير
Second Variation	١١٧	تغير ثنائي
Multiple Integrals	٦٥	تكاملات متعدده (مضاعفه)
Control	١٤٨	تحكم
Optimal Control	١٤٨	تحكم امثل
Admissible Control	١٥٠	تحكم مقبول
Feasible Control	١٥١	تحكم ملائم (عملي)
	(د)	
Function	٩٦	داله
Functional	١	دالي
Linear Functional	٥	دالي خطي

Continuous Functional	٦	دالي متصل
Functional of Several Variables	٢٦	دالي عديد المتغيرات
The Hamiltonian	٤٠	داله هاملتون
Weierstrass Excess Function	١٣٦	دالة الزيادة لفيرشتراس
Control Function	١٤٩	داله تحكم
State Function	١٤٨	داله الوضع او الحاله
Piecewise Continuous Function	١٥٠	داله متصله مقطعيأ (جزءأ جزءأ)

(س، ش)

Terminal Surface	١٥١	سطح نهائي (توقف)
Cycloid	٤	شكل دحروجي
Necessary Condition	١٨	شرط ضروري
Sufficient Condition	١١٧	شرط كافي
Euler's Condition	١٨	شرط اويلر
Legendre Condition	١١٧	شرط لجندر
Jacobi Condition	١٢٢	شرط جاكوبي
Weierstrass Condition	١٣٠	شرط فيرشتراس
Transversality Conditions	٨٧	شروط اعتراضيه
Subsidiary Conditions	٥٢	شروط اضافيه
Reflection Condition	١٠٥	شرط الانعكاس
Refraction Condition	١٠٨	شرط الانكسار

Corner Conditions	١٠٩	شروط ركنيه
Erdmann – Weierstrass Condition	١١٢	شرط اردمان – فيرشتراس
	(ط)	
Arc Length	٢	طول القوس
Kinetic energy	٣٤	طاقه حركيه
Potential energy	٧٢	طاقه الوضع (الطاقه الكامنه)
	(ف)	
Vector Space	٤	فضاء متجهات
Metric Space	٥	فضاء متري
	(ق)	
Local Maximum Value	١٦	قيمه عظمى محليه
Local Minimum Value	١٦	قيمه صغرى محليه
Extremum Value	١٦	قيمه قصوى
Extremal with Corners	١٠٢	قيم قصوى ذات نقاط ركنيه
Proposition	٩	قضيه
Stationary Value	١٨	قيم الثبات (التوقف)
Critical Value	١٨	قيمه حرجه
Hamilton Principle	٤٢	قاعده (مبدأ) هاملتون
Optimality Principle	١٥٣	قاعده الأمثليه
	١٧٥	

Maximal Principle	١٦٣	قاعده القيمه العظمى
	(م)	
Geodesics Problem	٢	مسأله اقصر بعد
Variation Problem	٢	مسائل التغيرات
Isoperimetric Problem	٣	مسأله ذات المحيط المتساوي
Brachistochrone	٣	مسأله منحنى اقل زمن
Norm	٤	معيار او مقياس
Theorem	١٧	مبرهنه
Open Set	١٣	مجموعه مفتوحه
Euler – Lagrange equation	٣٩	معادله اويلر - لاجرانج
Canonical equation	٣٩	معادله قانونيه (شكل قانوني)
Euler – Boisson equation	٤٩	معادله اويلر - بواسون
Lagrange's Multiplier	٥٢	مضروب او مضاعفات لاجرانج
Plateau's Problem	٦٩	مسأله بلاتو
Mean Curvature	٧٠	معدل التقوس (الأنحناء)
Laplace equation	٧١	معادله لابلاس
Schrödinger's equation	٧٢	معادله شرودنجر
Hamilton Operator	٧٢	مؤثر هاملتون
Energy Operator	٧٢	مؤثر الطاقه
Quantum Mechanics	٧٢	ميكانيكا الكم

Hamilton – Jacobi equation	٩٦	معادله هاميلتون – جاكوبي
Smooth curve	١١٠	منحني ممهد
Proper Field	١٣٠	مجال (حقل) خاص
Central Field	١٣٢	مجال مركزي
Control Variables	١٤٨	متغيرات تحكم
Target Set	١٥١	مجموعه الهدف
Optimal Trajectory	١٥٢	مسار امثل
	(ن)	
Constant end points	١١١	نقاط اطراف ثابتة
Moving Points	٩٣	نقاط متحركة
Autonomous System	١٤٩	نظام ذاتي

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
 بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
 بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ